29 ~~9. III 65~~

Ma.
29
a 7.

Lehrbegrif
der geſamten
Mathematik.

Aufgeſetzt

von

Wencesl. Joh. Guſtav Karſten,

der Phil. Doct. der Mathem. Profeſſor zu Bützow, der Churfl. Bayerſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu München und der Holländiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Harlem Mitglied.

Der Siebende Theil.

Die Optik und Perſpectiv.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röſe. 1775.

Der

unter dem Allergnädigſten Schutz

Sr. Königl. Majeſtät

zu Dännemark und Norwegen

blühenden

Geſellſchaft der Wiſſenſchaften

in

Copenhagen

widmet

dieſen ſiebenden Theil

ſeines

Lehrbegrifs der Mathematik

als ein Zeugniß

ſeiner gröſten Verehrung

und

vollkommenſten Hochachtung

der Verfaſſer.

Vorrede.

Die optiſchen Wiſſenſchaften, in wie fern ſie ihren Namen vom Sehen führen, ſollen ſich mit den Erſcheinungen der Gröſſe, Geſtalt, der Lage und Bewegung ſolcher Gegenſtände beſchäftigen, die durchs Geſicht empfunden werden können: ſie ſind wie andre Theile der Mathematik nur in neuern Zeiten zu einiger Vollkommenheit gebracht worden,

und jetzt haben ſich die hieher gehörigen Lehren und Unterſuchungen ſehr vervielfältiget. Nur für ſich leuchtende, oder von andern erleuchtete Gegenſtände ſind es, die wir durchs Geſicht empfinden, und das Licht macht uns die um uns her befindlichen Sachen ſichtbar: deswegen gehören die Unterſuchungen über die Würkungen des Lichts, die Vergleichung des Glanzes für ſich leuchtender Körper, der verſchiedenen Klarheit mehr oder weniger erleuchteter Gegenſtände ebenfalls vorzüglich hieher. Die neueſten Unterſuchungen hierüber haben veranlaſſet, daß die optiſchen Wiſſenſchaften mit einer ganz neuen vorzüglich ſchönen Theorie von Ausmeſſung der Stärke des Lichts ſind bereichert worden, und dieſe hat den Nahmen der Photometrie erhalten. Sonſt iſt es gewöhnlich geweſen, vornemlich drey optiſche Wiſſenſchaften zu zählen, und ſie unter den Nahmen, der Optik im engern Verſtande, der Catoptrik und Dioptrik abzuhandeln. Die Optik im engern Verſtande betrachtet die Erſcheinungen, welche ſich daher erklären laſ-

ſen,

ſey, wenn man annimmt, daß das Licht von jedem ſichtbaren Punct in graden Linien nach allen Seiten ſich ausbreite: die Catoptrik unterſucht die Erſcheinungen, welche das von erleuchteten Flächen, und beſonders von eigentlich ſo genannten Spiegelflächen zurück geworfene Licht darſtellet, die Dioptrik aber betrachtet ſo wie überhaupt die Brechung des Lichts, welche erfolgt, wenn daſſelbe aus einer durchſichtigen Maſſe in eine andre von dichterer oder dünnerer Art übergeht, als auch beſonders die davon abhangenden Erſcheinungen. Noch eine mit der Optik im engern Verſtande genau verbundene Wiſſenſchaft wird unter dem Nahmen der Perſpectiv abgehandelt. Vielleicht wäre es nicht einmahl nöthig geweſen, ſie von der eigentlichen Optik zu unterſcheiden, wie denn auch ältere Schriftſteller ſie davon würklich nicht unterſchieden haben. Bey einigen iſt Optik und Perſpectiv einerley, bey andern wird wenigſtens das, was man jetzt der Perſpectiv vorbehält, beym Vortrag der Optik mitgenommen. Dieſe, die Optik im engern

Verſtande, beſchäftiget ſich mit den Gründen, nach welchen wir den Schein der Sachen von ihrer wahren Geſtalt, Gröſſe und Lage gegen einander unterſcheiden, und von jenem auf dieſe ſchlieſſen können: die Perſpectiv ſchließt aus der bekannten wahren Geſtalt, Gröſſe und Lage der Sachen gegeneinander auf ihre ſcheinbare Geſtalt, Gröſſe und Lage, ſo wie wir ſie wahrnehmen würden, wenn wir ſie aus dieſer oder jenen Stelle betrachteten. Zu einem vollſtändigen Lehrbegrif der Optik im allgemeinen Verſtande gehören demnach fünf Wiſſenſchaften: der Optik im engern Verſtande mit der Perſpectiv verbunden iſt derjenige Theil dieſes Lehrbuchs gewidmet, welchen ich hiemit den Kennern und Liebhabern der Mathematik überreiche, die Photometrie, Catoptrik und Dioptrik werden die beyden folgenden Theile abhandeln.

Ich bin anfangs zweifelhaft geweſen, ob es beſſer ſey, die Photometrie als eine eigene von den übrigen optiſchen abgeſonderte Wiſ-

ſen-

ſenſchaft vorzutragen? oder ob es nicht wenig=ſtens eben ſo gut ſey, wenn man das, was ei=gentlich photometriſch iſt, mit der Optik, Ca=toptrik, und Dioptrik verbånde? denn auch die Photometrie beſchåftiget ſich mit der Aus=meſſung des in graden Linien nach allen Seiten ausgehenden, des zurückgeworfenen und des gebrochenen Lichts. Nach oft wiederhohlter Prüfung und Ueberlegung der Sache hat es mir wenigſtens am beſten zu ſeyn geſchienen, daß die Photometrie, als eine Wiſſenſchaft, die ihre eigenthümlichen Gründe hat, beſon=ders vorgetragen werde. Ich werde mich darüber im folgenden Theil dieſes Lehrbuchs umſtåndlicher erklåren, hier wollte ich nur kurz einen Grund anführen, weswegen ich aus der Wiſſenſchaft, womit dieſer Theil unter dem Nahmen der Optik anfångt, alles photome=triſche weggelaſſen, und der noch beſonders vorzutragenden Photometrie vorbehalten habe. Hier alſo beſchåftige ich mich noch allein mit der eigentlichen Sehkunde, und weil es ein=mahl gewöhnlich iſt, die Perſpectiv von der

Optik abgeſondert vorzutragen, ſo iſt es auch hier geſchehen. Wenn ich dabey auch bemühet geweſen bin, dieſe an ſich ſehr angenehme, dem Geometer, Geographen und Aſtronomen eben ſo ſehr als dem Zeichner und Mahler intereſſante Wiſſenſchaft vollſtändiger, und in aller Abſicht brauchbarer vorzutragen, als andre Schriftſteller gethan haben; ſo kann ich wohl den Beyfall einſichtsvoller Kenner und andrer Liebhaber der Mathematik hoffen. Ich werde mit wenigem berühren, wie weit ich glaube, mehr als meine Vorgänger geleiſtet zu haben, ohne dasjenige die Geſchichte der Wiſſenſchaft betreffende hier nochmahl zu ſagen, was im Buch ſelbſt ſchon bey verſchiedenen Gelegenheiten eingefloſſen iſt. (M. ſ. den 44. 45. 54. 84. 269. 325. 326. §. der Perſpectiv.)

Herr Lambert hat ſeine Freye Perſpectiv, oder Anweiſung, jeden perſpectiviſchen Aufriß von freyen Stücken ohne Grundriß zu verfertigen, welche zum erſten mahl im Jahr 1759 zu Zürich herausgekommen

iſt,

iſt, vornemlich den in der Geometrie geübten Liebhabern der Zeichenkunſt zum Beſten aufgeſezt. Die der Wiſſenſchaft eigenen geometriſchen Gründe ſind nicht allein in ihrer ganzen Schönheit und Vollſtändigkeit vorgetragen, ſondern es ſind auch allenthalben die beſten und brauchbarſten Regeln für die Ausübung gegeben. Der Werth dieſes Buchs iſt durch den im Jahr 1774 zur zweyten Auflage hinzugekommenen zweyten Theil noch vergröſſert worden, deſſen ich um deswillen hier beſonders erwähne, weil ich nicht allein die ganze Wiſſenſchaft ausgearbeitet hatte, ſondern auch ein Theil dieſes Buchs ſchon abgedruckt war, als ich die neue Ausgabe der Lambertſchen Perſpectiv erhielte: daher kommt es, daß ich im 45. §. meiner Perſpectiv die zweyte Ausgabe der Lambertſchen und den neu hinzu gekommenen zweyten Theil nicht habe anführen können. Es enthält dieſer zweyte Theil unter dem Titel von Anmerkungen und Zuſätzen zum erſten Theil, der dem Inhalt nach unverändert wieder abgedruckt iſt, eine Sammlung vorzüglich

wohl-

wohlgewählter Beyſpiele, um die Zeichnungs-Regeln darauf anzuwenden, vornemlich ſolche, die etwas mehr als ganz gemeine Kenntniſſe erfordern, und eben daher unter den Händen ſolcher Zeichner, die aufs Gerathewohl zu verfahren gewohnt ſind, ſehr übel gerathen. Bey dieſer Abſicht, dem Zeichner und Mahler (freylich nicht dem bloß handwerksmäßigen) nützlich zu werden, hat übrigens Herr Lambert die analytiſche Perſpectiv von ſeinem Plan ausgeſchloſſen. Wenn aber gleich der Mahler und Zeichner allenfalls ohne Anwendung der Analyſis auf die Perſpectiv fertig werden kann; ſo hat doch der Aſtronom und Geograph ſehr häufige Veranlaſſungen, die Analyſin auf die Perſpectiv anzuwenden. Dies Feld habe ich noch nicht ſo bearbeitet gefunden, wie ich glaubte, daß es die Wiſſenſchaft verdiene, und deswegen habe ich verſucht, wie weit es mir glücken mögte, eine vollſtändig ausgearbeitete analytiſche Perſpectiv zu liefern. Bey dem allen habe ich die Regeln der Zeichenkunſt, ſo wie ſie dem Mahler und Zeichner nützlich ſind, nicht

nicht ausgeſchloſſen: ich habe vielmehr geſucht, die Wiſſenſchaft ganz in ihrer rechten Schönheit und Brauchbarkeit auszuarbeiten. Um jedoch die Gränzen, welche ich mir ſetzen muſte, nicht zu überſchreiten, habe ich keine groſſe Anzahl völlig ausgearbeiteter Zeichnungen liefern, und dadurch mannigfaltige Anwendungen der vorgetragenen Regeln machen können: bey der Wahl ſo vieler Beyſpiele, als mir zulänglich ſchienen, die vorgetragenen Regeln ſelbſt in ihrem ganzen Umfange zu erläutern, habe ich übrigens auf Herrn Lambert, nebſt andern practiſchen Schriftſtellern, verwieſen, und mit Vergnügen empfehle ich jetzt noch den zweyten Theil der Lambertſchen Anleitung allen Liebhabern der Zeichenkunſt. Sonſt habe ich geſucht, beym Vortrag der Gründe dieſer Wiſſenſchaft aus den Quellen ſelbſt zu ſchöpfen, die ich auch im 44. und 45. §. angeführt habe, und ich füge dem dort erzählten hier noch bey, daß Hrn. 's Graveſands Eſſai de Perſpective, ein Buch, das ſich ſchon ſelten gemacht hatte, nunmehro in den Oeuvres Philoſophiques

ques & Mathematiques de Mr. G. I 's Graveſande, raſſemblées & publiées par Jean Nic. Seb. Allamand, Amſt. 1774. gleich anfangs im erſten Theil wieder neu gedruckt erſchienen iſt. Herr Lambert hat in den Anmerkungen und Zuſätzen zum 3ten §. ſeiner Perſpectiv, gleich im Anfang des zweyten Theils, verſchiedene die Geſchichte der Wiſſenſchaft betreffende angenehme Nachrichten mitgetheilt, die ich hätte nutzen können, einiges bey mir a. a. O. fehlende zu ergänzen, wenn es nicht zu ſpät geweſen wäre, als ich Herrn Lamberts neueſte Arbeit erhielt. Die merkwürdigſten Schriftſteller wird man indeſſen auch bey mir ſchon angezeigt finden.

Ich komme nun zu demjenigen, was meine Arbeit eigenes hat, und wodurch ſie ſich von der Lambertſchen unterſcheidet. Dies iſt die beſtändige Anwendung der Analyſis auf die der Perſpectiv eigenthümlichen Grundlehren. Bisher iſt mir keine vollſtändig ausgearbeitete auf die dieſer Wiſſenſchaft eigenen

Grün=

Gründe gebauete analytiſche Perſpectiv bekannt geweſen, wenn ich einzelne in dieſem Buch angeführte hieher gehörige Aufſätze, ſo wie auch dasjenige ausnehme, was in Aſtronomiſchen Schriften hin und wieder jedoch nur in einzelnen abgebrochenen Stücken davon vorkommt. Hr. Hofr. Käſtner hatte die Wiſſenſchaft, ſo weit ſie analytiſch iſt, in einer kleinen Schrift auf ein allgemeines Problem zurück geführt, auch nachher davon einige Anwendungen auf die in der Aſtronomie und Geographie üblichen Abbildungen der Kugel gemacht. (M. ſ. unten den 326. §.) Bey ehemahligen zur analytiſchen Perſpectiv gehörigen von mir angeſtellten Unterſuchungen, habe ich die Sache eben ſo wie Hr. Käſtner betrachtet, und ſeine Formuln als bequeme Grundformuln der analytiſchen Perſpectiv angenommen. Nach der Zeit aber habe ich gefunden, daß man mehr geſchmeidige auf kürzere Rechnungen führende, und überall ſehr leicht anwendliche Grundformuln der analytiſchen

Per=

Perſpectiv erhält, wenn man die Sache ſo angreift, wie ich hier im 102. §. zu Werk gegangen bin. Ich glaube, daß es mir geglückt ſey, auf dieſem Wege in der zweyten Hälfte dieſes Buchs vom XV. bis zum letzten Abſchnitt die analytiſche Perſpectiv ſo vorgetragen zu haben, daß ich den Beyfall einſichtsvoller Kenner hoffen kann. Die Schlußſätze, beſonders in der Lehre von den Projectionen des Kreiſes, und der Kugel ſind, wie bekannt iſt, nicht neu, wie ich denn auch im Buch ſelbſt allenthalben, die dahin gehörigen ältern Schriftſteller angeführt habe. In der Allgemeinheit aber, wie ich hier die Unterſuchung anſtelle, hat, ſo viel ich weis, noch niemand die neuere Analyſin auf die Perſpectiv angewandt, und ich darf wohl erwarten, daß man bey dieſer Art des analytiſchen Vortrags die Sache lieber in ihrer ganzen Allgemeinheit wird überſehen lernen wollen, als auf einem ſolchen Wege, wie Clavius im Aſtrolabio genommen hat. Den Nutzen ſolcher Unterſuchungen, auch für

die

die Zeichen- und Mahlerkunſt, wird man nun aus dem zweyten Theil der Lambertſchen freyen Perſpectiv noch mehr einſehen lernen, weil daſelbſt allerley Fälle von Zeichnungen betrachtet werden, wobey das Bild des Kreiſes keine Ellipſe, ſondern eine Parabel oder Hyperbel wird.

Bey der Correctur hat diesmahl wider Verſchulden des Verfaſſers und Verlegers die Hülfe desjenigen Einſichtsvollen Freundes gefehlet, der bey einigen der vorigen Theile die Bemühung geneigt übernommen hatte, die Bogen vor dem gänzlichen Abdruck durchzuſehen. Deswegen glaube ich bey der groſſen Schwierigkeit, ein Buch dieſer Art ganz correct gedruckt zu liefern, alles gethan zu haben, was ein billig denkender Leſer erwarten kann, wenn ich aufs ſorgfältigſte alle Fehler, auch ſolche, die nicht ſehr erheblich ſind, geſammlet, und in dem beygefügten Verzeichniß angezeiget habe. Weil übrigens in den letztern Abſchnitten einige daſelbſt vorkommende etwas weitläuftige Formuln dadurch unverſtändlich

geworden waren, daß der Setzer das in grade fortlaufende Zeilen gebracht hatte, was unter einander ſtehen ſollte; ſo iſt das Verſehen dadurch gut gemacht worden, daß auf einem beſondern Bogen die Blätter, auf welchen die erwehnten Stellen vorkommen, richtiger abgedruckt ſind, mit einer Nachricht für den Buchbinder, ſie gehörigen Orts hinzubringen.

Bützow im März des Jahrs 1775.

der Verfaſſer.

Inhalt

Inhalt.
des ſiebenden Theils.

Die Optik,
oder
Allgemeine Theorie vom Licht und Schatten, auch von den Erſcheinungen der Gröſſe, der Geſtalt und Bewegung der Dinge, in wiefern ſie durchs Geſicht empfunden werden.

Der I. Abſchnitt. Vorläufige Betrachtung einiger Eigenſchaften des Lichts.

Der II. Abſchnitt. Vom Sehewinkel und einigen davon abhängenden Erſcheinungen.

Der III. Abſchnitt. Von der ſcheinbaren Geſtalt entfernter Gegenſtände.

Der IV. Abſchnitt. Von der ſcheinbaren Lage entfernter Gegenſtände, und der Parallaxe.

Der V. Abſchnitt. Von der ſcheinbaren Bewegung.

Der VI. Abſchnitt. Von den Erſcheinungen, welche die allmählige Fortpflanzung des Lichts verurſacht.

Der VII. Abſchnitt. Vom Schatten und Halbſchatten.

Der VIII. Abſchnitt. Vom Sonnenlicht insbeſondre.

Die

Die Perſpectiv,
oder
Die Theorie von den Abbildungen der ſcheinbaren Geſtalt ausgedehnter Gröſſen, und ihrer ſcheinbaren Lage gegen einander nach Verſchiedenheit der Lage und Entfernung des Auges.

Der I. Abſchnitt. Von den allgemeinen Gründen der Kunſt perſpectiviſche Zeichnungen zu entwerfen.

Der II. Abſchnitt. Vergleichung der Linien und Winkel des horizontalen geometriſchen Grundriſſes mit ihren perſpectiviſchen Abbildungen.

Der III. Abſchnitt. Die Perſpectiviſch-ichnographiſche Zeichnung grader Linien und Winkel.

Der IV. Abſchnitt. Die perſpectiviſch-ichnographiſche Zeichnung ebener Figuren.

Der V. Abſchnitt. Analytiſche Theorie der Projectionen horizontal liegender krummer Linien auf der vertical ſtehenden Tafel mit Anwendungen auf die Kreislinie.

Der VI. Abſchnitt. Die Regeln der Scenographie für ſolche körperliche Ausdehnungen, die wenigſtens einige ebene auf der Tafel oder dem Horizont ſenkrechte, oder damit parallele Seitenflächen haben.

Der VII. Abſchnitt. Allgemeine Theorie der Projectionen ſowohl gradlinichter Figuren, als auch krummer Linien, die in Ebenen liegen, welche die Tafel ſchief ſchneiden.

Der VIII. Abſchnitt. Die Allgemeine Theorie der Scenographie.

Der IX. Abſchnitt. Regeln zur geſchickten Wahl der Lage des Auges gegen die Tafel, und die darauf abzubildende Gegenſtände.

Der X. Abſchnitt. Von den Erſcheinungen perſpectiviſcher Abbildungen, wenn ſie auſſer dem rechten Geſichtspunct betrachtet werden.

Der XI. Abſchnitt. Allgemeine Theorie der Sciagraphie.

Der

Der XII. Abſchnitt. Regeln zur Prüfung und Beurtheilung perſpectiviſcher Gemählde, auch zur geſchickten Nachahmung guter Muſter.

Der XIII. Abſchnitt. Allgemeine Theorie der orthographiſchen Projectionen auf der vertical ſtehenden Tafel.

Der XIV. Abſchnitt. Theorie der orthographiſchen Projectionen auf der ſchiefliegenden Tafel.

Der XV. Abſchnitt. Allgemeine Theorie der Projectionen des Kreiſes zugleich als Kegelſchnitte betrachtet.

Der XVI. Abſchnitt. Von den Durchmeſſern der Kegelſchnitte.

Der XVII. Abſchnitt. Von den Brennpuncten und Berührungslinien der Kegelſchnitte.

Der XVIII. Abſchnitt. Von einigen beſondern Eigenſchaften der Hyperbel und ihren Aſymtoten.

Der XIX. Abſchnitt. Von den mancherley Projectionsarten einer Kugel.

Der XX. Abſchnitt. Allgemeine Theorie der ſtereographiſchen und orthographiſchen Kugel-Projectionen.

Der XXI. Abſchnitt. Von der ſtereographiſchen und orthographiſchen Polar-Projection.

Der XXII. Abſchnitt. Von der ſtereographiſch- und orthographiſch-äquatoriſchen Kugel-Projection.

Der XXIII. Abſchnitt. Von der ſtereographiſchen und orthographiſchen Horizontal-Projection.

Der XXIV. Abſchnitt. Beſondre Regeln zur Eintheilung der Projection eines Kugelſchnitts in Grade.

Der XXV. Abſchnitt. Allgemeine Betrachtung der Projection eines Kugelſchnitts, auch wenn die Tafel auf der Axe durchs Auge und der Kugel Mittelpunct nicht ſenkrecht iſt.

Der XXVI. Abſchnitt. Vergleichung dieſer Lehren mit des Hrn. Haſe Theorie der Kugel-Projectionen.

Der XXVII. Abſchnitt. Von der Central-Projection der Kugelſchnitte.

Der

Der XXVIII. Abſchnitt. Von den Projectionen der Kegelſchnitte beſonders der Ellipſe.

Der XXIX. Abſchnitt. Von den Projectionen der Parabel.

Der XXX. Abſchnitt. Von den Projectionen der Hyperbel.

864 S. muß am Ende der nächſtletzten Zeile P ſte-
hen, und das P im Anfang der letzten Zeile
weggelöſcht werden.

866 S. 9 Z. muß im Nenner am Ende ein) ſeyn.
5 Z. von unten $-\frac{1}{16}\pi^2 \cot\delta^4$ l.
$+\frac{1}{16}\pi^2 \cot\delta^4$

872 S. 3 Z. $\alpha\omega - \Delta$ l. $\alpha\omega = \Delta$.
12 Z. im Nenner $\sin\varepsilon$ l. $\sin\varepsilon^3$.

884 S. 5 Z. $z = 1$ l. $z - 1$.

885 S. 9 Z. im Nenner $(1+\cos\beta)\frac{3}{2}$ l. $(1+\cos\beta)^{\frac{3}{2}}$.

892 S. 5 Z. muß das Zeichen – vor $\tan\zeta$ wegge-
löſcht werden.

894 S. 17 Z. $+\frac{QQ}{PP}xx$ l. $-\frac{QQ}{PP}xx$.

895 S. 16 Z. $tg\delta^2 <$ l. $tg\delta^2 >$

902 S. 6 Z. iſt das z ein Factor der Gröſſe am
Ende der 5 Zeile.

903. am Ende der nächſtletzten Zeile, muß ſtatt des
Comma das Multiplicationszeichen ſtehen.

906 S. 8 Z. Ep und q, l. $= \varepsilon$, p, und q,

924 S. 2 Z. $\frac{p^2 \cos.\varepsilon^2}{q^2 q^2}$ l. $\frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2}$ —.

Die Optik.

oder

Allgemeine Theorie vom Licht und den Erſcheinungen der Gröſſe, der Geſtalt und Bewegung der Dinge, in wiefern ſie durchs Geſicht empfunden werden.

I. Abſchnitt.

Vorläufige Betrachtung einiger Eigenſchaften des Lichts.

1. §.

Obgleich die Wörter: Licht und Finſterniß, im gemeinen Leben eine ſehr bekannte Bedeutung haben; ſo iſt doch beſonders das Wort Licht einer gewiſſen Zweydeutigkeit unterworfen, welche daher rührt, weil man im gemeinen Leben nicht allemahl ſo beſtimmt redet, als es in Wiſſenſchaften nöthig iſt. Es iſt um uns herum helle, wenn wir die um und neben uns befindlichen Dinge durchs Ge-

ſicht erkennen können, widrigenfals iſt es finſter. Die vornehmſte Quelle des Lichts ſcheint das Feuer zu ſeyn, wovon wir täglich wenigſtens des Abends eine Erfahrung haben, wenn man in ein dunkles Zimmer eine angezündete Kerze oder Lampe bringt. Indeſſen nehmen wir auch wohl eine Helligkeit wahr, wo wir kein Feuer ja nicht einmahl eine merkliche Wärme zu empfinden glauben: es iſt eine bekannte Erfahrung, daß faules Holz im dunkeln leuchtet. In Abſicht auf die Empfindung des Geſichts ſind demnach die Körper, womit wir umgeben ſind, entweder leuchtende, oder dunkle Körper. Leuchtende ſind diejenigen, welche machen, daß wir nicht allein ſie ſelbſt, ſondern auch andre um und neben uns durchs Geſicht erkennen, und von andern unterſcheiden können: dunkle Körper aber ſind diejenigen, welche wir bey gänzlicher Ermangelung eines in ſattſamer Nähe befindlichen leuchtenden Körpers durchs Geſicht nicht empfinden können.

2. §.

Die leuchtenden Körper heiſſen auch Lichter, einer angezündeten Kerze oder Lampe legen wir dieſen Nahmen bey: wir nennen die Sonne ein Licht, weil ſie ein leuchtender Körper iſt, indeſſen wird das Wort: Licht, in dieſer Betrachtung hier nicht gebraucht werden. Wenn wir ſonſt etwas durch die Sinne empfinden, ſo iſt dies mit einer unmittelbaren Würkung entweder der empfundenen Sache ſelbſt oder gewiſſer Ausflüſſe von ihr in unſre Sinnglieder, verbunden. Wir riechen die Ausdünſtungen der Blumen, die unſre Naſe anfüllen; wir ſchmecken nur, was unſre Zunge, und fühlen nur, was auch

andre Theile unſers Körpers unmittelbar berührt. Was wir ſehen berührt nicht unmittelbar unſer Auge, ſo wie eine Blume nicht nothwendig unſre Naſe unmittelbar berührt, wenn wir ſie riechen: deswegen läſt es ſich nicht wohl begreifen, wie ein leuchtender Körper von uns geſehen werden, und wie er uns auch andre dunkle Körper ſichtbar machen könne, wofern nicht etwas körperliches, es mag an ſich ſo zart ſeyn wie es wolle, von demſelben ſo zu ſagen ausflieſt und bis in unſer Auge kommt, ohngefehr ſo wie Ausdünſtungen einer Blume in unſre Naſe kommen müſſen, wenn wir ſie riechen ſollen. Dieſe zarte Materie iſt vielleicht kein würklicher Ausfluß aus dem leuchtenden Körper, vielleicht iſt ſie durch den ganzen Weltraum ausgebreitet, und wird nur durch die leuchtenden Körper ſo in Würkſamkeit geſetzt, daß ſie in unſerm Auge die Empfindung des Sehens zuwege bringen kann. Dem ſey indeſſen, wie ihm wolle, ſo kommt uns doch die Sache ſo vor, als wenn aus jedem leuchtenden Körper etwas ausflöſſe, das entweder unmittelbar in unſer Auge kommt, und macht, daß wir den leuchtenden Körper ſelbſt ſehen; oder das zuerſt auf andre dunkle Körper fällt, ſie erleuchtet, alsdenn von ihnen wieder zurück in unſer Auge kommt, und auf ſolche Art macht, daß wir dieſen dunklen Körper auch ſehen. Dieſe zarte Materie, welche wir uns wenigſtens als eine ſolche vorſtellen können, die von jeder Sache in unſer Auge kommen muß, wenn wir ſie ſehen ſollen, heiſſet das Licht. In dieſem Verſtande ſagen wir, die Sonne theile dem Erdboden Licht und Wärme mit. In dieſem Verſtande ſagen wir, das Licht der Sonne ſey ſtärker, als das Licht einer angezündeten Kerze: in

dieſem Verſtande reden wir von Tageslicht, und ſagen, daß es unſre Wohnzimmer erleuchte, wenn wir gleich die Sonne ſelbſt, wenn der Himmel mit Wolken bedeckt iſt, nicht ſehen.

3. §.

Wir können des Tages bey verſchloſſenen Fenſtern im Zimmer die Perſonen, Gebäude und andre Dinge ſehen, die ſich auſſerhalb des Zimmers auf der Gaſſe oder ſonſt unter freyen Himmel befinden, auch ſehen, wie im Zimmer ſelbſt des Tages alle um uns herum befindliche Sachen erleuchtet, wenn gleich keine brennende Kerze oder Lampe im Zimmer vorhanden iſt: es wäre denn, daß man auch die Fenſterladen verſchloſſen hätte. Das Glaß, woraus unſre Fenſterſcheiben gewöhnlich beſtehen, iſt für ſich kein leuchtender Körper, weil es ſonſt des Nachts in unſern Zimmern ſo helle als des Tages ſeyn müſte: demnach muß das Glas dem Tageslicht den freyen Durchgang verſtatten, ſo wie im Gegentheil die hölzernen Fenſterladen den Durchgang des Lichts hindern. Jene Eigenſchaft haben noch mehrere andre Materien, als das Waſſer, einige Edelgeſteine, die unſre Erde umgebende Luft oder Atmoſphäre, u. a. m. und dieſe heiſſen **durchſichtige** Materien, ſo wie die übrigen **undurchſichtig** heiſſen, durch welche das Licht nicht hindurch gehet. Eine **vollkommen** durchſichtige Materie würde diejenige ſeyn, welche alles darauf fallende Licht durchlieſſe, und gar nichts zurück ſchickte. Dergleichen giebt es, ſoviel wir wiſſen, in der Natur nicht: das reinſte Glas läſſet nur einen Theil des darauf fallenden Lichts durch, ein andrer Theil geht davon, wie

von

von undurchſichtigen Materien zurück, welches ſchon daraus erhellet, weil wir ſonſt das Glas ſelbſt gar nicht, ſondern nur die hinter demſelben befindlichen Sachen ſehen würden.

4. §.

Wenn zwiſchen einem ſonſt ſichtbaren und entweder für ſich leuchtenden, oder doch hinlänglich erleuchteten Körper und unſerm Auge ſich ein undurchſichtiger Körper in der Stellung befindet, daß eine grade Linie von dem leuchtenden oder doch hinlänglich erleuchteten Körper nach unſer Auge gezogen, den undurchſichtigen Körper trift, ſo können wir jenen Körper nicht ſehen, er wird uns, wie wir ſagen, von dem undurchſichtigen Körper verdeckt. Dieſe Bedeckung erſtreckt ſich nach Beſchaffenheit der Umſtände zuweilen nur auf einen Theil des ſonſt ſichtbaren Körpers, und wenn man auf dieſe Erfahrung ein wenig genauer acht hat, ſo nimmt man bald wahr, daß es damit folgende Bewandniß habe. Jeder Punct des leuchtenden oder erleuchteten Körpers bleibt ſichtbar, wovon eine grade Linie in unſer Auge gezogen den zwiſchen beyden befindlichen dunklen undurchſichtigen Körper nicht trift: alle übrige Puncte deſſelben ſehen wir nicht, wovon dergleichen grade Linien in unſer Auge gezogen durch den dunklen Zwiſchen-Körper hindurch gehen müſten. Vermöge dieſer Erfahrung iſt man berechtiget anzunehmen, daß das Licht von jedem Punct eines leuchtenden ſowohl, als auch erleuchteten Körpers nach einer graden Linie in unſer Auge komme.

5. §.

Eigentlich ſehen wir nur die Oberfläche eines undurchſichtigen Körpers, es muß von jedem Punct ſeiner Oberfläche Licht in unſer Auge kommen, wenn wir ihn ſehen ſollen: und zwar vermöge der eben angeführten Erfahrungsſätze in einer graden Linie, wofern nicht andre Urſachen hierin eine Aenderung machen. Es iſt hier gleichviel, ob man ſich dieſe grade Linie nur als die Richtung vorſtellen will, nach welcher das Licht würkt, oder als den würklichen Weg, in welchem das Licht von dieſem Punct aus- und in unſer Auge ſo zu ſagen einfließt. Jeden ſolchen leuchtenden Punct kann man übrigens überall ſehen, was auch das Auge in Anſehung deſſelben für eine Lage hat, wenn ſich nur zwiſchen ihm und dem Auge nichts undurchſichtiges befindet. Auch mehrere Perſonen ſehen denſelben Punct zugleich, die Stellung ihrer Augen gegen dieſen Punct mag ſeyn, welche ſie wolle. Daraus folgt, daß das Licht von jedem ſichtbaren Punct nach allen Seiten in graden Linien ausgehe, die ihn ſo, wie die Halbmeſſer einer Kugel ihren Mittelpunct umgeben. Ein ſolcher Punct heiſt daher überhaupt ein **ſtrahlender Punct**, er mag übrigens für ſich leuchtend, oder nur durch fremdes Licht erleuchtet ſeyn; und dasjenige Licht allein betrachtet, welches in einer einzigen graden Linie von dem ſichtbaren Punct ausgehet, heiſt ein **Lichtſtrahl**.

6. §.

Die in den beyden lezten §§. erzählten Erfahrungen, und die daraus gezogenen Schlußſätze, enthalten die vornehmſten Gründe aller Optiſchen Wiſ-

ſenſchaften, deswegen verdienen ſie noch eine etwas nähere Erläuterung. Man nimmt an, das Licht gehe von jedem ſtrahlenden Punct nach allen Seiten in graden Linien aus. Die Erfahrungen, woraus man dies ſchließt, laſſen ſich nur in der uns allenthalben umgebenden Luft anſtellen, und zwar in den nächſten Gegenden, an der Erdfläche, wo die Luft am dichteſten iſt: auch ſind dies Erfahrungen, die ſich eigentlich nur bey kurzen Entfernungen des ſtrahlenden Puncts vom Auge anſtellen laſſen, wo alſo der Lichtſtrahl unterweges beſtändig in Luft von einerley Dichtigkeit bleibt. Demnach wäre noch die Frage, ob der Lichtſtrahl in groſſer Entfernung des ſtrahlenden Puncts vom Auge ebenfals grade bliebe, beſonders alsdenn, wenn die Luft, durch welche der Strahl hindurch gehen muß, nicht durchgängig einerley Dichtigkeit hätte. Man könnte weiter fragen: wie wenn der Strahl unterweges auch durch Glas, durch Waſſer, oder ſonſt durchſichtige Materien von verſchiedener Dichtigkeit durchgienge, ob er auch alsdenn noch beſtändig in einerley grader Linie fortgehen würde. Es würde nur auf einige wenige leicht anzuſtellende Proben ankommen, um ſich zu verſichern, daß die lezte Frage verneint werden müſſe. Wenn ein Lichtſtrahl aus der Luft ins Waſſer, in Glas oder andre Materien geht, ſo wird er von ſeinem vorigen Wege abgelenkt, welches unten umſtändlicher wird beſtättiget werden. Eigentlich wird hier alſo nur zum Grunde geſetzt, der Lichtſtrahl bleibe eine grade Linie, ſo lange er in Luft von einerley Dichtigkeit, oder überhaupt in einem ſolchen Raum bleibt, der mit einer durchſichtigen Materie durchaus von einerley Dichtigkeit angefüllet iſt. Ob

das Licht ſich auch in einem ſonſt völlig leeren Raume in graden Linien nach allen Seiten von einem ſtrahlenden Punct ausbreiten würde? iſt eine Frage die jemand beyfallen könnte, der daran dächte, daß das Licht von allen leuchtenden Weltkörpern vielleicht durch ganz leere Räume gehen muß. Wenn aber die urſprüngliche Richtung des Lichts, in welcher es ſich nach allen Seiten ausbreitet, gradlinicht iſt und nur alsdenn der Weg des Lichts ſich von der graden Linie ablenkt, wenn der Raum, durch welchen es ſich ausbreitet, mit ungleichförmig dichter durchſichtiger Materir angefüllt iſt; ſo iſt es wohl am natürlichſten, anzunehmen, es werde mit der Ausbreitung des Lichts von einem ſtrahlenden Punct in einem ſonſt völlig leeren Raum eben die Bewandniß haben, die es damit in einem ſolchen Raum hat, der mit einer gleichförmig dichten durchſichtigen vom Licht ſelbſt aber noch verſchiedenen Materie angefüllet iſt.

7. §.

Wer hier ſehr genau ſeyn, und die Art nach allen Umſtänden prüfen wollte, wie man ſich von der gradlinichten Ausbreitung des Lichts von einem ſtrahlenden Punct vermittelſt der Erfahrung überzeugen kann, der würde mit dem Herrn Boſcowich (Diſſert. de Lumine Vindob. 1766) allerley Zweifel und Bedenklichkeiten dagegen erregen können. Auf dergleichen Zweifel kann indeſſen niemand verfallen, der nicht alle optiſche und aſtronomiſche Wiſſenſchaften ſchon inne hat, und alsdenn weis er auch ſchon, daß ſie im Grunde die Richtigkeit des angenommenen Satzes von dem gradlinichten Wege des Lichts, ſo wie man ihn braucht und anwendet, nicht umſtoſſen,

ſondern ſie vielmehr beſtättigen. Wer es nicht will als eine Erfahrung gelten laſſen, daß ſich das Licht in einerley durchſichtigen Raum nach graden Linien ausbreite, der wird es wenigſtens als eine Hypotheſe gelten laſſen, woraus man eine Reihe von Folgerungen zieht, die hiernächſt mit der Erfahrung verglichen werden. Wofern alsdenn alles, was daraus geſchloſſen wird, ſich durch Erfahrungen beſtätigen läſt, inſofern man darüber Verſuche und Beobachtungen anſtellen kann; ſo wird rückwärts die Richtigkeit der Hypotheſe ebenfals daraus folgen. Darauf gehet auch eigentlich des Herrn Boſcowich Meynung hinaus, (a. a. O. Part. I. §. 29. pag. 24) und er verlangt wohl nur, man ſoll beym Vortrag der erſten Gründe der optiſchen Wiſſenſchaften ein wenig genauer als gewöhnlich reden, und zu erinnern nicht vergeſſen: daß die Erfahrungen, welche man gewöhnlich anführt, die gradlinichte Ausbreitung des Lichts zu beſtättigen, eben nicht ſchlechthin als ſcharfe Beweiſe gelten, ſondern vielmehr nur als nicht ganz unerhebliche Gründe dienen können, eine Hypotheſe anzunehmen, deren Richtigkeit durch die Folgen, die man daraus ziehet, allererſt weiter bewähret werden muß.

8. §.

Es ſey nun L ein ſtrahlender Punct, und ABCD eine ebene Fläche, von welcher Geſtalt ſie wolle; ſo iſt offenbar, daß von allen den Lichtſtrahlen, die den Punct L umgeben, nicht mehr und nicht weniger die Ebene ABCD treffen können, als diejenigen, welche in dem Raum einer Pyramide enthalten ſind, deren Spitze der ſtrahlende Punct L, und deren Grundfläche die Ebene Fig. 1.

 ABCD

ABCD iſt. Wäre die Ebene ABCD ein Kreis, ſo würde alles Licht, was ſie auffangen kann, in dem Raum eines Kegels enthalten ſeyn, deſſen Spitze der ſtrahlende Punct L, und deſſen Grundfläche der erwehnte Kreis wäre. Ueberhaupt mag die Ebene, auf welche ein Theil des Lichts von dem ſtrahlenden Punct auffält, eine Geſtalt haben, welche ſie wolle, ſo wird allemahl die Menge der auffallenden Strahlen in dem Raum eines Pyramiden- oder kegelförmigen Körpers enthalten ſeyn, deſſen Spitze der ſtrahlende Punct, und deſſen Grundfläche die erleuchtete Ebene iſt. Man nennt einen ſolchen mit Strahlen erfüllten Raum einen **Strahlenkegel**, oder eine **Strahlenpyramide.**

Je weiter der Punct L von der Ebene ABCD entfernt iſt, deſto mehr nähern ſich die auffallenden Strahlen der parallelen Lage, und wenn die Entfernung des Puncts L von dieſer Ebene in Vergleichung mit jedem Durchſchnitt von ihr unendlich groß wäre; ſo würde der Strahlenkegel ſich in einen **Strahlen-Cylinder**, und die Strahlen-Pyramide ſich in ein **Priſma** verwandeln.

9. §.

Es können unzählig viele Lichtſtrahlen einander durchkreuzen, ohne einander hinderlich zu ſeyn, denn man kann durch ein kleines Loch eine ganze Landſchaft überſehen. Man darf nur mit einer zarten Nadel ein Loch durch ein Cartenblad bohren, um ſich davon zu überzeugen, daß man durch eine ſo kleine Oefnung eine groſſe Menge von Gegenſtänden auf einmal deutlich überſehe, welches nicht ſeyn könnte, wenn die Lichtſtrahlen einander hinderlich wären, die insgeſammt

ſammt durch die kleine Oefnung hindurch und hinter derſelben wieder auseinander gehen müſſen.

10. §.

Jeder Lichtſtrahl führt das Bild desjenigen Puncts eines ſichtbaren Gegenſtandes mit ſich, wovon er ausgehet, und die Erfahrung lehrt, daß unſer Auge einerley Empfindung hat, es mag der Lichtſtrahl von einem ſolchen Punct des Gegenſtandes ihm in grader Linie unmittelbar zugeſchickt werden, oder der Strahl mag von einem Punct eines andern Gegenſtandes kommen, der den Strahl nachdem er ihn aufgefangen hat, wieder zurück ins Auge ſchickt. Nur muß im leztern Fall auf den Punct, welcher den Strahl zurück ſchickt, nicht von mehrern andern Puncten zugleich Licht fallen.

Man verſchlieſſe alle Oefnungen eines Zimmers, durch welche das Tageslicht hineinfallen könnte, ſorgfältig, und laſſe nur eine einzige ſehr kleine Oefnung auf der Seite des Zimmers übrig, wo ſich von der Sonne ſtark erleuchtete Gegenſtände befinden, ohne daß die Sonne ſelbſt durch dieſe kleine Oefnung in das Zimmer ſcheine. In dieſem verfinſterten Zimmer bringe man eine weiſſe Tafel, einen weiſſen Bogen Papier, oder etwas dergleichen, gegen die kleine Oefnung; ſo ſiehet man auf der weiſſen Tafel die auſſerhalb des Zimmers der Oefnung gegen über befindliche Gegenſtände aufs ſchönſte aber dabey umgekehrt abgemahlt. Die Bilder erſcheinen deſto lebhafter aber dabey deſto kleiner, je näher man die Tafel der Oefnung bringt: ſie werden deſto gröſſer, je weiter man die Tafel von der Oefnung entfernt, verliehren aber dabey an der Helligkeit und Lebhaftigkeit

der

der Farben. Dieſe Erfahrung giebt nicht allein einen Beweis des im Anfange dieſes §. behaupteten Satzes ab, ſondern beſtättiget auch den Satz des vor. §. wie ſogleich erhellen wird, wenn man ſich den Erfolg bey der ganzen Begebenheit den bisher vorgetragenen Gründen gemäß ſo vorſtellet.

11. §.

Fig. 2. Wenn das Loch AB ein geometriſcher Punct wäre; ſo würde von jedem Punct des Gegenſtandes LM auf jeden Punct der gegen über ſtehenden Tafel CD nur ein einiger Strahl fallen, wie L*l*, M*m*, und ſo würden *l*, *m*, Bilder der Puncte L, M, des Gegenſtandes ſeyn. Eben ſo würde von jedem andern Punct des Gegenſtandes, der zwiſchen L und M liegt, ein Bild zwiſchen *l* und *m* auf der Tafel entſtehen. Dieſe Bilder würden zwar übrigens auf der Tafel in eben der Ordnung neben einander liegen, wie die zugehörigen Puncte des Gegenſtandes, jedoch deswegen im ganzen umgekehrt, weil ſich alle Strahlen in dem offenen Punct bey A durchſchneiden müſſen. Die Bilder aller einzelnen Puncte des Gegenſtandes machen zuſammen das Bild des ganzen aus, und aus dem bisherigen iſt begreiflich, daß dies Bild des ganzen umgekehrt, das unterſte des Gegenſtandes im Bilde zuoberſt, was im Gegenſtande rechter Hand liegt, im Bilde linker Hand erſcheinen müſſe.

Das ganze Bild des Gegenſtandes nimmt auf der Tafel einen Raum ein, der ſo groß, als die Durchſchnittsfigur der Ebene der Tafel CD mit dem kegel- oder pyramidenförmigen Raum iſt, den die Strahlen im finſtern Zimmer ausfüllen. Daraus ergiebt ſich ſogleich, daß die Gröſſe des Bildes, (der

ebenen

ebenen Fläche, über die es ausgebreitet iſt,) dem Quadrat der Entfernung von der Oefnung A proportional, mithin das Bild deſto gröſſer ſey, je weiter die Tafel CD von der Oefnung A entfernt iſt.

Weil aber das entferntere Bild nur von eben ſo viel Strahlen erleuchtet wird, als das nähere, mithin eine gleiche Menge Licht auf dem entferntern gröſſern Bilde mehr ausgebreitet iſt, als auf dem nähern kleinern Bilde; ſo muß das Auge von dem nähern kleinern Bilde lebhafter gerührt werden, als von dem entferntern gröſſern Bilde, jenes muß heller und klärer erſcheinen, als dieſes.

12 §.

Die Oefnung AB wird aber nie ein geometriſcher Punct ſeyn, demnach wird von jedem Punct L oder M des Gegenſtandes ein Strahlenkegel $Ll\lambda$, $Mm\mu$ durchfallen, und wenn die Oefnung AB ein Kreis, CD aber mit der Ebene dieſer Oefnung parallel iſt, ſo wird das Bild eines jeden Puncts L oder M auf der Tafel CD in einen kleinen Kreis $l\lambda$, $m\mu$ ausgebreitet ſeyn, der deſto kleiner ſeyn wird, je kleiner die Oefnung AB iſt, je näher die Tafel bey der Oefnung befindlich, und je weiter der abgebildete Gegenſtand auſſerhalb des Zimmers von der Oefnung entfernt iſt. Dergleichen kleine Kreiſe werden dem Auge im verfinſterten Zimmer nur wie Puncte erſcheinen, und jeder Kreis wird auf eine eigene Stelle der Tafel fallen, ohne daß ſich dieſe Kreiſe merklich vermiſchen; demnach bleibt unter dieſen Umſtänden, wenn die Oefnung ſehr klein iſt, die Erſcheinung eben ſo, wie ſie im vor. §. beſchrieben iſt. Hat aber die Oefnung AB eine etwas beträchtliche Gröſſe; ſo

2 Fig.
3 Fig.

ſo werden die Kreiſe $l\lambda$, $n\nu$, welche zweyen nahe bey einander liegenden Puncten L und N des Gegenſtandes zugehören, ebenfals merklich gröſſer, und man ſiehet ſogleich, daß ſie einander nicht blos berühren, ſondern ſchneiden. Die Stelle der Tafel $l\nu$, welche beyden Kreiſen gehört, empfängt alſo von beyden Puncten L und N Licht, und eben deswegen kann an dieſer Stelle weder von L noch von N ein deutliches Bild erſcheinen. Eben ſo vermiſchen ſich die Bilder der übrigen Puncte des Gegenſtandes, und das iſt die Urſache, weswegen das Bild im ganzen, wenn gleich alles übrige einerley bleibt, deſto undeutlicher wird, je gröſſer die Oefnung iſt.

Weil dies Folgen aus dem im 10 §. angenommenen Satz ſind, welche in allen Umſtänden mit der Erfahrung übereinſtimmen, ſo iſt man berechtiget, den erwehnten Satz als wahr anzunehmen.

Der II. Abſchnitt.

Vom Sehewinkel, und einigen davon abhängenden Erſcheinungen.

13. §.

Wenn man das menſchliche Auge nur von auſſen betrachtet, ſo nimmt man leicht in der Mitte deſſelben eine ſchwarze kreisförmige mit zarten durchſichti-

ſichtigen Häuten bedeckte Oefnung wahr, die der Stern heiſt; durch dieſe geht das Licht ins innere des Auges, und verurſacht alsdenn die Empfindung des Sehens. Wie der innere Bau des Auges beſchaffen iſt, und was in demſelben beym Sehen vorgeht, wird unten, ſoweit man es hat entdecken können, umſtändlicher erzählt werden: hier genügt es, wenn man nur überlegt, nach welchen Geſetzen das Licht von jedem ſtrahlenden Körper auf den Stern des Auges auffält. Demnach ſey der kleine Kreis oω der Stern im Auge, O ſein Mittelpunct, L und M ein Paar ſtrahlende Puncte; ſo wird jeder dieſer Puncte L, M, die Spitze eines Strahlenkegels ſeyn, deſſen Grundfläche der Stern im Auge iſt. Die Axen OL, OM, dieſer Strahlenkegel laufen im Mittelpunct O des Sterns zuſammen, und ſchlieſſen daſelbſt einen gewiſſen Winkel LOM ein. Dieſer Winkel heiſt die ſcheinbare Entfernung der Puncte L und M von einander: eigentlich iſt es der Sehewinkel, unter welchem die Entfernung beyder Puncte dem Auge erſcheint. Es iſt hier gleichgültig, ob die Puncte L und M, auf der Oberfläche eines und eben deſſelben ſtrahlenden Körpers liegen, oder wo ſie ſonſt ſeyn mögen, wofern ſie nur dem Auge beyde zugleich ſichtbar ſind. 4 Fig.

14 §.

Eine grade Linie OC durch den Mittelpunct O des Sterns oω im Auge, auf ſeiner Ebene ſenkrecht geſetzt, heiſt die Geſichtsaxe. Wenn demnach ein ſtrahlender Punct C in der Geſichtsaxe liegt, ſo iſt der auf den Stern fallende Strahlenkegel ein grader Kegel, in allen andern Fällen aber ein ſchiefer Kegel. 4 Fig.

Die

Die Erfahrung lehrt, daß wir deſto deutlicher ſehen, je näher die betrachtete Sache der Geſichtsaxe liegt: iſt L ein ſtrahlender Punct auſſer der Geſichtsaxe, ſo heiſt der Winkel LOC ſeine ſcheinbare Entfernung von der Geſichtsaxe. Vermöge der Erfahrung können wir einen ſolchen Punct ſo lange deutlich ſehen, als ſeine ſcheinbare Entfernung von der Geſichtsaxe nicht über 45° beträgt. Wenn alſo OC, OL, OM, in einer Ebene liegen, ſo wird auch M deutlich geſehen werden, ſo lange COM nicht über 45° beträgt. Deswegen iſt die Grenze des deutlichen Sehens ein optiſcher Winkel von 90°, wovon auf jeder Seite der Geſichtsaxe eine Hälfte liegt.

15 §.

Weil wir durch die Erfahrung gelernet haben, daß uns die Stelle einer Sache, welche die Geſichtsaxe trift, am deutlichſten erſcheint, und daß ihre Deutlichkeit abnimmt, wenn ihre ſcheinbare Entfernung von der Geſichtsaxe zunimmt; ſo haben wir uns angewöhnt, die Geſichtsaxe gegen die mittelſte Stelle des Objekts zu richten, wenn wir es ganz
5 Fig. überſehen wollen. Es ſey OC die gegen die Mitte des Objects gerichtete Geſichtsaxe, LOM eine Ebene durch dieſe Axe, L und M die äuſſerſten ſichtbaren Puncte der dem Auge zugekehrten Oberfläche des Gegenſtandes in dieſer Ebene; ſo heiſt der Winkel LOM der ſcheinbare Durchmeſſer des Objects in dieſer Ebene genommen. Man nennt ihn den horizontalen oder verticalen ſcheinbaren Durchmeſſer, nachdem die Ebene LOM horizontal oder vertical iſt. Jener heiſt auch wohl die ſcheinbare Höhe, dieſer die ſcheinbare Breite des Objects.

16 §.

Es wird von der Geſtalt des Objects abhängen, was die zwiſchen L und M liegende Durchſchnittslinie der Ebene des optiſchen Winkels mit der Oberfläche des Objects für eine Geſtalt hat. Iſt das Object eine ebene Fläche, oder doch die dem Auge zugekehrte Vorderfläche deſſelben eben, ſo wird die erwehnte Durchſchnittslinie grade ſeyn: und wenn alsdenn die Geſichtsaxe auf dieſer Ebene ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie zugleich auf LM ſenkrecht.

Es mag indeſſen die vordere dem Auge zugekehrte Fläche, wie ſie wolle, beſchaffen ſeyn, ſo kann man allemahl durch L und M eine Ebene auf der Ebene des Sehewinkels ſenkrecht annehmen, welche die letzte in der graden Linie LM ſchneiden wird. Wenn dieſe Ebene auf der Geſichtsaxe ſenkrecht iſt, ſo wird zugleich LM auf der Geſichtsaxe ſenkrecht ſeyn. Nicht in allen Fällen, wird LM die würkliche wahre Höhe oder Breite, oder ſonſt ein wahrer Durchmeſſer des Objects ſeyn, wenn man dadurch die längſte mit LM parallel genommene Ausdehnung des Objects verſteht: ich werde ihn deswegen den ſichtbaren Durchmeſſer nennen (diametrum viſam) und ſeine Hälfte den ſichtbaren Halbmeſſer.

17 §.

Wenn die Geſichtsaxe OC den ſichtbaren Durchmeſſer LM ſenkrecht halbirt, ſo hat man OC:CL = 1 : tang COL; alsdenn iſt COL der ſcheinbare Halbmeſſer, und wenn der optiſche Winkel bekannt iſt, ſo läſt ſich der ſichtbare Halbmeſſer oder Durchmeſſer des Objects aus der bekannten Entfernung dieſes Durchmeſſers vom Auge, und umgekehrt, 5 Fig.

aus dem bekannten ſichtbaren Halbmeſſer oder Durchmeſſer ſeine Entfernung vom Auge finden. Es ſey der optiſche Winkel $= \omega$, der ſichtbare Durchmeſſer $= \delta$, ſeine Entfernung vom Auge $= a$, ſo hat man $\delta = 2a \tang \frac{1}{2}\omega$ und $\tang \frac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}\delta}{a}$. Wenn demnach Ω, Δ, A, den optiſchen Winkel, den ſichtbaren Durchmeſſer, und die Entfernung deſſelben vom Auge für ein andres Objekt bedeuten, ſo iſt $\tang \frac{1}{2}\Omega = \frac{\frac{1}{2}\Delta}{A}$; mithin verhalten ſich die Tangenten der ſcheinbaren Halbmeſſer ordentlich wie die ſichtbaren würklichen Halbmeſſer, und umgekehrt, wie die Entfernungen der leztern vom Auge.

18 §.

6 Fig. Die Entfernung einer Kugel *AMBL* vom Auge *O* iſt gegeben, nebſt ihrem wahren Halbmeſſer, man ſucht ihren ſcheinbaren, und würklichen ſichtbaren Halbmeſſer.

Aufl. Es ſey E der Kugel Mittelpunct, und EO treffe die Oberfläche der Kugel in A, ſo ſchneidet jede Ebene durch EO die Kugel ſo, daß die Durchſchnittsfigur AMBL ein gröſter Kreis wird. Durch O ziehe man ein Paar Tangenten dieſes Kreiſes, OL und OM, ſo iſt offenbar, daß das Auge nicht mehr als den Bogen LAM dieſes gröſten Kreiſes zugleich überſehen kann, und daß mithin die Sehne LM dieſes Bogens der ſichtbare Durchmeſſer der Kugel ſey. Weil nun die Bogen AM und AL gleich groß ſind (127 §. Geom.) und EO die Winkel LOM, LEM halbirt, ſo iſt A die ſichtbare Mitte

der Kugel, und EO halbirt die Sehne LM als den ſichtbaren Durchmeſſer in C ſenkrecht. Es ſey nun EO $= a$, EL $= r$, LOM $= \omega$, ſo iſt $\sin \frac{1}{2} \omega =$
$\frac{EL}{EO} = \frac{r}{a}$, und man hat $\frac{1}{2}\omega$ als den ſcheinbaren Halbmeſſer. Ueberdem iſt CL $=$ EL ſin LEO, und LEO $= 90° - \frac{1}{2}\omega$, folglich wird CL $= r \cos \frac{1}{2}\omega$, welches der ſichtbare Halbmeſſer iſt. Weil nun $\cos \frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{aa-rr}{aa}}$ iſt, ſo hat man auch CL $=$
$\frac{r}{a}\sqrt{(aa-rr)}$.

19 §.

Das Auge überſiehet demnach nie eine völlige Halbkugel, ſondern einen kleinern Abſchnitt, der aber der Halbkugel deſto näher kommt, je weiter die Kugel vom Auge entfernt iſt. Die Höhe dieſes Abſchnitts iſt AC $= r$ ſinv. LEO $= r$ coſinv $\frac{1}{2}\omega$, und der Bogen AL $= r \text{A}\sin \frac{CL}{r} =$

$r\text{A}\sin \frac{\sqrt{(aa-rr)}}{a} = r\text{A}\cos \frac{r}{a} =$

$r\text{A}\tan \frac{\sqrt{(aa-rr)}}{r}$. Weil übrigens $r =$
$a \sin \frac{1}{2}\omega$ war, ſo läſt ſich aus dem bekannten ſcheinbaren Halbmeſſer, auch der wahre Halbmeſſer, der Kugel finden, wenn ihre Entfernung vom Auge bekannt iſt, und umgekehrt aus dem bekannten ſcheinbaren und wahren Halbmeſſer ihre Entfernung vom Auge $a = \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\omega}$.

20 §.

Die Erfahrung lehrt, daß wir die Gröſſe der Gegenſtände durchs Geſicht nach dem Sehewinkel ſchätzen, daß ſie uns bey einerley Sehewinkel gleich groß zu ſeyn ſcheinen, daß ſie uns aber deſto gröſſer oder kleiner vorkommen, je gröſſer oder kleiner ihr Sehewinkel iſt. Es iſt eine bekannte Erfahrung, daß einerley Gegenſtand deſto kleiner zu werden ſcheint, je weiter er ſich in grader Linie vom Auge entfernt, je mehr alſo ſein Sehewinkel abnimmt. Sonſt kann auch einerley Sache in verſchiedenen Entfernungen vom Auge gleich groß zu ſeyn ſcheinen, wenn der Sehewinkel einerley bleibt: ſo würde die Sehne eines Kreiſes dem Auge in jeder Stelle des zugehörigen Bogens unter einerley Winkel mithin von einerley Gröſſe zu ſeyn ſcheinen.

Die Schärfe unſers Geſichts hat übrigens ihre Gränzen, und ſehr weit entlegene Gegenſtände entziehen ſich unſerm Geſicht völlig, wenn ihr Sehewinkel ſehr klein wird. Vermöge verſchiedener darüber angeſtellter Erfahrungen nimmt man gewöhnlich an, daß ein Object nicht weiter kenntlich bleibe, wenn ſeine Entfernung vom Auge 5000 bis 6000 mahl gröſſer, als ſein Durchmeſſer iſt. Robert Smith erzählt, (Lehrb. der Optik 97 §. 29 S. der Kaeſtnerſchen Ueberſ.) er ſey bey einem Verſuch gegenwärtig geweſen, wo ein guter Freund von ihm, der die beſten Augen in der Geſellſchaft gehabt hätte, einen weiſſen Kreis auf ſchwarzen Boden, oder einen ſchwarzen Kreis auf weiſſen Boden gegen das Himmelslicht gehalten ſchwerlich erkennen können, wenn ſeine Entfernung vom Auge 5156 mahl gröſſer als ſein Durchmeſſer geweſen. Es war demnach tang $\frac{1}{2}\omega$

(17 §)

(17 §.) $= \frac{1}{10312} = 0,0000969743 \ldots$

Im 427 §. Geom. iſt ſin $39'' \, 33''' \, 2\frac{13}{16}'''' =$ 0,0001917475973 gefunden worden, und aus Vergleichung mit dem 428 und 429 §. Geom. ergiebt ſich, daß die Tangente eben dieſes Winkels von dem zugehörigen Sinus, mithin auch von dem zugehörigen Bogen nicht um $\frac{1}{10000000000}$ des Halbmeſſers unterſchieden ſey. Daraus läſt ſich ſogleich überſehen, daß $\frac{1}{2}\omega$ ohngefehr 20″ und ω etwa 40″ betragen habe. Eine ſchärfere Rechnung iſt nicht nöthig, weil ſich ohnehin wegen der verſchiedenen Schärfe des Geſichts verſchiedener Perſonen nichts ganz gewiſſes feſtſetzen läſt.

Für ſich leuchtende, oder ſehr ſtark erleuchtete Körper bleiben indeſſen dem Auge unter noch vielen kleinern optiſchen Winkeln ſichtbar, wiewohl ſie doch nur als helle Puncte erſcheinen, wenn ihr Sehewinkel nicht über 1″ beträgt. Die Aſtronomie giebt hievon an den Fixſternen Beyſpiele.

21 §.

Wenn ſich das Auge O in der Mitte zwiſchen zweyen Parallellinien AG und BH befindet, ſo ſcheinet ihre Entfernung von einander nach G und H zu deſto mehr abzunehmen, je länger ſie werden, weil die optiſchen Winkel COD, EOF, GOH, u. ſ. f. abnehmen: und wenn ſich in C, E, G, und D, F, H gleich weit von einander entfernte Gegenſtände befinden, wie wenn das Auge ſich mitten im Eingange einer Allee in zweyen Parallellinien gleich weit 7 Fig.

von einander geſetzter Bäume befände; ſo ſcheinet die Entfernung dieſer Gegenſtände von einander abzunehmen; auch ſcheinen die Bäume, wenn ſie alle gleich hoch ſind deſto niedriger, je weiter ſie vom Eingange entfernt ſind. Alle die optiſchen Winkel, unter welchen dieſe Entfernungen und Höhen erſcheinen, laſſen ſich leicht durch trigonometriſche Rechnungen finden, wenn die wahren Entfernungen und Höhen bekannt ſind. Wenn die Allee mehr denn 5000 mahl länger wäre, als ſie breit iſt, ſo würden beyde Reihen Bäume zuſammen zu laufen ſcheinen.

22 §.

8 Fig. Wenn wir uns auf einer weit ausgebreiteten Ebene befinden, ſo ſcheint ſich dieſe zu heben, weil wir gewohnt ſind, jede Linie AC auf dieſer Ebene mit einer durchs Auge damit parallel laufenden wagrechten Linie OL zu vergleichen. Die Entfernungen BK, CL beyder Linien OL und AC von einander ſcheinen abzunehmen, weil die optiſchen Winkel BOK, COL abnehmen. Aus eben dieſem Grunde ſcheint die Fläche der offenbaren See ſich zu heben, wenn man ſie vom Ufer betrachtet. Wenn OA wagrecht, und AC eine lothrechte Höhe iſt, ſo ſcheinen aus eben dem Grunde die Entfernungen der lothrechten Linie AC von der Scheitellinie OL abzunehmen; und das iſt die Urſache, weswegen hohe Gebäude vorwärts über zu hängen ſcheinen.

Weil $\tang BOC = \frac{BC \sin ABO}{OB + BC \cos ABO}$ iſt,

und $\sin ABO = \frac{AO}{BO}$, $\cos ABO = \frac{AB}{BO}$;

ſo

ſo wird $\tang BOC = \frac{BC.AO:BO}{BO+BC.AB:BO} =$

$$\frac{BC.AO}{BO^2+BC.AB} = \frac{BC.AO}{AO^2+AB^2+BC.AB}.$$

Dieſe Formul ergiebt, daß BOC beſtändig abnehme, wenn allein AB wächſt, BC und AO aber einerley bleiben. Wenn dagegen allein AO wächſt, ſo wächſt anfangs BOC, nimmt aber hiernächſt wieder ab, und verſchwindet, wenn AO unendlich groß wird, wie der Natur der Sache gemäß iſt.

Schreibt man x ſtatt AO, und ſucht, in welcher Höhe x der Winkel BOC am größten iſt, ſo muß man $d.\frac{BC.x}{x^2+AB^2+AB.BC} = 0$ ſetzen (343 §. Mech.) das giebt

$(x^2+AB^2+AB.BC)BC.dx - 2BCx^2dx = 0$,

oder $x = \sqrt{(AB^2+AB.BC)}$. Wenn demnach BC in Vergleichung mit AB ſehr klein iſt, ſo wird ſehr nahe $x = AB$.

Wenn OAB ein ſpitzer Winkel iſt, ſo hat man $OB^2 = AO^2 - 2AO.AB.\cos OAB + AB^2$, folglich

$$tg.BOC = \frac{BC.AO}{AO^2 - 2AO.AB\cos OAB + AB^2 + AB.BC}$$

allemahl gröſſer, als in dem Fall, wenn $OAB = 90°$ iſt. Eine Gegend alſo, die ſich von A gegen C über die Horizontallinie erhebt, ſcheint dem Auge mehr ausgebreitet, als wenn ſie wagrecht wäre. Wofern im Gegentheil OAB ein ſtumpfer Winkel wäre, ſo müſte cos OAB das entgegen geſetzte Zeichen haben, und es wäre tang BOC kleiner als in dem Fall wenn

OAB = 90° iſt. Demnach wird eine Gegend, die ſich von A nach C unter die Horizontallinie ſenkt, dem Auge nicht ſo ausgebreitet, als die wagrechte erſcheinen.

23 §.

8 Fig. Wäre die Fläche der Erde vollkommen eben, ſo würde die ganze Strecke, welche das Auge von A nach H zu überſehen könnte, nicht viel mehr betragen, als die Höhe des Auges AO 5000 mahl genommen. Wenn nemlich dieſe Vorausſetzung angenommen wird, ſo iſt $\tang AOH = \frac{AH}{AO} = 5000$. Weil aber vermöge der Trigonometriſchen Tafeln $\tang 89° 59' = 3437,7467$; ſo iſt bey der angenommenen Vorausſetzung $AOH > 89° 59'$, mithin jeder Winkel HOM kleiner als 1′, wie groß auch HM angenommen wird. Ein Gegenſtand HI in H, deſſen Höhe der Höhe des Auges AO gleich wäre, würde unter einem kleinern Winkel, als dem von 1 Minute geſehen werden, mithin unempfindlich ſeyn, ſo wie jede wagrechte Entfernung HM über H hinaus unempfindlich wird. (20 §.) Alle Gegenſtände alſo, die über H hinaus liegen, ſcheinen mit denen, die in der Gegend von H befindlich ſind, gleich weit vom Auge entfernt, weil das Auge den Unterſcheid der Entfernungen nicht mehr wahrnehmen kann. Dieſemnach ſcheint der ganze Theil der Ebene, welche das Auge nach allen Seiten überſehen kann, in einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer AH wäre, eingeſchloſſen zu ſeyn, welcher den Geſichtskreis, oder Horizont abgiebt.

24 §.

Wofern die Erde eine Kugel, oder doch beynahe eine Kugel iſt, wovon die mathematiſche Geographie weitern Unterricht geben wird; ſo erſtreckt ſich der Geſichtskreis wegen der kugelförmigen Geſtalt der Erde nicht ſoweit, als er ſich auf einer völlig ebenen Erde erſtrecken würde. Es ſey der Kreis um C ein größter Kreis der Erdkugel, das Auge ſtehe in O, und man ziehe OC, nebſt der Tangente OH, ſo iſt AH der Bogen, welchen das gegen H gerichtete Auge nur überſehen kann (18 §.) Nach Picards Ausmeſſung der Erde, wovon die Geographie ebenfals weitere Nachricht geben wird, iſt der Durchmeſſer der Erde 6538594 Toiſen groß, mithin die gewöhnliche Höhe des Auges (wenn man auf keinem erhabenen Ort ſteht) in Vergleichung mit dem Halbmeſſer der Erde ſehr klein. Weil nun AH = 9 Fig.

$$rA\,\text{tang}\frac{\sqrt{(OC^2-CA^2)}}{CA}$$ iſt, (16 §.) ſo läſt ſich der Bogen AH trigonometriſch finden. Es ſey die Höhe des Auges OA $= a$, der Halbmeſſer CA $= r$, ſo iſt $OC^2 = rr + 2ar + aa$, und es wird tang

$$\frac{AH}{r} = \sqrt{\frac{2ar+aa}{rr}} \text{ beynahe } = \sqrt{\frac{2a}{r}},$$

weil a in Vergleichung mit r ſehr klein iſt. Nun war $2r = 6538594$ Toiſen, alſo iſt $\frac{1}{2}r = 1634648{,}5$ Toiſen; und weil a nie eine Toiſe betragen wird, ſo

iſt tang $\frac{AH}{r}$ nicht gröſſer, als $\sqrt{\frac{1}{1634648{,}5}}$

oder nie gröſſer, als $\frac{1}{1278{,}5} = 0{,}0007821666$

Demnach wird der Bogen AH nie völlig 3 Minuten betragen. Weil hier nun keine ſcharfe Rechnung nöthig iſt, und der ſeinem Durchmeſſer gleiche Bogen beynahe 114,6 Grade beträgt; (289 §. Geom.)

ſo wird AH ohngefehr $= \frac{3}{114.60+36} \cdot 2r =$

$$\frac{1}{114.20+12} \cdot 2r = \frac{1}{1146} \cdot 3269297$$

$= 2853$ Toiſen. Bey eben der angenommenen Höhe des Auges würde der Halbmeſſer des Geſichtskreiſes auf einer Ebene zwiſchen 5 und 6000 Toiſen fallen, er würde demnach ohngefehr nochmahl ſo groß, als auf der ſphäriſchen Erde ſeyn.

Auf der ſphäriſchen Erde iſt der Bogen AH die wahre Horizontallinie, die Tangente AB die ſcheinbare Horizontallinie, und BH die Senkung des wahren Horizonts unter den ſcheinbaren. Dieſe Senkung wird alſo bis an die äuſſerſte Grenze des Horizonts auf der ſphäriſchen Erde, nicht über 6 Pariſer Fuß betragen, und der Bogen AH krümmt ſich ſo wenig, daß die Erſcheinungen auf dem Horizont der ſphäriſchen Erde übrigens mit den Erſcheinungen auf einer völligen Ebene überein kommen.

25 §.

10 F. Wenn eine lange Reihe ſichtbarer Gegenſtände LM vom Auge O weiter als die ſcheinbare Gränze des Horizonts entfernt iſt, z. E. eine Reihe von Wolken, ſo werden alle, wie A, C, E, in der äuſſerſten Gränze des Geſichtskreiſes bey *a*, *c*, *e*, erſcheinen. Hat dieſe Reihe von Gegenſtänden eine etwas beträchtliche Höhe, ſo wird die vom Auge am

wenig=

wenigſten entfernte Stelle CD am gröſsten erſcheinen in *cd*, die übrigen zu beyden Seiten, wie AB. EF, deſto kleiner, je weiter ſie vom Auge entfernt ſind. Auf ſolche Art wird auch die höchſte Gränze BDF dieſer Gegenſtände im Bogen *bdf* zu ſtehen ſcheinen. Wofern überdem AB, CD, EF, gar ſehr hoch ſind, ſo werden ſich auch *ab*, *cd*, *ef*, im Bogen gegen die durch O gezogene Verticallinie zu krümmen ſcheinen. Man erinnere ſich hiebey an die Erſcheinungen eines vollſtändigen ſchönen Nordlichts, an den lichten Bogen um eine im Norden ſtehende dunkle Wolke, und an die aus demſelben aufwärts ſchieſſenden Strahlen, die insgeſammt ſich gegen die Scheitellinie zu krümmen ſcheinen.

Wenn eine ſolche lange Reihe von Wolken FEDZABC grade über unſerm Haupte parallel mit dem Horizont GH ausgebreitet iſt, ſo werden ihre äuſſerſten Enden F und C deſto niedriger erſcheinen, je weiter ſie zu beyden Seiten nach C und F fortlaufen, weil die Winkel HOC, GOF deſto kleiner werden. Dieſe Reihe wird ſich demnach ebenfals in einen Bogen gegen den Horizont zu krümmen: und ſo begreift man, wenn die Wolken über unſerm Haupt nach allen Seiten parallel mit dem Horizont ausgebreitet ſind, daſs der Himmel wie ein Gewölbe erſcheinen müſſe. 11 F.

26 §.

Dieſe ſcheinbare Geſtalt des Himmels wird nun zwar die Eigenſchaft haben, daſs alle Schnitte mit einer Ebene durch die Verticallinie OZ krumme Linien geben, die einander gleich und ähnlich ſind: ob aber dieſe Linien Kreisbogen ſind? und ob die

ſchein=

ſcheinbare Geſtalt des heitern Wolkenfreyen Himmels einerley ſey mit derjenigen, die ein mit Wolken bedeckter Himmel dem Auge darſtellet? iſt eine Frage, die ſich ſo leicht nicht beantworten läſt. In der ſphäriſchen Aſtronomie betrachtet man zwar die Sache ſo, als wenn alle Schnitte durch die Verticallinie OZ Halbkreiſe wären, und man hat dazu gute Gründe, welche eine ſolche Vorſtellung vollkommen rechtfertigen. Es ſcheint uns auch ſehr natürlich zu ſeyn, den Himmel über uns als eine hohle Halbkugel zu betrachten, und dies beſonders des Nachts bey klarer und heiterer Luft, wenn man alle Sterne ſiehet. Dieſe ſcheinen insgeſammt vom Auge gleich weit entfernt zu ſeyn, weil wir den Unterſcheid ihrer Entfernungen nicht wahrnehmen können, und dies dürfte wohl die Vorſtellung einer ſolchen Halbkugel erregen, an deren innern hohlen Fläche die Sterne gleichſam angeheftet ſcheinen. Indeſſen iſt es gewiß, daß uns das Gewölbe des Himmels unter gewiſſen Umſtänden gegen die Scheitellinie zu mehr eingedruckt und platter erſcheint, als wenn es eine völlige Halbkugel wäre, und dies wenigſtens nach meiner eigenen Erfahrung, wie mir ſelbſt die Sache vorkömmt, vornemlich alsdenn, wenn der Himmel ganz mit Wolken bedeckt iſt. Smiths Meynung von dem Geſetz, nach welchem ſich die ſcheinbare Geſtalt des Himmels krümmet, findet man im Lehrbegr. der Optik 1 B. 5 Cap. 163. 164 §. 55-58 S. Er nimmt an, es ſey das ſcheinbare Himmelsgewölbe ein Kugel-Segment, das kleiner,

kleiner, wie eine Halbkugel iſt, und ſchließt aus daſelbſt angeführten Beobachtungen, daß der Halbmeſſer des Horizonts ohngefehr $3\frac{1}{2}$ mahl gröſſer, als die ſcheinbare Höhe der Scheitellinie ſey, die Vorausſetzung aber, daß dies ſcheinbare Gewölbe ein Kugelſtück ſey, iſt ohne allen Beweis angenommen, wie auch H. H. Kaeſtner in einer der deutſchen Ueberſetzung hieſelbſt beygefügten Anmerkung erinnert.

Der III. Abſchnitt.

Von der ſcheinbaren Geſtalt entfernter Gegenſtände.

27 §.

Wenn eine grade Linie DF eine ſolche Lage gegen das Auge O hat, daß ſie verlängert den Mittelpunct des Sterns im Auge O treffen würde; ſo erſcheint ſie dem Auge wie ein einziger Punct. Nimmt man an, daß ſich DF um denjenigen Endpunct D kreisförmig drehet, welcher dem Auge O am nächſten iſt; ſo ſind die Winkel ODC anfangs ſtumpf, und der Sehewinkel DOC wächſt. Man hat nemlich $\tan DOC = \frac{CD \sin ODC}{OD - CD \cos ODC} =$ 12 F.

$\frac{CD \sin CDF}{OD + CD \cos CDF}$, da dann der Zähler wächſt und der Nenner abnimmt, wenn ODC abnimmt. Wenn ODC = CDF = 90° wird, ſo hat man $\tan DOC = \frac{CD}{OD}$, und wenn ODC ſoweit abgenommen hat, daß ſin ODC = coſ DOC geworden, mithin OCD = 90° iſt, ſo hat man tang DOC $= \frac{CD}{\sqrt{(OD^2 - CD^2)}}$. Dies iſt der gröſte Werth, welchen DOC haben kann, und wenn ODC noch weiter abnimmt, ſo nimmt COD ebenfals wieder ab.

In ſolchen Fällen, wenn CD in Vergleichung mit OD ſehr klein iſt, hat man beynahe tang DOC $= \frac{CD \sin CDF}{OD}$. Es ſey BD auf OD ſenkrecht, und CA mit OD parallel gezogen, ſo iſt BD = CD ſin CDF, und $\tan DOB = \frac{BD}{OD} = \frac{CD \sin CDF}{OD}$, mithin beynahe DOC = DOB. Setzt man auch OA auf OD ſenkrecht, ſo hat man tang BOC $= \frac{BC \sin ABO}{OB + BC \cos ABO}$, und BC = CD coſ CDF, $\sin ABO = \frac{BD}{OB} = \frac{CD \sin CDF}{OB}$, coſ ABO $= \frac{OD}{OB}$: mithin wird tang BOC =

$$\frac{CD^2 \cos CDF \sin CDF : OB}{OB + OD\,CD \cos CDF : OB}$$

=

$$= \frac{CD^2 \sin CDF \cos CDF}{OD^2 + BD^2 + OD \, . \, CD \cos CDF}$$

$$= \frac{CD^2 \sin CDF \, . \cos CDF}{OD^2 + OD \, . \, CD \, . \cos CDF + CD^2 \sin CDF^2}$$

$$= \frac{(CD^2 : OD^2) \sin CDF \cos CDF}{1 + \frac{CD}{OD} \cos CDF + \frac{CD^2}{OD^2} \sin CDF^2}.$$

28 §.

Aus dem 20 §. weiß man, daß der Winkel BOC nicht mehr dem Auge merklich bleibe, wenn derſelbe nicht über eine halbe Minute beträgt, da dann $\tang BOC = 0{,}0001454 \ldots$ ſeyn würde. Weil nun allemahl $\frac{CD^2}{OD^2} > \tang BOC$ iſt, ſo erhellet, daß BOC nicht mehr empfindlich ſey, wenn $\frac{CD^2}{OD^2} < 0{,}0001454 \ldots$ oder $\frac{CD}{OD} < 0{,}012$ iſt. Alsdenn unterſcheidet das Auge die Entfernung BC nicht mehr, und es hat einerley Empfindung, es mag die auf OD ſenkrechte grade Linie BD, oder die gegen OD geneigte Linie CD betrachten. Setzt man den Winkel $ODC = \varphi$, ſo folgt aus dieſen Schlüſſen, daß jede gegen OD unter dem Winkel φ geneigte Linie dem Auge eben ſo erſcheine, als eine grade Linie $BD = CD \sin \varphi$, die auf OD ſenkrecht iſt, wenn nur die Entfernung OD mehr denn 100 mahl gröſſer als CD iſt.

29. §.

Wenn OE den Winkel DOC halbirt, ſo ſcheint E die Mitte der Linie CD zu ſeyn. Es iſt aber eigentlich (207 §. Geom.) DE:EC = OD:OC, mithin iſt die ſcheinbare Mitte von der wahren Mitte der Linie CD verſchieden. Wenn indeſſen OE mehr denn 100 mahl gröſſer, als CD iſt, ſo bleibt der Unterſcheid nicht mehr merklich. Alsdenn iſt beynahe

$$\tan EOC = \frac{EC \sin OED}{OE},$$ und $\tan EOD$ beynahe $= \frac{ED \sin OED}{OE}$: und wenn $OED = EOC$ angenommen wird, ſo ergiebt ſich beynahe $EC = ED$. Genauer findet man EC und ED aus der Proportion $EC : ED = OC : OD = \sin ODC : \sin OCD$, dieſe giebt $CD : ED = \sin ODC + \sin OCD : \sin OCD$, und $EC : CD = \sin ODC : \sin ODC + \sin OCD$, mithin wird

$$ED = \frac{CD \sin OCD}{\sin ODC + \sin OCD},$$ und

$$EC = \frac{CD \sin ODC}{\sin ODC + \sin OCD},$$ da dann $\sin OCD$ bekannt iſt, wenn OD, DC, und ODC gegeben ſind. Man hat nemlich $OC = \sqrt{(OD^2 - 2OD . OC \cos ODC + CD^2)}$, alſo $\sin OCD =$

$$\frac{OD \sin ODC}{OC} = \frac{OD \sin ODC}{\sqrt{(OD^2 - 2CD . OD \cos ODC + CD^2)}}.$$

Je kleiner CD in Vergleichung mit OD iſt, deſto mehr nähern ſich $\sin OCD$ und $\sin ODC$ einander, wie

wie auch daraus erhellet, weil ein Winkel ſich der Ergänzung des andern zu 180° deſto mehr nähert. Demnach nähern ſich CE und ED zugleich dem Werth $\frac{1}{2}CD$.

30 §.

Wenn das Auge *O* in der Ebene des Kreiſes *CDEF* liegt, und die Entfernung deſſelben vom Mittelpunct des Kreiſes mehr denn hundertmahl gröſſer, als der Halbmeſſer iſt; ſo erſcheint der Kreis, wie die grade Linie *AB*, die den Bogen *CDE*, welchen das Auge auf einmahl überſehen kann, in der Mitte berührt, und die der Sehne dieſes Bogens gleich iſt. 13F.

Beweis. Es ſey G der Mittelpunct, alſo OG ſeine Entfernung vom Auge, OC und OE ein Paar Tangenten, ſo iſt CDE der Bogen, welchen das Auge überſehen kann, und DOC = DOE der ſcheinbare Halbmeſſer. Wenn nun CE die Sehne dieſes Bogens iſt, und CA, EB mit OG parallel gezogen ſind, ſo iſt AB = CE, und beyde Linien werden von OG bey D und H ſenkrecht halbirt. Man ziehe noch MP auf AB und MQ auf OG ſenkrecht, hiernächſt aber OM, und OP, und ſetze den Halbmeſſer des Kreiſes $= r$, die Entfernung OG $= a$, den Winkel DGM $= \eta$; ſo hat man tang DOP =

$$\frac{DP}{DO} = \frac{r \sin\eta}{a-r}, \text{ tang DOM} = \frac{MQ}{OQ}$$

$$= \frac{r\sin\eta}{a - r\cos\eta}.$$ Weil nun MOP = DOP − DOM iſt, ſo wird tang MOP =

$$\frac{\text{tang DOP} - \text{tang DOM}}{1 + \text{tang DOP} . \text{tang DOM}} =$$

$$\frac{r \sin\eta (a - r \cos\eta) - r \sin\eta (a - r)}{(a-r)(a - r\cos\eta)}$$

$$: \left(1 + \frac{r^2 \sin\eta^2}{(a-r)(a-r\cos\eta)}\right) =$$

$$\frac{r^2 \sin\eta - rr \sin\eta \cos\eta}{(a-r)(a - r\cos\eta) + r^2 \sin\eta^2} =$$

$$\frac{rr \sin\eta \sin r . \eta}{(a-r)(a - r\cos\eta) + r^2 \sin\eta^2}.$$ Dieſer Ausdruck

iſt allemahl kleiner als $\frac{rr}{(a-r)(a-r\cos\eta)}$, und weil $(a - r\cos\eta) > a - r$ iſt, ſo iſt auch

$\frac{rr}{(a-r)(a-r\cos\eta)} < \frac{rr}{(a-r)^2}$, mithin

iſt allemahl tang MOP $< \frac{rr}{(a-r)^2}$, oder

tang MOP $< \frac{1}{\left(\frac{a}{r} - 1\right)^2}$.

Nun ſey $a = 100 . r$, ſo wird tang MOP $< \frac{1}{99^2}$, d. i. tang MOP $< \frac{1}{9801}$, oder tang MOP $< 0{,}000102 \ldots$ Mithin iſt bey der angenommenen Vorausſetzung MOP kleiner als eine halbe Minute, und das Auge unterſcheidet die

die Entfernung MP nicht, es mag M in dem Bogen CDE, wo man will, angenommen werden. Es hat demnach einerley Empfindung, es mag den Bogen CDE, oder die Tangente AB ſehen.

Weil $\frac{r}{a} = \sin DOC$ iſt, ſo wird der Winkel DOC ohngefehr 34′ faſſen, wenn $\frac{r}{a} = \frac{1}{100}$ iſt: alsdenn beträgt der ſcheinbare Durchmeſſer COE einen Grad und etwa 8 Minuten. Demnach erſcheint der Kreis dem in der Ebene deſſelben befindlichen Auge wie eine grade Linie, wenn ſein ſcheinbarer Durchmeſſer einen Grad und darunter ausmacht.

31 §.

Wenn *gleich* DMC kein Kreisbogen, ſondern eine *andre* krumme Linie, oder eine gebrochene Linie wäre, von welcher Geſtalt man will; ſo wird es doch allemahl eine gewiſſe Entfernung des Auges geben, wobey die Winkel MOP, COA, dem Auge unempfindlich werden; und daraus zieht man leicht die Folge, daß jede ebene Figur wie eine grade Linie erſcheine, wenn das Auge in derſelben Ebene liegt, und zugleich weit entfernt iſt. Man hat allemahl 14 F.

$\tang DOP = \frac{DP}{OD}$, und $\tang DOM = \frac{DP}{OD + PM}$, mithin $\tang MOP = \frac{DP . PM}{OD^2 + OD . PM + DP^2}$. Iſt nun $PM = n . DP$, ſo hat man $\tang MOP =$

$\frac{n DP^2}{OD^2 + n OD . DP + DP^2}$, und es iſt allemahl

$\tang MOP < \frac{n DP^2}{OD^2}$, mithin auch $\tang MOP$

$< \frac{DP^2}{OD^2}$, ſo lange $n < 1$, d. i. $MP < DP$

bleibt. Gewöhnlich wird alſo die Figur ſchon ſicher wie eine grade Linie erſcheinen, wenn OD hundertmahl gröſſer als DA iſt, d. i. wenn der ſcheinbare Halbmeſſer bis auf einen halben Grad abgenommen hat.

32 §.

15 F. Wie eine ebene Figur dem Auge erſcheinen müſſe, wenn daſſelbe nicht in der Ebene der Figur liegt; ſolches kommt auf die Lage des Auges gegen dieſe Ebene, und die Entfernung deſſelben an. Um eine Probe davon zu geben, wie ſich dies überhaupt beurtheilen laſſe, ſey BFDE ein Kreis, und das Auge ſtehe in O; C ſey der Mittelpunct, und OCA eine Ebene durch OC auf der Ebene des Kreiſes ſenkrecht: ſo iſt BD ein Durchmeſſer. Ferner ſey EF ein andrer Durchmeſſer auf BD ſenkrecht, ſo iſt auch EF auf der Ebene OBD ſenkrecht (318 §. Geom.) und die Ebene OFE gleichfals (315 §. Geom.) Nun ſey des Kreiſes Halbmeſſer $= r$, der Winkel OCB $= \eta$, ſo iſt $\tang BOC = \frac{r \sin \eta}{OC - r \cos \eta}$ und tang

$COD = \frac{r \sin \eta}{OC + r \cos \eta}$, mithin $\tang BOD =$

tang

$$\frac{\tang BOC + \tang COD}{1 - \tang BOC . \tang COD} = \frac{2r OC \sin\eta}{OC^2 - r^2 \cos\eta^2}$$

$$: \left(1 - \frac{r^2 \sin\eta^2}{OC^2 - r^2 \cos\eta^2}\right) = \frac{2r . OC \sin\eta}{OC^2 - r^2}.$$

Ferner iſt $\tang COF = \frac{r}{OC}$, alſo $\tang COF =$

$$\frac{2 \tang COF}{1 - \tang COF^2} = \frac{2r}{OC} : \left(1 - \frac{r^2}{OC^2}\right)$$

$= \frac{2r . OC}{OC^2 - r^2}$. Mithin iſt $\tang BOD = \tang EOF \sin\eta$, und der Winkel $EOF > BOD$.

Man ziehet hieraus leicht die Folge, daß der Durchmeſſer EF dem Auge gröſſer, als BD, mithin der Kreis dem Auge nicht in ſeiner wahren Geſtalt erſcheine.

33. §.

Es iſt nicht ſchwer überhaupt den optiſchen Winkel zu finden, unter welchem jeder andre Durchmeſſer GH geſehen wird, der mit BD den Winkel $BCG = \vartheta$ einſchließt. Wenn nemlich $OCA = \eta$ geſetzt wird, ſo iſt $\cos OCG = \cos\eta \cos\vartheta$, (532 §. Geom.) und $\cos OCH = - \cos\eta \cos\vartheta$. Aber $\tang COG =$

$\frac{r \sin OCG}{OC - r \cos OCG}$, und $\tang COH =$

$\frac{r \sin OCG}{OC + r \cos OCG}$, mithin $\tang GOH =$

$\tang (COG + COH) =$

$$\frac{r \sin OCG (OC + r \cos OCG) + r \sin OCG (OC - r \cos OCG)}{OC^2 - r^2 \cos OCG^2}$$

$$:\left(1-\frac{r^2\sin OCG^2}{OC^2-r^2\cos OCG^2}\right)=\frac{2r.OC.\sin OCG.}{OC^2-r^2},$$ oder tang GOH =

$$\frac{2r.OC\sqrt{(1-\cos\eta^2\cos\vartheta^2)}}{OC^2-r^2}.$$ Für $\vartheta=0$ iſt, alſo GOH am kleinſten, und GOH wächſt mit ϑ, ſo lange bis $\vartheta=90°$ iſt, alſo GH in EF fällt. Wenn hiernächſt $\vartheta>90°$ wird, ſo nimmt $\cos\vartheta^2$ wieder zu, und GOH wird kleiner bis für $\vartheta=180°$ wiederum tang GOH $=\frac{2r.OC.\sin\eta}{OC^2-r^2}$ wird. Daraus läſt ſich ſchlieſſen, daß der Kreis länglicht rund erſcheinen müſſe, und zwar deſto mehr, je kleiner der Winkel η iſt. Wenn $\eta=90°$ wäre, ſo bliebe tang GOH beſtändig $=\frac{2r.OC}{OC^2-r^2}$, wie für ſich ſchon klar iſt, und der Kreis würde vollkommen rund erſcheinen.

34. §.

Wie jede andre ebene Figur dem Auge, das nicht in der Ebene der Figur liegt, erſcheinen müſſe, lieſſe ſich auf eine völlig ähnliche Art unterſuchen.
16 F. Es ſey C derjenige Punct der Figur, welchen die Geſichtsaxe trift, und OCA die Ebene ihres Neigungswinkels gegen die Ebene der Figur BDFE, mithin BOF der ſcheinbare Durchmeſſer der Figur in dieſer Ebene genommen. Wenn nun die Geſtalt, Gröſſe, und Lage der Figur bekannt iſt, ſo ſind CB

und

und CF bekannt, und daraus läſt ſich BOF finden, weil OC nebſt dem Winkel OCA gegeben ſeyn muß. Aus der bekannten Geſtalt und Gröſſe der Figur BDFE hat man ferner für jeden Winkel BCD, nicht allein CD, ſondern auch CE, ſo wie OCD aus BCO und BCD, mithin läſt ſich DOE für jede Lage der Ebene dieſes Winkels finden.

35. §.

Wir ſehen nur die Oberfläche der Körper, und zwar allemahl nur ein Stück davon das dem Auge zugekehrt iſt. Dieſe dem Auge zugekehrte Vorderfläche des Körpers kann eine ungemein mannigfaltige Geſtalt haben: ſie kann eben, gebrochen, gekrümmt ſeyn. Die Frage alſo, wie ein Körper von gegebener Geſtalt und Gröſſe dem Auge erſcheine, deſſen Lage und Entfernung von dem Körper bekannt iſt, kommt auf die Beantwortung der Frage an: wie dasjenige Stück der dem Auge zugekehrten Fläche des Körpers erſcheine, was innerhalb der optiſchen Pyramide liegt (8 §.), wovon die Spitze im Auge iſt, der Umfang aber die äuſſern ſichtbaren Grenzen des Körpers berührt. Iſt z. E. die Geſichtsaxe ſenkrecht gegen die Mitte der Seitenfläche eines Würfels gerichtet, ſo erſcheint der Würfel, wie ein Quadrat, denn das Auge kann nur eine einzige Seitenfläche überſehen. Wenn aber die Geſichtsaxe mit der Diagonallinie des Würfels zuſammen fällt; ſo kann das Auge drey Seitenflächen des Würfels überſehen, die gegen die Geſichtsaxe einerley Lage haben, mithin auch einerley Geſtalt zu haben ſcheinen. Man ſiehet leicht, daß hiebey eine groſſe Mannigfaltigkeit ſtatt haben könne; indeſſen

mag der Körper, wie er wolle, geſtaltet ſeyn, ſo läſt ſich doch auf folgende Art überhaupt, und im allgemeinen beurtheilen, unter was für einer Geſtalt ein Körper von gegebener Geſtalt und Gröſſe dem Auge erſcheinen werde, wenn ſeine Lage in Anſehung der Geſichts-Axe, und ſeine Entfernung vom Auge bekannt iſt.

36. §.

Jede Ebene durch die Geſichtsaxe wird den Körper in einer gewiſſen gebrochenen oder krummen Linie ſchneiden, nachdem derſelbe entweder ebene Seitenflächen hat, oder von einer krummen Fläche begränzt wird. Jede dieſer Durchſchnittslinien, wird dem Auge unter einem gewiſſen optiſchen Winkel erſcheinen, wie DMC (14 Fig.) und, nachdem dieſe optiſchen Winkel kleiner oder gröſſer ausfallen, nachdem wird auch der Körper ſelbſt weniger oder mehr
14 F. Ausdehnung zu haben ſcheinen. Weil es nun allemahl eine gewiſſe Entfernung OD vom Auge giebt, wobey eine ſolche Linie, wie CMDNE grade, wie ADB erſcheint, ſo erhellet, daß jeder Körper, er ſey übrigens, wie er wolle geſtaltet, in einer gewiſſen Entfernung vom Auge platt, und wie eine ebene Figur erſcheine. Man ſtelle ſich unter AB eine Ebene vor, welche die Geſichtsaxe OD ſenkrecht ſchneidet. Von allen Puncten der ſichtbaren Grenze der dem Auge zugekehrten Vorderfläche des Körpers ſtelle man ſich grade Linien, wie CA, EB, auf der Ebene AB ſenkrecht vor; ſo werden alle Puncte, wie A, B, auf dieſer Ebene AB in dem Umfange einer ebenen Figur liegen, und der Körper ſelbſt wird in der angenommenen Entfernung vom Auge demſelben eben ſo, wie dieſe ebene Figur erſcheinen.

37 §.

37. §.

Demnach erſcheint jede Kugel dem Auge wie ein Kreis, oder eine Scheibe, auf deren Ebene die Geſichtsaxe im Mittelpunct ſenkrecht iſt. Wenn die Geſichtsaxe auf der Axe eines graden Cylinders, oder eines graden Kegels in ihrer Mitte ſenkrecht iſt, ſo erſcheinen beyde Körper platt, jener wie ein Rechteck, dieſer wie ein Dreyeck. Es werden nemlich die kreisförmigen Grundflächen dem Auge auch wie grade Linien erſcheinen, weil bey der angenommenen Lage derſelben gegen die Geſichtsaxe die Ebenen der Grundflächen beynahe durchs Auge gehen, es müſten denn die Körper ſehr hoch ſeyn. Man ſiehet leicht, daß unter eben den Umſtänden, wenn die Geſichtsaxe mitten durch ein grades Priſma, oder eine Pyramide geht, und mit den Grundflächen parallel iſt, das Priſma wie ein Rechteck, die Pyramide wie ein Dreyeck erſcheinen werde. In ſo groſſer Entfernung unterſcheidet demnach das Auge ein Priſma nicht vom Cylinder, eine Pyramide nicht vom Kegel. Gewöhnlich drückt man ſich hierüber ſo aus: daß man ſagt, ein Priſma erſcheine in groſſer Entfernung wie ein Cylinder, eine Pyramide, wie ein Kegel, und überhaupt, erſcheine jeder eckigter Körper rund, wenn er ſo weit entfernt ſey, daß das Auge die Ecken nicht mehr unterſcheiden könne. In der That aber erſcheinen alle Körper in der Ferne platt oder eben; wenn wir aber aus andern Gründen wiſſen, daß dergleichen platt ſcheinende Gegenſtände würkliche Körper ſind, ſo geben wir ihnen nur in unſrer Einbildung eine körperliche Ausdehnung; und ſo halten wir eine platt ſcheinende Pyramide für einen

Kegel, ein platt ſcheinendes Prisma für einen Cylinder.

38 §.

Ja bey einer genauern Aufmerkſamkeit auf dasjenige, was beym Sehen vorgehet, würde man ſich leicht überzeugen, daß eigentlich alle Körper dem Auge platt erſcheinen, und daß wir nur durchs Geſicht mit dem Gefühl verbunden Begriffe von körperlichen Figuren bekommen haben. Mit den Empfindungen, die wir durchs Geſicht bekommen haben, ſtellt uns die Einbildungskraft zugleich dasjenige vor, was uns auch ſonſt das Gefühl von eben dem Gegenſtande gelehret hat, und ſo fällt uns die körperliche Ausdehnung des Gegenſtandes bey, wenn uns gleich das Geſicht denſelben nur wie eine Fläche dar-
16 F. ſtellet. Es ſey GHIK eine Ebene, welche die Strahlenpyramide OBDEF ſchneidet, und BDFE ſey ein Körper, von was für Geſtalt man will. Nun wird jeder Strahl, der von einem Punct der dem Auge zugekehrten Vorderfläche des Körpers ins Auge kommt, wie BO, die Ebene GHIK in irgend einem Punct *b* durchbohren, und die Durchſchnittspuncte aller übrigen Strahlen werden auf dieſer Ebene den Raum einer ebenen Figur *bdef* einnehmen, die das Auge O völlig eben ſo rührt, wie der Körper BDEF. Aus dem 10. 11. und 12 §. weis man ſchon, daß jeder Lichtſtrahl das Bild desjenigen Puncts eines ſichtbaren Gegenſtandes, wovon er ausgehet, mit ſich führe. Dieſemnach ſtelle man ſich vor, daß jeder Strahl BO indem er durch die Ebene GHIK durchgehet, in *b* den Punct B abbilde; ſo wird das Auge noch eben ſo gerührt werden, wenn gleich der Punct B weg wäre, das Bild davon *b* aber auf der

Ebene GHIK bliebe. Weil es nun mit allen übrigen Strahlen in der optiſchen Pyramide OBDFE eben die Bewandniß hat, ſo ſiehet man wohl, daß die *ganze* Durchſchnittsfigur *bdfe* der optiſchen Pyramide mit der Ebene GHIK das Auge noch eben ſo rühren würde, wenn gleich der Körper BDFE weggenommen würde, vorausgeſetzt, daß die Bilder aller Puncte der dem Auge zugekehrten Fläche des Körpers auf der Ebene GHIK zurückbleiben.

39. §.

Weil es in Abſicht auf die Empfindung, die das Auge bekommt, gleichgültig iſt, in welchem Punct der Linie OB ſich das Punct B, oder das Bild deſſelben *b* befindet, ſo ergiebt ſich daraus, daß wir eigentlich nicht unmittelbar durchs Geſicht die Entfernungen der um uns her befindlichen Gegenſtände vom Auge wahrnehmen. Auch bey dem Urtheil über die Entfernungen ſichtbarer Gegenſtände von uns miſchen ſich die Vorſtellungen ein, die wir ſonſt durchs Gefühl bekommen haben. Es iſt uns von Jugend auf gleichſam natürlich geweſen, in allen ſolchen Fällen, wo das Geſicht allein uns von der Beſchaffenheit eines Gegenſtandes nicht völlig unterrichten würde, das Gefühl zu Hülfe zu nehmen; wir haben beyde Sinne beſtändig zugleich gebraucht, und wenn nun ein Körper einen dieſer beyden Sinne allein rührt, ſo verbindet unſre Einbildungskraft zugleich mit jener Empfindung eben die Vorſtellung davon, die wir ſonſt durch den andern Sinn bekommen haben.

40 §.

Was in den beyden letzten §§. iſt behauptet worden, ſcheinet etwas unerwartetes zu haben, und deswegen wird es der Mühe werth ſeyn, einige Erfahrungen anzuführen, die ſolches beſtättigen. Herr Cheſelden hat in den Philoſophical Transactions N. 402. eine merkwürdige Nachricht von einem jungen Menſchen gegeben, dem im 12ten Jahr ſeines Alters der Staar geſtochen worden, wovon man auch im 55 Stück des Schwätzers eine Nachricht findet. Hrn. Cheſeldens eigene Erzählung hat Hr. Robert Smith im vollſtändigen Lehrbegrif der Optik mitgetheilt, und ich will ſie hier aus der bekannten Kaeſtneriſchen Ueberſetzung 133 §. 40 S. entlehnen. „Als er (der vom Staar befreyete junge Menſch) zuerſt ſahe, wuſte er ſo wenig von Entfernungen zu urtheilen, daß er ſich einbildete, alle Sachen, die er ſähe, berührten ſeine Augen, wie das, was er fühlte, ſeine Haut. Keine Sachen waren ihm ſo angenehm, als glatte und ordentliche, ob er wohl von ihrer Geſtalt nicht urtheilen, noch errathen konnte, was ihm in einer Sache gefiele. Er kannte von keiner Sache die Geſtalt, er unterſchied auch keine Sache von der andern, ſie mogte eine noch ſo verſchiedene Geſtalt und Gröſſe haben; ſondern wenn man ihm ſagte, was das für Sachen wären, die er zuvor durchs Gefühl gekannt hatte, betrachtete er ſie ſehr aufmerkſam, um ſie wieder zu kennen — — Wir glaubten er verſtünde ſogleich, was die Gemählde vorſtellten, die wir ihm zeigten, aber wir fanden, daß wir uns geirret hatten: denn etwa zween Monathe nachdem ihm der Staar war geſtochen worden, machte er plötzlich die Entdeckung, daß ſie Körper,

Erhöhungen und Vertiefungen vorſtellten. Er hatte ſie bis dahin nur als buntſcheckigte Flächen angeſehen; aber auch alsdenn war er nicht wenig erſtaunt, daß ſich die Gemählde nicht anfühlten, wie ſie ausſahen, und die Theile, welche durch ihr Licht und Schatten rauch und uneben ausſahen, ſich glatt, wie die übrigen anfühlten. Er fragte, welcher von ſeinen Sinnen der Betrüger wäre, das Geſicht, oder das Gefühl."

In einem Aufſatze, den Hr. Cheſelden ſelbſt hat drucken laſſen, verſichert derſelbe, er habe verſchiedenen andern zum Geſicht verholfen, die ſich nie erinnert, daß ſie je geſehen hätten, und ſie hätten alle die Art, wie ſie ſehen lernten, eben ſo wie jener junge Menſch, obwohl nicht ſo ſehr umſtändlich, berichtet.

41. §.

Aus dieſem allen wird es begreiflich, wie es möglich ſey, eine körperliche Sache, z. E. einen Würfel, eine Pyramide, ja eine Menge vieler von einander entfernter Gegenſtände, z. E. eine Allee von Bäumen, auf einer ebenen Fläche ſo abzubilden, daß es dem Auge, wenn es nur gegen dieſe Ebene die rechte Stellung hat, eben ſo vorkommt, als wenn es einen würklichen Körper, oder auch deren mehrere in ihren verſchiedenen Lagen und Entfernungen von einander betrachtete. Auf demjenigen, was im 38 §. vorgetragen iſt, beruhen die Regeln, ſolche Zeichnungen zu entwerfen. Man hat aber ſchon lange die ganze Theorie hievon, nebſt den Regeln dieſe Theorie auf vorkommende Fälle anzuwenden,

von der Optik abgeſondert, und unter dem Nahmen der Perſpectiv als eine beſondre Wiſſenſchaft abgehandelt, die auch hier nach der Optik folgen wird.

Der IV. Abſchnitt.

Von der ſcheinbaren Lage entfernter Gegenſtände gegen einander, und der Parallaxe.

42. §.

Daß die Erſcheinung der Lage mehrerer Gegenſtände gegen einander ſowohl, als auch die Erſcheinung ihrer Bewegung, auſſer andern dabey mit in Erwägung zu ziehenden Umſtänden, vornemlich auch auf den Seherwinkel ankomme, unter welchem das Auge ihre Entfernungen von einander und von andern bekannten Gegenſtänden wahrnehmen kann, iſt aus dem bisherigen leicht abzunehmen. Wir ſind nicht im Stande, den abſoluten Ort einer Sache anzugeben, oder die Frage zu beantworten: wo eine Sache ſey? wofern wir nicht vorausſetzen, daß denjenigen, der uns frägt, ein oder andrer Ort bekannt ſey, wo ſich ihm bekannte Sachen befinden; alsdenn bezeichnen wir ihm den ihm noch nicht bekannten Ort dadurch, daß wir ſeine Lage gegen die bekannten Oerter anzeigen. Eben ſo ſuchen wir uns ſelbſt mit der Lage uns noch unbekannter Oerter

bekannt zu machen, indem wir ſie mit andern uns bekannten Stellen vergleichen. Wie man ſich hiebey nach Anleitung der Geometrie zu verhalten hat, iſt bereits im 9. 10. 16 §. der Mechanik gewieſen worden, und man macht davon leicht die gehörige Anwendung, wenn man hier nur beſonders noch auf den ſchon bekannten Umſtand Rückſicht nimmt: daß wir die Lage der Gegenſtände gegen einander nach dem optiſchen Winkel ſchätzen, unter welchem das Auge ihre Entfernungen von einander und von bekannten Gränzen des Raums, worin ſich das Auge befindet, wahrnimmt.

43. §.

Wenn ſich unſer Auge O mit mehrern ſichtba- 17 F.
ren Gegenſtänden A, B, C, D, in einerley Ebene befindet, ſo iſt die Stelle des Auges O ſelbſt für eine bekannte Stelle zu halten. Iſt überdem in eben der Ebene noch irgend ein anderer Punct A bekannt, ſo iſt auch die Lage der graden Linie OA bekannt. Nun iſt AOB die ſcheinbare Entfernung des Puncts B von dem bekannten Punct A, BOC iſt die ſcheinbare Entfernung der Puncte B und C von einander, u. ſ. f. Stünde das Auge in einem andern Punct ω derſelben graden Linie AO, ſo wäre AωB die ſcheinbare Entfernung des Puncts B von A, und beyde ſcheinbare Entfernungen wären um den Winkel OBω verſchieden. Aus den bekannten ſcheinbaren Entfernungen, nebſt der bekannten wahren Entfernung beyder Stellen des Auges von einander, laſſen ſich die wahren Entfernungen OB und ωB trigonometriſch finden, und man hat $\frac{\sin OB\omega}{\sin AOB} = \frac{O\omega}{B\omega}$.

Der

Der Unterſcheid beyder ſcheinbaren Entfernungen, oder der Winkel OBω heiſt die **Parallaxe**, und die eben angeführte Gleichung ergiebt, wie die Parallaxe von der Entfernung ωB abhängt, wenn Oω einerley bleibt.

Je gröſſer die Entfernung OB oder ωB des Objects vom Auge in Vergleichung mit dem Abſtand Oω beyder Stellen des Auges iſt, deſto kleiner iſt die Parallaxe, und ſie würde gar verſchwinden, wenn OB in Vergleichung mit Oω unendlich groß wäre.

44 §.

Alle ſichtbare Puncte in dieſer Ebene, die ſo weit von den Stellen O und ω entfernt ſind, daß ſie keine merkliche Parallaxe haben, werden alſo dem Auge in einerley Kreiſe zu ſtehen ſcheinen, es mag ſich in einer Stelle zwiſchen O und ω befinden, wo es wolle. Man ſtelle ſich einen Kreis um O mit einem ſolchen Halbmeſſer OG beſchrieben vor, der in Vergleichung mit Oω unendlich groß iſt: man nehme auch an, B ſey ſo weit vom Auge entfernt, daß es dieſe Entfernung nicht ſchätzen kann, ſo ſcheint B in G zu ſtehen, wenn das Auge in O iſt, in H aber, wenn das Auge ſich in ω befindet. Iſt nun auch OG noch in Vergleichung mit OB unendlich groß; ſo kann der Bogen GH als das Maaß der Parallaxe HBG = OBω betrachtet werden, und deswegen heiſt auch wohl dieſer Bogen die **Parallaxe**.

45 §.

Wer in der Geometrie und Trigonometrie geübt iſt, wird leicht im Stande ſeyn, aus demjenigen, was hier von der Parallaxe geſagt iſt, eine

Men-

Menge von Folgen herzuleiten, welche die ſcheinbare Lage mehrerer Gegenſtände gegen einander betreffen. In den aſtronomiſchen Wiſſenſchaften finden dieſe Lehren ihre häufige Anwendung, und ſind vorzüglich intereſſant, wenn man daſelbſt aus der ſcheinbaren Lage der groſſen Weltkörper gegen einander ihre wahre Lage für eben den Zeitpunct herleiten will, oder auch umgekehrt aus ihrer bekannten wahren Lage gegen einander ihre ſcheinbare Lage. Es iſt genug, daß hier die Gründe dieſer Unterſuchungen vorgetragen werden, die weitere Ausführung bleibt den aſtronomiſchen Wiſſenſchaften ſelbſt vorbehalten. Einige beſondre hieher gehörige Sätze müſſen indeſſen noch angemerkt werden, die ſolche Fälle betreffen, wo ein ſichtbarer Gegenſtand durch einen andern undurchſichtigen Körper entweder ganz, oder zum Theil, bedeckt, oder vielmehr dem Geſicht entzogen wird.

46 §.

Zwey Puncte B und C, die mit dem Auge O in grader Linie liegen, können nicht beyde zugleich geſehen werden, wenn der nähere B undurchſichtig iſt. (4 §.) Das Auge ſiehet nur den nähern Punct B. Aendert das Auge ſeine Stelle, jedoch ſo, daß es immer in der graden Linie AO bleibt, die mit beyden Puncten B und C in einerley Ebene liegt; ſo werden beyde Puncte wieder ſichtbar: vorhin waren ihre ſcheinbaren Entfernungen von dem bekannten Punct A gleich groß, jetzt werden ſie wieder ungleich; und wenn gleich beyde Puncte B und C an ihren Stellen bleiben, ſo ſcheinen ſie ſich doch von einander zu entfernen, wenn das Auge in der Linie AO ſeine Stelle ändert. Der nähere Punct B ſcheint ſich von 18 F.

C zu entfernen nach einer Richtung, die derjenigen entgegen geſetzt iſt, nach welcher ſich das Auge bewegt. Der entferntere Punct C aber ſcheint vom nähern B wegzurücken nach eben der Richtung, nach welcher ſich das Auge bewegt. Die ſcheinbare Entfernung beyder Puncte, wenn das Auge in ω ſteht, iſt der Winkel $B\omega C = OB\omega - OC\omega$, oder die Differenz der Parallaxen dieſer beyden Puncte.

47. §.

Wenn C ein Punct auf der Oberfläche eines körperlichen Gegenſtandes L iſt, der dem Auge unter einem nicht ganz unbeträchtlichen Sehewinkel erſcheint, ſo wird B immer andre und andre Puncte der Oberfläche jenes Gegenſtandes zu bedecken ſcheinen, wenn das Auge ſeine Stelle ändert. Sind C und D die beyden äuſſerſten in der Ebene $OB\omega$ liegenden Puncte auf der Oberfläche des Gegenſtandes L, ſo wird B über L wegzugehen ſcheinen, wenn O nach ω rückt, aber nur ſo lange auf der Oberfläche des Gegenſtandes L in einem Punct, wie *b* geſehen werden, bis der Unterſcheid der Parallaxen beyder Puncte B und C dem ſcheinbaren Durchmeſſer des Gegenſtandes L gleich wird.

Je gröſſer der Unterſcheid BC der Entfernungen BO und CO der Puncte B und C vom Auge O iſt, deſto merklicher wird ſich B auf L zu bewegen ſcheinen, wenn das Auge O ſeine Stelle ändert und zwar allemahl auf eine der Bewegung des Auges entgegen geſetzte Art; je kleiner aber BC iſt, oder je näher B dem Punct C liegt, deſto weniger wird B ſeine Stelle auf L zu ändern ſcheinen, wenn O ſeine Stelle ändert. Wäre alſo B ſelbſt auf der Oberfläche des

Gegen-

Gegenſtandes L befindlich, wie wenn es etwa ein Flecken oder ſonſt eine kenntliche Stelle wäre, ſo müſte auch dieſer Flecken, oder was es auch ſonſt für ein kenntlicher Punct iſt, auf L unbeweglich ſcheinen, wenn gleich das Auge nicht unbeweglich an einer Stelle bliebe.

Wäre B kein bloſſer Punct, ſondern ein ſichtbarer Gegenſtand von einer merklichen ſcheinbaren Gröſſe; ſo würde daſſelbe von jedem dem Auge ſichtbaren Punct deſſelben gelten, was bisher von B als einem einzelnen Punct betrachtet, iſt geſagt worden.

47 §.

Stellet man ſich CD als einen durchſichtigen Körper vor, und B hinter demſelben, weiter vom Auge O entfernt; ſo wird B in *b* zu ſtehen ſcheinen, wenn das Auge in ω iſt, aber nach β mit dem Auge nach einerley Richtung fortzurücken ſcheinen, wenn lezteres von ω nach *o* rückt. Der Winkel CωB iſt auch hier dem 46 §. gemäß der Unterſcheid der Parallaxen OCω und OBω, mithin die ſcheinbare Verrückung der Stelle, die B auf CD einzunehmen ſcheint, deſto merklicher auch nur bey einer geringen Bewegung des Auges, je gröſſer der Unterſcheid der Entfernungen, der Puncte *b* und B vom Auge iſt. Vergleicht man dieſen Erfolg mit demjenigen, welcher im vorigen §. iſt betrachtet worden, ſo flieſſen daraus folgende Regeln, nach welchen ſich beurtheilen läſt, ob ein Punct B, oder auch wenn man will, ein Gegenſtand von merklicher ſcheinbaren Gröſſe, der auf einer durchſichtigen Fläche CD eine Stelle einzunehmen ſcheint, würklich auf dieſer Fläche befindlich ſey, oder nicht. 19 F.

Man ändre die Stelle des Auges, und gebe acht, ob der Gegenſtand B immer einerley Stelle auf CD einzunehmen ſcheint: wenn dies erfolgt, ſo iſt man verſichert, daß B würklich in der Fläche CD liege. Wofern aber B allemahl nach einer der Bewegung des Anges entgegengeſetzten Richtung fortzurücken ſcheint, ſo iſt B zwiſchen CD und dem Auge befindlich; und in dem Fall wenn B mit dem Auge nach einerley Richtung fortzurücken ſcheint, iſt man verſichert, daß B auf jener Seite von CD befindlich ſey, und CD zwiſchen B und dem Auge liege.

Wenn die Entfernungen OC und OB ſehr groß ſind, ſo muß Oω auch ſehr groß ſeyn, wofern nicht beyde Parallaxen, mithin auch BωC ſehr klein ausfallen ſoll. Wenn BωC nicht über $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ Minute ausmachte, ſo würde noch keine Aenderung der Stelle C des Gegenſtandes B auf CD merklich ſeyn, wenn gleich das Auge ſeine Stelle änderte (20 §.). Will man alſo die erſte Regel mit Sicherheit anwenden, ſo muß man verſichert ſeyn, daß die Entfernungen OC und OB in Vergleichung mit Oω nicht ſehr groß ſind, damit nicht allein die Parallaxen ſelbſt, ſondern auch ihr Unterſcheid, nicht zu klein ausfallen.

Der

Der V. Abſchnitt.

Von der ſcheinbaren Bewegung.

49 §.

Es ſey M ein ſichtbarer Punct, der ſich in einer 20 F. Ebene, worin auch das Auge O liegt, durch einen graden oder krummen Weg von B nach M wie man will bewegt, und A ſey ein bekannter Punct in dieſer Ebene; ſo wird das Auge von der Bewegung des Puncts M nicht anders urtheilen können, als in wie ferne derſelbe ſeine ſcheinbare Entfernung von dem Punct A ändert, d. i. in wieferne der Winkel AOM Aenderungen leidet. Man kann ſich vorſtellen, daß die Geſichtslinie OM ſich zugleich mit um O drehe, indem M in ſeiner Bahn fortrückt, und ſo wird das Auge O die Geſchwindigkeit der Bewegung des Puncts M aus der Winkelgeſchwindigkeit der Geſichtslinie OM (138 §. Mech.) beurtheilen. Man könnte dieſes gar füglich die optiſche Geſchwindigkeit des Puncts M nennen, die alſo $= \frac{d\varphi}{dt}$ ſeyn wird, wenn φ der Winkel iſt, um welchen ſich OM in der Zeit t um O gedrehet hat. Setzt man OM $= z$, ſo iſt $\frac{dz}{dt}$ die wahre Geſchwindigkeit, womit ſich M in dieſem Augenblick von O entfernt. Um für jeden Augenblick die Stelle des Puncts M anzu-

anzugeben, müſte man zwo Gleichungen, eine zwiſchen t und φ, eine andre zwiſchen t und z haben, um für jede Zeit t nicht allein die Gröſſe des Winkels AOM, ſondern zugleich die Gröſſe der Entfernung OM zu finden. Optiſch betrachtet, wenn es nur darauf ankäme zu wiſſen, wohin das Auge in der Ebene AOB gerichtet werden müſte, um M ſogleich für jede gegebene Zeit zu finden, wäre eine Gleichung zwiſchen t und φ allein hinlänglich.

50 §.

20 F. Wäre N noch ein andrer Punct in derſelben Ebene, welcher in der Zeit t von C nach N, durch welchen Weg man will fortrückt; ſo würde das Auge O die Bewegung deſſelben eben ſo aus der Aenderung des Winkels AON beurtheilen. Hat ſich die Geſichtslinie ON in der Zeit t um den Winkel ψ gedrehet, und man hat eine Gleichung zwiſchen t und ψ, ſo iſt $\frac{d\psi}{dt}$ die optiſche Geſchwindigkeit des Puncts N am Ende der Zeit t. Aus der Aenderung des Winkels MON, den beyde Geſichtslinien einſchlieſſen, wird nun auch das Auge die relative Bewegung der Puncte M und N gegen einander beurtheilen. Wächſt der Winkel AON nicht ſo ſchnell als AOM, ſo wird es dem Auge ſo vorkommen, als ob ſich M ſchneller als N bewegte, wenn gleich der Punct N in ſeiner Bahn CN gröſſere Wege zurück legt, als M in ſeiner Bahn BM in eben den Zeittheilen durchläuft.

51 §.

Wenn wir mit einer Menge von Gegenſtänden umgeben ſind, die ſich mit uns ſelbſt insgeſammt

auf einerley Art beſtändig nach parallelen Richtungen, und mit einerley Geſchwindigkeit bewegen; ſo kann es ſeyn, daß wir uns unſrer eigenen Bewegung gar nicht bewuſt ſind. Dieſe Bewegung wird uns deswegen nicht bemerklich, weil alle Gegenſtände, womit wir uns umgeben ſehen, einerley Lage ſowohl gegen einander, als auch gegen uns ſelbſt behalten. Wer jemals in einem etwas groſſen Fahrzeuge bey ſonſt ſtillen Wetter auf dem Waſſer gefahren iſt, und wenn er ſich auch nur auf einer Fähre hätte über einen Fluß ſetzen laſſen, der wird hievon ſchon eine Probe gehabt haben. Richtet man die Augen nur auf die mit auf dem Schiff befindlichen Perſonen oder andre Sachen, ſo merkt man es wenig oder gar nicht, daß man aus der Stelle kommt. Siehet man aber das Ufer des Fluſſes an, ſo ſcheint es nicht anders, als wenn alle daſelbſt befindliche Gegenſtände in Bewegung wären, und zwar nach einer der Bewegung des Schifs entgegen geſetzten Richtung. Aus dem XII Abſchn. der Mechanik kennet man ſchon die Eigenſchaften einer ſolchen relativen Bewegung ruhender ſowohl als auch ſolcher Gegenſtände, die ſelbſt in Bewegung ſind, in Anſehung des Auges, welches ſeine eigene Bewegung nicht merkt. Für daſſelbe iſt nur die relative Bewegung eines jeden andern Gegenſtandes bemerklich, und dieſe relative Bewegung heiſt eben deswegen in ſolchen Fällen eine ſcheinbare Bewegung für das Auge des Beobachters, der ſich ſeiner eigenen Bewegung nicht bewuſt iſt.

52 §.

Es ſey das Auge O ſolchergeſtalt in Bewegung, 21 F. und rücke von O nach ω in der Zeit, da ein andrer

ſichtbarer Gegenſtand von B nach M rückt; ſo läſt ſich die relative oder ſcheinbare Bahn des Puncts B in Anſehung des Auges O nach dem 192 §. Mech. durch Zeichnung finden. Wenn nemlich in der Zeit *t* das Auge den Weg Oω, der Punct B aber den Weg BM zurück gelegt hat, und man ziehet ωM, durch O aber O*n* = und ♯ ωM, ſo iſt *n* der ſcheinbare oder relative Ort des Puncts B in Anſehung des Auges O. Auf dieſe Art laſſen ſich ſoviele Puncte der ſcheinbaren Bahn B*n* des Puncts B in Anſehung des Auges O finden, als man verlangt. Indeſſen beurtheilet auch hier das Auge das Stück B*n* der ſcheinbaren Bahn, ſo der Punct B zurückgeleget hat, aus der Gröſſe des optiſchen Winkels BO*n*, unter welchem es dieſen zurückgelegten Weg wahrnimmt. Es ſey A ein ſo weit entlegener Punct, daß derſelbe gar keine Parallaxe hat, das Auge mag ſich in ſeiner Bahn befinden, wo es wolle; ſo iſt OA eine Linie, die in der Ebene, worin ſich das Auge nebſt dem Punct B bewegt, eine bekannte Lage hat. Wenn man nun im Stande iſt, für jede gegebene Zeit *t* den Winkel AO*n* nebſt der Entfernung O*n* anzugeben, ſo kennet man die ſcheinbare Bewegung des Puncts B: das Auge wird nemlich von der Bewegung des Puncts B hauptſächlich aus der Aenderung des Winkels AO*n* urtheilen, und wenn B ein Gegenſtand von einer merklichen ſcheinbaren Gröſſe iſt, ſo wird es die Aenderung der Entfernung O*n* nur aus der Aenderung der ſcheinbaren Gröſſe des Gegenſtandes B ſchlieſſen.

53 §.

21 F. Läſt man *np* auf AO ſenkrecht fallen, ſo iſt die ſcheinbare Bewegung des Puncts B bekannt, wenn

für

für jede Zeit t die Gröſſe der Coordinaten Op und pN angegeben werden kann. Aus dem 191 §. Mech. weis man, wie Op und pn für jede gegebene Zeit t gefunden werden können, wenn alle die Stücke gegeben ſind, welche erfordert werden, die wahre Bewegung ſowohl des Auges O als auch des Puncts B in Anſehung zweyer mit Op und pn paralleler Axen CV und CS zu finden, ſo daß man CP und Pω imgleichen CQ und QM für jede Zeit t angeben könnte. Man weiß, daß Op = ωH = CQ − CP, und pn = HM = QM − Pω ſey. Setzt man nun Pp = x, $pn = y$, ſo hat man $\tan \mathrm{AO}n = -\frac{y}{x}$, und O$n$ $= \sqrt{(x^2+y^2)}$; ſolchemnach iſt nicht allein AOn, ſondern auch On als eine Function von t bekannt.

54 §.

Wenn das Auge O ruhet, wie im 49 §. der Punct B aber während ſeiner Bewegung nicht beſtändig in einerley Ebene bleibt, ſo weis man, daß für jeden Augenblick die Lage des Puncts M durch drey rechtwinklichte Coordinaten beſtimmet werden könne, wenn die Lage dreyer Axen OV, OS, OR bekannt iſt, die ſich in O rechtwinklicht ſchneiden. Aus M ſey MQ auf die Ebene SOV ſenkrecht gezogen, und QP auf OV ſenkrecht; ſo iſt die Bewegung des Puncts M bekannt, wenn für jede Zeit t die drey Coordinaten OP, PQ, QM bekannt ſind. Man kann ſich nun eine gedoppelte Bewegung der Geſichtslinie OM vorſtellen, die eine vermöge der ſich der Winkel MOQ ändert, und die andre, vermöge welcher der Winkel AOQ geändert wird, indem ſich die 22 F.

Ebene MOQ um die Axe OR umdrehet. Aus den Aenderungen dieſer Winkel wird das Auge die Bewegung des Puncts M beurtheilen, und wenn man für jede Zeit t die Winkel AOQ, QOM, nebſt der Entfernung OM kennet, ſo iſt ebenfals die Bewegung des Puncts M bekannt, und dies insbeſondre ſo, wie ſie das Auge eigentlich wahrnehmen kann. Hier hat man nun $\tang AOQ = -\frac{PQ}{OP}$, $\tang MOQ = \frac{MQ}{OQ}$, und $OM = \sqrt{(OP^2 + PQ^2 + QM^2)}$. Sind alſo die drey rechtwinklichten Coordinaten für jede Zeit t bekannt, ſo laſſen ſich auch die Winkel AOQ, QOM nebſt der Entfernung OM für jede Zeit t angeben.

Wäre das Auge ſelbſt in Bewegung, geſetzt daß es auch nicht immer in einerley Ebene bliebe; ſo würde die relative Bewegung deſſelben ebenfals nach den Gründen des 191 §. der Mech. geſucht werden müſſen. Man muß nemlich eine Ebene wie APQ annehmen, die durchs Auge O geht, und beſtändig mit einer Ebene von bekannter Lage parallel bleibt, wo ſich auch das Auge in ſeiner Bahn befindet: alsdenn läſt ſich jede Stelle M des Puncts B in ſeiner relativen Bahn durch drey rechtwinklichte Coordinaten AP, PQ, QM beſtimmen, die für jede Zeit t bekannt ſeyn müſſen, um die relative Bewegung des Puncts M oder B gegen O vollſtändig zu kennen. Alsdenn laſſen ſich die Winkel AOQ, QOM, nebſt der Entfernung OM eben ſo finden, wie in dem Fall, wenn das Auge ruhete, und der

Punct

Punct B allein in Bewegung wäre. Anwendungen hievon zu machen gehört eigentlich nicht für die Optik, ſondern für die Mechanik und Aſtronomie.

Der VI. Abſchnitt.

Von den Erſcheinungen, welche die allmählige Fortpflanzung des Lichts verurſachet.

55 §.

Die Vorſtellung, daß das Licht von jedem leuchtenden Punct nach allen Seiten in graden Linien ausgehe, (§. 5.) leitet natürlich auf die Gedanken, es werde einige Zeit verflieſſen, indem das Licht, welches in dieſem Augenblick von einem leuchtenden Punct ausgehet, einen Weg von beträchtlicher Gröſſe zurückleget. Das Licht mag eine beſondre von dem leuchtenden Punct ausflieſſende Materie ſeyn, oder der leuchtende Punct mag nur in einer andern durch den ganzen erleuchteten Raum ausgebreiteten Materie gewiſſe Veränderungen ununterbrochen zuwege bringen, dadurch unſer Auge ſo gerührt wird, als geſchehen muß, wenn wir das empfinden ſollen, was wir Klarheit des leuchtenden Puncts nennen: ſo wird man doch auf die Vorſtellung gerathen können, es vergehe auch im letzten Fall Zeit, wenn eine ſolche Veränderung ſich durch eine groſſe Entfernung

fernung fortpflanzen ſoll. Ob dieſer Gedanke gegründet ſey, das müſſen regelmäßig angeſtellte Beobachtungen und Verſuche entſcheiden.

56 §.

Das, was wir den Schall nennen, könnte vielleicht für das Ohr etwas ähnliches ſeyn, was das Licht für das Auge iſt, und man überzeugt ſich leicht durch bekannte Erfahrungen, daß der Schall Zeit braucht, von einem Ort zum andern zu kommen. Aber eben die Erfahrungen beweiſen es auch, daß das Licht ſich ſehr viel ſchneller als der Schall fortpflanze. Wenn ein Geſchütz losgebrannt wird, ſo ſieht man den Blitz und hört den Knall des angezündeten Pulvers zugleich, wenn man ſich nahe bey dem Geſchütz befindet. Wofern man aber etwas weit davon entfernt iſt, ſo hört man den Knall merklich ſpäter als man den Blitz ſiehet. Dies beweiſet wenigſtens ſoviel, daß die Geſchwindigkeit des Lichts weit gröſſer, als die Geſchwindigkeit des Schalles ſey, wofern anders dem Licht würklich eine endliche Geſchwindigkeit zugeſchrieben werden kann. Uebrigens iſt es ſo leicht nicht, unter ſolchen Umſtänden leuchtende Körper zu beobachten, als erfordert werden, wenn es mit Sicherheit entſchieden werden ſoll, ob das Licht würklich Zeit brauche von einem Ort zum andern zu kommen, und wie groß eigentlich die Geſchwindigkeit des Lichts ſey?

57 §.

23 F. Es ſey L ein leuchtender Punct, und O das Auge: man nehme an, das Licht bewege ſich gleichförmig mit der Geſchwindigket c, und es ſey die Entfernung

fernung OL $= a$, ſo wird es in der Zeit $t = \frac{a}{c}$ den Weg LO zurück legen. Fienge L in einem gewiſſen Augenblick plötzlich an, zu leuchten, ſo würde der Beobachter O allererſt nach Verlauf der Zeit $t = \frac{a}{c}$ den Punct L zu ſehen anfangen können. Wäre l ein andrer leuchtender Punct ſeine Entfernung vom Auge $= b < a$, und beyde Puncte fiengen in einem Augenblick an zu leuchten; ſo würde der Beobachter in O doch nicht beyde Puncte in einem und eben demſelben Augenblick wahrzunehmen anfangen können. Er würde erſtlich l nach Verlauf der Zeit $\frac{b}{c}$ und nachher allererſt L wahrnehmen können, wenn überdem die Zeit $\frac{a-b}{c}$ verfloſſen wäre. Brauchte das Licht zu ſeiner Fortpflanzung gar keine Zeit, ſo würde das Auge O beyde Puncte in demſelben Augenblick, da ſie zugleich zu leuchten anfangen, auch zugleich wahrnehmen können.

58 §.

Wofern nicht allein das Auge des Beobachters, ſondern auch beyde Puncte L und l völlig in Ruhe ſind, ſo wird die allmählige Fortpflanzung des Lichts in der ſcheinbaren Lage beyder Puncte gegen einander keine Aenderung machen. Der Strahl LO kommt nach derſelben Richtung ins Auge, nach welcher er von dem leuchtenden Punct ausgehet, und eben ſo auch der Strahl lO. Demnach iſt die ſcheinbare Entfernung LOl beyder Puncte von einander eben

eben ſo groß als ſie ſeyn würde, wenn gleich das Licht gar keine Zeit brauchte von L oder l nach O zu kommen, oder wenn es ſich durch jede noch, ſo groſſe Entfernung in einem Augenblick fortpflanzte. Ganz anders würde es ſich verhalten, wenn entweder der Punct L allein, oder das Auge allein, oder alle beyde zugleich in Bewegung wären. Brauchte das Licht gar keine Zeit, von L nach O zu kommen; ſo würde die ſcheinbare Bewegung des Puncts L völlig nach den Grundſätzen des vor. Abſchnitts gefunden werden können, und die ſcheinbare Lage deſſelben gegen O wäre in jedem Augenblick diejenige, welche nach den dort bewieſenen Regeln gefunden wird. Wie ſich aber die ſcheinbare Lage in der Vorausſetzung ändere, daß das Licht Zeit brauche von L nach O zu können, das ſoll nun näher unterſucht werden.

59 §.

24 F. Das Auge O des Beobachters ruhet, aber der Punct L bewegt ſich in der graden Linie CD mit der Geſchwindigkeit v, und das Licht pflanzt ſich mit der Geſchwindigkeit c fort: man ſucht für jede gegebene Zeit t den ſcheinbaren Ort des Puncts L.

Aufl. Es ſey im Anfang der Zeit t der Punct L in C geweſen, und befinde ſich am Ende der Zeit t in L; ſo hat man für jede Zeit t den zurück gelegten Weg CL $= vt$, und wenn man OC $= a$, OCL $= \alpha$ ſetzt, ſo wird

$$\tang COL = \frac{vt \sin\alpha}{a - vt.\cos\alpha},$$

oder

$$\sin COL = \frac{vt.\sin\alpha}{\sqrt{(v^2t^2 - 2avt\cos\alpha + a^2)}}.$$

Aus

dieſer

dieſer Gleichung wäre die ſcheinbare Entfernung COL des Puncts L von C für jede Zeit t bekannt, wenn zur Fortpflanzung des Lichts gar keine Zeit erfordert würde. Weil aber angenommen wird, daß ſich das Licht mit der Geſchwindigkeit c bewegt, mithin L in der Richtung OL noch nicht in demſelben Augenblick geſehen werden kann, da dieſer Punct in L ankommt; ſo wird in dieſem Augenblick ein Strahl VB ins Auge kommen, der ſchon eine Zeitlang vorher, als L noch in V war, aus L in der Richtung $VB \# LO$ mit der Geſchwindigkeit c ausgegangen iſt. Man ſetze $VB = LO = z$, ſo iſt die Zeit $\frac{z}{c}$ nöthig geweſen, bevor dieſer Strahl aus V in B hat anlangen können. Zugleich aber iſt das Licht ſo wie der Punct L ſelbſt mit der Geſchwindigkeit v in der mit VL parallelen Richtung fortgegangen. Wenn alſo der Strahl in O anlangt, ſo trift er das Auge mit beyden Geſchwindigkeiten c und v zugleich; mithin wird das Auge eben ſo gerührt, als wenn der Strahl nach der mittleren Richtung VO daſſelbe träfe. Es empfindet alſo den Punct L in der Richtung OV, und man hat $OL : VL = c : v = \sin OVL$ $\sin VOL$. Von dem Winkel COL, der die Lage der Richtung OL beſtimmt, muß man alſo einen Winkel VOL ſubtrahiren, deſſen Sinus $= \frac{v}{c} \sin OVL$ iſt, um die Lage der Richtung OV zu haben, worin der Punct L jetzt befindlich zu ſeyn ſcheint. Um OVL zu finden, bemerke man, daß $OV : \sin\alpha = a : \sin OVL$ ſey, alſo $\sin OVL = \frac{a \sin\alpha}{\sqrt{(a^2 - 2a.CV.\cos\alpha + CV^2)}}$

Vor-

Vorhin ward OL = z angenommen, mithin die Zeit, welche das Licht zubringt, bevor es von L nach O gelangt $= \frac{z}{c}$; alſo iſt VL $= \frac{vz}{c}$, und CV $= vt - \frac{vz}{c}$. Weil nun $z = \surd(a^2 - 2a.vt \cos\alpha + v^2t^2)$ bekannt iſt, ſo hat man auch CV, und daraus OVL, mithin auch VOL, weil ſin VOL $= \frac{v}{c}$ ſin OVL gefunden iſt.

Würde demnach jetzt der Punct L in der ſcheinbaren Richtung OV beobachtet, ſo müſte man zum Winkel COV, der die Lage der ſcheinbaren Richtung beſtimmt, einen Winkel addiren, deſſen Sinus $= \frac{v}{c}$ ſinOVL um die Lage der Richtung zu haben, worin L ſich jetzt würklich befindet.

60. §.

25 F. Das Auge *O* des Beobachters ruhet, und der Punct *L* bewegt ſich gleichförmig mit der Geſchwindigkeit v in einem Kreiſe um den Mittelpunct *O*, deſſen Halbmeſſer $= r$ iſt; das Licht pflanzt ſich mit der Geſchwindigkeit c fort: man ſucht für jede gegebene Zeit t den ſcheinbaren Ort des Puncts *L*.

Aufl. Im Anfang der Zeit t ſey L in A geweſen, und in der Zeit t durch den Bogen AL $= vt$ fortgerückt; ſo hat die Lage deſſelben ſich um den Winkel AOL $= \frac{vt}{r}$ geändert. Man nehme an,

daß

daß der Punct L jetzt in V erſcheine, da er würklich ſchon in L iſt; ſo hat ſich das Licht durch VO mit einer gedoppelten Bewegung fortgepflanzt. Es ſey nemlich *VT* eine Tangente des Kreiſes, und VT = VL genommen, V*t* aber mit OT parallel gezogen: ſo iſt die Geſchwindigkeit, womit ſich das Licht in jeder Richtung wie V*t* # OT fortgepflanzt $= c$, zugleich aber nimmt dieſer Strahl Theil an der Bewegung des Puncts L, welcher in dieſem Augenblick mit der Geſchwindigkeit v nach der Richtung VT fortgeht. Demnach iſt die Geſchwindigkeit des Lichts in der Richtung VO $= \surd(c^2 - v^2)$, und das Licht langt in der Zeit $\frac{r}{\surd(c^2 - v^2)}$ aus V in O an. Demnach erhält man VL $= \frac{vr}{\surd(c^2 - v^2)}$, und VOL $= \frac{v}{\surd(c^2 - v^2)}$, folglich AOV $=$

$$\frac{vt}{r} - \frac{v}{\surd(c^2 - v^2)}.$$

Dieſe Gleichung giebt $\frac{d.\,\mathrm{AOV}}{dt} = \frac{v}{r}$, alſo iſt die ſcheinbare Winkel-Geſchwindigkeit mit der wahren einerley, und die ſcheinbare Bewegung gleichförmig.

Hätte man aber den Winkel AOV für einen gewiſſen Augenblick aus einer Beobachtung gefunden; ſo müſte man einen Winkel $= \frac{v}{\surd(c^2 - v^2)}$ zuſetzen, um die eigentliche Lage der Richtung OL zu ha-

haben, worin ſich der Punct L jetzt würklich befindet.

Wenn die ganze Umlaufszeit des Puncts L = T geſetzt wird; ſo iſt $T = \frac{2\pi r}{v}$, und $v = \frac{2\pi r}{T}$, alſo der Winkel $VOL = \frac{2\pi r}{T\sqrt{(c^2 - v^2)}}$

$$= \frac{2\pi r}{T\sqrt{\left(c^2 - \frac{4^2\pi^2 r^2}{T^2}\right)}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{(c^2T^2 - 4\pi^2 r^2)}}.$$

Bey einerley Umlaufszeit T iſt alſo VOL deſto gröſſer, je gröſſer r, oder je weiter L von O entfernt iſt.

61. §.

Der Unterſcheid zwiſchen der Richtung worin ein ſichtbarer Punct würde geſehen werden, wenn das Licht gar keine Zeit brauchte ſich durch ſo groſſe Entfernungen, wie man will, fortzupflanzen, von derjenigen Richtung, worin er wegen der allmähligen Fortpflanzung des Lichts würklich geſehen wird, heiſt die Abirrung des Lichts: und die beyden letzten Aufgaben ſind ein Paar leichte Proben geweſen, wie dieſe Abirrung des Lichts gefunden werden könne, wenn ſich ein ſichtbarer Punct in einerley Ebene bewegt, worin auch das Auge liegt. Iſt das Auge ſelbſt in Bewegung, ſo muß man auf dieſe Abirrung des Lichts ebenfals Rückſicht nehmen, wenn die ſcheinbare Bewegung eines andern ſichtbaren Gegenſtandes in Anſehung des Auges gefunden werden ſoll,

ſoll. Es ſoll auch dies durch einige leichte Aufgaben näher erläutert werden.

62 §.

Das Auge O bewegt ſich in der graden 26 F.
Linie AB in der Zeit t von O nach Ω gleichförmig mit der Geſchwindigkeit u; der ſichtbare Punct L aber ruhet: man ſucht die ſcheinbare Bewegung des Puncts L in Anſehung des Auges O.

Aufl. Wofern das Licht zu ſeiner Fortpflanzung gar keine Zeit brauchte, ſo würde die geſuchte ſcheinbare Bewegung ſo gefunden werden. Man nimmt an, gleich im erſten Augenblick der Zeit t ſey ſowohl dem Auge, als auch dem Punct L die Geſchwindigkeit u nach einer der Geſchwindigkeit des Auges grade entgegen geſetzten Richtung mitgetheilet worden: alsdenn würde das Auge in O ruhig bleiben, L aber mit der Geſchwindigkeit u in der Richtung $L\lambda$ ⋕ $O\Omega$ fortgehen. Für den Anfang der Bewegung muß der Winkel AOL oder $\Omega OL = OL\lambda = \alpha$ nebſt der Entfernung $OL = a$ bekannt ſeyn: und wenn am Ende der Zeit t $O\lambda =$ und ⋕ mit ΩL genommen wird, ſo iſt $O\lambda$ die Richtung, worin L geſehen wird, in der Vorausſetzung, daß ſich das Licht plötzlich ohne alle Zeitfolge ausbreite. Weil nun $L\lambda = O\Omega = ut$, ſo findet man tang $LO\lambda =$

$$\frac{ut \sin\alpha}{a - ut \cos\alpha},$$ und ſin $LO\lambda =$

$$\frac{ut \sin\alpha}{\sqrt{(a^2 - 2aut\cos\alpha + u^2t^2)}}.$$ Weil aber der Strahl $L\Omega$ nicht in demſelben Augenblick, da er

von L ausgehet, das Auge erreicht, ſo wird jetzt am Ende der Zeit t ein Strahl $L\Omega$ ins Auge kommen, der ſchon eine Zeitlang vorher mit der Geſchwindigkeit c aus L ausgegangen iſt, mit eben dieſer Geſchwindigkeit wird der Strahl $L\Omega$ zwar das Auge in Ω treffen: weil daſſelbe aber ſelbſt in Bewegung iſt, ſo wird es in Ω eben ſo gerührt, als wenn das Licht mit beyden Geſchwindigkeiten, c in der Richtung $L\Omega$, und ω nach der Richtung $\omega\Omega$ zugleich der Bewegung des Auges entgegen, in daſſelbe würkte. Demnach wird es eben die Empfindung haben, als wenn das Licht in der Diagonale $W\Omega$ des Parallelogramms $L\Omega\omega W$, daſſelbe träfe, und in dieſer Richtung wird demſelben der Punct L am Ende der Zeit t erſcheinen. Demnach ziehe man $OV \# \Omega W$, ſo iſt $VO\lambda = W\Omega L$ die geſuchte Abirrung des Lichts. Weil nun die Winkel $LO\Omega = \alpha = OL\lambda$ und $LO\lambda$ bekannt ſind, ſo iſt auch $O\lambda V$ bekannt, und man hat $\operatorname{tang} VO\lambda = \frac{\Omega\omega \operatorname{ſin} O\lambda V}{\Omega L - \Omega\omega \operatorname{coſ} O\lambda V}$

$$= \frac{u \operatorname{ſin} O\lambda V}{c - u \operatorname{coſ} O\lambda V}.$$

Hätte man den Winkel AOV oder ΩOV aus einer Beobachtung gefunden, ſo wären auch $OV\lambda$ bekannt, und man fände $\operatorname{ſin} VO\lambda = \frac{\Omega\omega}{\Omega L}$

$\operatorname{ſin} \Omega WL$, oder $\operatorname{ſin} VO\lambda = \frac{u}{c} \operatorname{ſin} OV\lambda$.

Die Abirrung des Lichts wird demnach hier aus der bekannten ſcheinbaren Bewegung des Puncts L eben ſo gefunden, wie ſie aus der bekannten wahren

ren Bewegung deſſelben im 59 §. gefunden ward, wenn das Auge ruhete.

63. §.

Das Auge O bewegt ſich im Kreiſe um 27 F.
den Mittelpunct L, worin ein ſichtbarer Punct in Ruhe iſt: man ſucht die ſcheinbare Richtung, worin L geſehen wird, für jede gegebene Zeit t.

Aufl. In der Vorausſetzung, daß das Licht ſich plötzlich durch jede Entfernung fortpflanze, iſt die ſcheinbare Bahn des Puncts L ein Kreis um den Mittelpunct O von eben dem Halbmeſſer LO. Wenn O in der Zeit t den Bogen $O\Omega$ durchlaufen hat, und man ziehet LO, hiernächſt aber $O\lambda =$ und $\#$ $L\Omega$, ſo iſt λ die ſcheinbare Stelle des Puncts L. In Ω aber trift der Lichtſtrahl $L\Omega$ das Auge mit der Geſchwindigkeit c, und weil das Auge in der auf $L\Omega$ ſenkrechten Richtung $\Omega\omega$ fortrückt, ſo nehme man $\Omega\omega : \Omega L = u : c$, und verzeichne das Parallelogramm $\Omega LW\omega$ nebſt der Diagonale ΩW, ſo iſt $W\Omega L$ die Abirrung des Lichts (62 §.) Man ziehe $OV \# \Omega W$, ſo iſt OV die Richtung, worin L zu ſtehen ſcheint. Man hat aber $\tang L\Omega W = \tang$

$$\lambda OV = \frac{\Omega\omega}{\Omega L} = \frac{u}{c},$$

alſo muß von dem Winkel $LO\lambda = \frac{ut}{r}$ ein Winkel abgezogen werden, deſſen Tangente $= \frac{u}{c}$ iſt. Wäre aber der Winkel LOV aus einer Beobachtung bekannt, ſo muß ein

Winkel, deſſen Tangente $= \frac{u}{c}$ iſt, dazu addirt werden, um die Lage OL ♯ ΩL zu haben, worin L jetzt würklich liegt.

64 §.

28 F. Das Auge O bewegt ſich wiederum in einem Kreiſe, deſſen Mittelpunct C iſt; in L befindet ſich ein ſichtbarer Punct, man ſucht die ſcheinbare Stelle deſſelben, vorausgeſetzt, daß die wahre Bewegung des Auges bekannt ſey.

Aufl. Weil die Gröſſe und Lage der Linie CL nebſt dem Halbmeſſer CO der Bahn des Auges als bekannt angenommen wird, überdem aus der bekannten Bewegung des Auges auch für jede Zeit t der Winkel OCΩ bekannt iſt, ſo iſt auch der Winkel CΩL bekannt, als die wahre optiſche Entfernung des Puncts L von C. Man ziehe durch Ω eine Tangente, und nehme $L\Omega : \Omega\omega = c : u$; ſo iſt die Diagonale Ωλ des Parallelogramms LΩωλ die Richtung, worin der Punct L erſcheint, und LΩλ die Abirrung des Lichts. Es ſey $C\Omega L = \varphi$, ſo iſt $\omega\Omega L = 90° - \varphi$, und $\Omega L\lambda = 180° - \omega\Omega L = 90° + \varphi$, alſo $\sin \Omega L\lambda = \cos\varphi$ $\cos \Omega L\lambda = -\sin\varphi$.

Demnach erhält man $\operatorname{tang} L\Omega\lambda = \frac{L\lambda . \cos\varphi}{\Omega L + L\lambda . \sin\varphi}$

$$= \frac{u \cos\varphi}{c - u \sin\varphi}.$$

Die Aufgabe des vor. §. iſt unter der gegenwärtigen, als ein beſondrer Fall enthalten. Wenn

nem-

nemlich L in O liegt, ſo iſt beſtändig $C\Omega L = \varphi = 0$, alſo $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$, mithin $\tang L\Omega\lambda$

$$= \frac{u}{c}.$$

Wenn φ zwiſchen 90° und 270° fällt, ſo bekommt $\cos\varphi$ das entgegen geſetzte Zeichen; demnach vermindert die Abirrung des Lichts in dieſen Fällen den Winkel φ ſo wie ſie ihn in den Fällen, wenn $\varphi < 90°$ iſt, oder zwiſchen 270° und 360° fällt, vermehrt.

In den Fällen, wenn die optiſche Entfernung der Puncte L und C von einander 90° oder 270° beträgt, iſt $\cos\varphi = 0$, mithin erſcheint L in dieſen Fällen in ſeiner wahren Richtung, und die Abirrung der Lichtſtrahlen findet nicht ſtatt.

65 §.

Der ſtrahlende Punkt *L* bewegt ſich in 29 F. der graden Linie *CL* mit der Geſchwindigkeit *v*, das Auge *O* aber in der graden Linie *BO* mit der Geſchwindigkeit *u*, beyde gleichförmig: nach Verlauf der Zeit *t* iſt das Auge in *O*, und der ſtrahlende Punct in *L*, man ſucht die Abirrung des Lichts.

Aufl. Im Anfang der Zeit *t* ſey L in C und O in B geweſen: man ziehe OA ⋕ BC, ſo iſt AOL der Winkel, um welchen L in Anſehung des Auges fortgerückt iſt. Wäre nun das Auge in O beſtändig in Ruhe geweſen; ſo weis man aus dem 59 §., daß L in V erſcheinen würde, wenn man $OL : LV = c : v$ annimmt, und LOV wäre die Abirrung des Lichtſtrahls, die aus der Gleichung $\tang LOV =$

$\frac{v \sin OLV}{c - v \cos OLV}$, oder $\sin LOV = \frac{v}{c} \sin OVL$ gefunden wird. Eigentlich wird nun das Auge in O ſo gerührt, als wenn der Strahl in der Richtung VO mit der Geſchwindigkeit $\frac{VO}{LO} c =$ $\sqrt{(c^2 - 2cv \cos VLO + v^2)}$ das Auge träfe. Weil nun O ſelbſt in der Richtung BO mit der Geſchwindigkeit u fortgeht, ſo nehme man

$\sqrt{(c^2 - 2cv \cos VLO + v^2)} : u = VO : O\omega$,

und verzeichne das Parallelogramm $OV\lambda\omega$, ſo wird vermöge des 62 §. das Auge ſo gerührt, als wenn der Strahl in der Richtung λO das Auge träfe, und man hat tang $VO\lambda =$

$$\frac{u \sin OV\lambda}{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos VLO + v^2)} - u \cos OV\lambda}, \text{ oder}$$

auch $\sin VO\lambda = \frac{u \sin V\lambda O}{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos VLO + v^2)}}$.

Es ſey $LO\omega = \zeta$, $LOV = \omega$, ſo iſt $VO\omega = \zeta + \omega$, und $OV\lambda = 180° - \zeta - \omega$, und es wird tang $VO\lambda$

$$= \frac{u \sin(\zeta + \omega)}{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos VLO + v^2)} + u \cos(\zeta + \omega)}$$

$$= \frac{u \sin\zeta \cos\omega + u \cos\zeta \sin\omega}{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos VLO + v^2)} + u \cos\zeta \cos\omega - u \sin\zeta \sin\omega}$$

$$= \frac{u \sin\zeta + u \cos\zeta \tang\omega}{\frac{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos\eta + v^2)}}{cv \sin\omega} + u \cos\zeta - u \sin\zeta \,\mathrm{tg.}\omega}.$$

Man

Man ſetze VLO $= \eta$, ſo iſt $\tang \omega =$

$$\frac{v \sin \eta}{c - v \cos \eta}, \ \sin \omega = \frac{v \sin \eta}{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos \eta + v^2)}}, \cos \omega$$

$$= \frac{c - v \cos \eta}{\sqrt{(c^2 - 2cv \cos \eta + v^2)}},$$ und daraus findet man $LO\lambda = LOV - VO\lambda = \omega - VO\lambda$. Es wird nemlich $\tang LO\lambda = \frac{\tang \omega - \tang VO\lambda}{1 + \tang \omega \tang VO\lambda}$. Man ſchreibe Kürze halber r ſtatt der Wurzelgröſſe, ſo wird $\tang \omega - \tang VO\lambda =$

$$\frac{r \tang \omega \sec \omega - u \sin \zeta \tang \omega^2 - u \sin \zeta}{r \sec \omega + u \cos \zeta - u \sin \zeta \tang \omega},$$

$$\tang \omega \tang VO\lambda = \frac{u \sin \zeta \tang \omega + u \cos \zeta \tang \omega^2}{r \sec \omega + u \cos \zeta - u \sin \zeta \tang \omega},$$

$1 + \tang \omega \tang VO\lambda =$

$$\frac{r \sec \omega + u \cos \zeta + u \cos \zeta \tang \omega^2}{r \sec \omega + u \cos \zeta - u \sin \zeta \tang \omega},$$ mithin $\tang LO\lambda$

$$= \frac{r \tang \omega \sec \omega - u \sin \zeta \tang \omega^2 - u \sin \zeta}{r \sec \omega + u \cos \zeta + u \cos \zeta \tang \omega^2} =$$

$$\frac{r \tang \omega - u \sin \zeta \sec \omega}{r + u \cos \zeta \sec \omega} = \frac{r \tang \omega \cos \omega - u \sin \zeta}{r \cos \omega + u \cos \zeta}$$

$$= \frac{r \sin \omega - u \sin \zeta}{r \cos \omega + u \cos \zeta}.$$ Braucht man nun die Werthe $r = \sqrt{(c^2 - 2cv \cos \eta + v^2)}$, $r \sin \omega = v \sin \eta$

und $r\cos\omega = c - v\cos\eta$, ſo erhält man $\tan LO\lambda = \frac{v\sin\eta - u\sin\zeta}{c - v\cos\eta + u\cos\zeta}$.

Dieſe Formul dient, wenn die wahre Bewegung des Auges und des Puncts L bekannt iſt, die Abirrung des Lichts zu finden. Wäre aber aus einer Beobachtung der Winkel $\lambda O\omega = V\lambda O$ bekannt; ſo hätte man zugleich $OqL = 180° - Vq\lambda$ und $OqV = V\lambda O - LV\lambda$; da dann $LV\lambda$ aus der Lage der Linien CL und BO gegen einander bekannt iſt. Uebrigens wird $\sin LO\lambda = \frac{Lq}{LO} \sin OqL = \frac{LV - Vq}{LO} \sin OqL$, und $Vq = \frac{V\lambda}{\sin Vq\lambda}$ $\sin V\lambda q = \frac{V\lambda}{\sin OqL} \sin V\lambda O = \frac{V\lambda}{\sin OqL}$ $\sin\lambda O\omega$, mithin $\sin LO\lambda = \frac{LV \sin OqL - V\lambda \sin\lambda O\omega}{LO}$, oder $\sin LO\lambda = \frac{v\sin OqV - u\sin\lambda O\omega}{c}$.

66 §.

Je gröſſer c in Vergleichung mit v und u iſt, deſto kleiner iſt die Abirrung des Lichts, wie aus Vergleichung aller bisher betrachteten Fälle erhellet, und auch ohne Rechnung daraus abzunehmen iſt, weil die Abirrung des Lichts völlig verſchwinden, und jeder ſichtbare Punct in ſeiner eigentlichen Richtung erſcheinen würde, wenn die Geſchwindigkeit des

Lichts

Lichts unendlich groß wäre. In der That iſt dieſe Geſchwindigkeit des Lichts ſehr groß, und die davon herrührende Abirrung wird nur merklich, wenn entweder der Beobachter allein, oder der ſichtbare von ihm beobachtete Gegenſtand, oder auch beyde zugleich in ſo ſehr ſchneller Bewegung ſind, wovon man unter den Gegenſtänden, womit wir auf der Erde umgeben ſind, keine Beyſpiele hat. Nur die fleißigſten und ſchärfſten Beobachtungen der Fixſterne, und der Finſterniſſe der Jupitersmonden haben die Aſtronomen in den Stand geſetzt, daraus den Schluß zu ziehen, daß das Licht in einer Zeit von etwa 8 Minuten einen Weg zurück lege ſo groß, als die Entfernung der Sonne von der Erde iſt. Es kan hier genügen, vorläufig zu wiſſen, daß dieſe Entfernung mehr als 23000 halbe Erddurchmeſſer beträgt, wovon jeder 860 geographiſche Meilen groß iſt, da dann jede Meile 23629 rheinländiſche Fuſſe hält. In einer Minute legt alſo das Licht 2875 Erdhalbmeſſer, und in einer Secunde 48 Erdhalbmeſſer, mithin 41280 Meilen, oder 975405120 Rheinl. Fuß zurück. Die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften werden von dieſem allen umſtändlichern Unterricht geben, und die hier vorgetragenen Gründe dieſer Unterſuchung werden dort ihre Anwendung finden.

Der

Der VII. Abſchnitt.

Vom
Schatten und Halbſchatten.

67. §.

Weil undurchſichtige Körper das Licht nicht durchlaſſen, und das Licht von jedem leuchtenden Punct in graden Linien ausgehet, wofern ſonſt keine Urſachen ſolches ändern; ſo wird daher begreiflich, wie in einem Raum, durch welchen ein leuchtender Punct nach allen Seiten ſeine Strahlen ausbreitet, Stellen übrig bleiben können, wohin kein Licht kommt. Der Mangel des Lichts in ſolchen Stellen heiſt eigentlich Schatten, und man ſagt, daß diejenigen Gegenſtände im Schatten liegen, die in einem ſolchen Raum befindlich ſind, dem durch einen undurchſichtigen Körper, das Licht, welches ſich ſonſt darin ausbreiten würde, entzogen wird. Man verſtehet indeſſen durch den Ausdruck: Schatten, in der Optik auch den Raum ſelbſt, wohin wegen eines undurchſichtigen Körpers kein Licht kommt, und in dieſem Verſtande läſt ſich die Geſtalt und Gröſſe des Schattens geometriſch angeben. Der Schatten iſt nemlich in dieſem Verſtande allemahl ein geometriſcher Körper, deſſen Geſtalt und Gröſſe von der Geſtalt und Gröſſe des dunklen Körpers abhängt, der das Licht aufhält, und von dem man ſagt, daß er den Schatten werfe.

68 §.

Alles Licht, was ein leuchtender Punct auf einen dunklen Körper wirft, iſt in dem Raum eines Pyramiden- oder kegelförmigen Körpers enthalten, (8 §.) und der Schatten, den der dunkle Körper wirft, iſt die Erweiterung dieſer Pyramide, oder dieſes Kegels nach der andern dem leuchtenden Punct entgegen geſetzten Seite dieſes Körpers. Ein Theil der Oberfläche des dunklen Körpers liegt alſo ſelbſt im Schatten, und unterſcheidet ſich von dem erleuchteten Theil dieſer Oberfläche durch diejenige Linie, worin die Oberfläche des dunklen Körpers und die Pyramiden- oder Kegelfläche der auffallenden Strahlen einander berühren. Man kann ſie die Gränze des Lichts und Schattens nennen.

Wenn der Schatten mit einer Ebene geſchnitten wird, ſo liegt die Durchſchnittsfigur ebenfals im Schatten; auf dieſe Durchſchnittsfigur kann kein Licht fallen, und ſie heiſt der Schatten auf dieſer Ebene, oder auch die Projection dieſes Schattens auf dieſe Ebene. Einige practiſche Schriftſteller nennen ihn den Schlagſchatten. Man muß dieſen ebenen Schatten von dem körperlichen Schatten unterſcheiden, und hier übrigens nur vorläufig bemerken, daß die Geſtalt des ebenen Schattens von der Geſtalt des körperlichen abhängt. Man wird hieraus leicht abnehmen, daß der körperliche Schatten auch von der Oberfläche eines jeden andern Körpers, wenn dieſe gleich krumm oder gebrochen wäre, geſchnitten werden könne, da dann die Durchſchnittsfigur der Schatten auf dieſer Oberfläche heiſt, und vom körperlichen Schatten ebenfals unterſchieden iſt.

69. §.

30 F. Es ſey AB ein dunkler Körper, L und *l* zwey verſchiedene leuchtende Puncte, ſo wird AB zwey verſchiedene Schatten werfen, wie ABCD und ABEF. Beyde Schatten fallen zum Theil in einerley Raum ABCF, dagegen wird der Raum DAF ſchon von *l* und CBE von L erleuchtet, obgleich dieſe Räume nicht ſo helle ſind, als der auswärts daran gränzende Raum, der von beyden Puncten L und *l* zugleich erleuchtet wird. Der Schatten in den zum Theil erleuchteten Räumen DAF und CBE heiſt der Halbſchatten, ſo wie der übrige in dem gar nicht erleuchteten Raum ABCF der eigentliche oder völlige Schatten, auch der Kernſchatten, genannt wird. Wird der ganze Raum DABE mit einer Ebene geſchnitten, ſo giebt die Durchſchnittsfigur mit FABC den vollen Schatten, die Durchſchnittsfigur mit DAF, CBE aber den Halbſchatten auf dieſer Ebene.

Wenn der dunkle Körper AB auf der einen Seite von noch mehrern zwiſchen L und *l* befindlichen Puncten erleuchtet würde, ſo würde derſelbe auch eben ſoviele Schatten nach der andern Seite zu werfen. Alsdenn wäre der Halbſchatten nicht allenthalben gleich dunkel, ſondern gegen den vollen Schatten zu dunkler, und gegen die äuſſere Gränze AD und BE zu heller. Käme nemlich der dritte Punct λ hinzu, ſo würde der Raum DAG von *l* und λ erleuchtet, nur nicht von L, der Raum GAF aber würde allein von *l* erleuchtet und FAC gar nicht mehr. Beſtünde alſo die ganze Linie L*l* aus leuchtenden Puncten, ſo würde ſich der Halbſchatten von AF und BC nach AD und BE zu allmählig verliehren. Mit

der

der Projection dieſes Schattens auf einer Ebene hat es alsdenn eben die Bewandniß. Der ebene volle Schatten iſt mit dem Halbſchatten umgeben, der ſich allmählig in den erleuchteten Theil der Ebene, welcher dieſen wieder umgiebt, verliert.

70. §.

Auf der Oberfläche eines leuchtenden Körpers giebt es unzählig viele verſchiedene leuchtende Punkte, die insgeſammt ihr Licht auf einen dunklen Körper werfen können, und ſo iſt der eigentliche Schatten allemahl mit einem Halbſchatten umgeben. Uebrigens wird nur ein Theil der Oberfläche des leuchtenden Körpers ſein Licht auf den dunklen werfen können, und es wird auf die Gröſſe und Geſtalt beyder Körper imgleichen auf ihre Entfernung von einander ankommen, wie groß ſowohl der erleuchtende Theil des einen, als auch der erleuchtete Theil des andern ſey. Von eben dieſen Umſtänden wird auch die Geſtalt und Gröſſe des Schattens und Halbſchattens und beyder Projection auf einer Ebene von gegebener Lage abhängen. Wie man ſich verhalten müſſe, um beydes zu finden, davon ſollen nun einige Proben gegeben werden.

71. §.

Die Entfernung der Mittelpuncte *A* und 31 F.
B zweener Kreiſe in einerley Ebene iſt gegeben: man ſoll eine grade Linie ziehen, die beyde Kreiſe berührt.

Aufl. Eine ſolche Berührungslinie kann auf zweyerley Art gezogen werden: nachdem nemlich AB gezogen iſt; können beyde Berührungspuncte

auf

auf einerley Seite der Linie AB liegen, oder auf verſchiedenen Seiten.

1 Fall.

Wenn beyde Kreiſe gleich groß ſind, und man richtet AE, BD auf AB ſenkrecht auf; ſo iſt AE = = BD ziehet man alsdenn ferner ED, ſo berührt dieſe Linie beyde Kreiſe, weil die Winkel AED und BDE rechte Winkel werden (126 §. Geom.). Sind die Kreiſe ungleich groß, und ED berührt noch alle beyde, ſo iſt EAB = DBC ſpitz, wenn BD < AE iſt (100 §. Geom.) und ED ſtößt mit AB in C zuſammen. Man ſetze AE = r, BD = ϱ, AB = a, ſo iſt $r : \varrho$ = AC : BC, und $r - \varrho : \varrho = a$: BC, mithin BC = $\frac{\varrho a}{r - \varrho}$. Auf dieſe Art läſt ſich C finden, und man kann nun nach dem 126 §. Geom. durch C eine Tangente des einen Kreiſes ziehen, die auch den andern berühren wird. In dem Fall wenn die Halbmeſſer r und ϱ wenig verſchieden ſind, fällt C ſehr weit von B weg, und ſo kann die Lage der Halbmeſſer leichter auf folgende Art gefunden werden.

Es iſt ſin ECA = ſin DCB = coſ DBC = $\frac{BD}{BC} = \frac{r - \varrho}{a}$, weil BD = ϱ, und BC = $\frac{\varrho a}{r - \varrho}$ war. Man ſetze alſo über AB einen Halbkreis, und trage in ihn aus dem Mittelpunct A des gröſſern Kreiſes eine Sehne AM = $r - \varrho$, ſo wird ABM ein rechtwinklichtes Dreyeck, und ſin ABM = coſ MAB = $\frac{r - \varrho}{a}$. Dieſe Sehne AM alſo bis

an

an den Umfang des gröſſern Kreiſes verlängert beſtimmt den Berührungspunct E, und BD mit AE parallel gezogen beſtimmt den Berührungspunct D, da dann durch beyde Puncte die verlangte Tangente gezogen werden kann.

2 Fall.

Es ſey FG eine Tangente der zweyten Art, welche AB in O ſchneidet. Man ziehe die Halbmeſſer AG und BF, ſo iſt das Dreyeck AOG ∽ BOF, folglich $r:\varrho = AO:BO$, und $r+\varrho:\varrho = a:BO$, oder $r+\varrho:r = a:AO$. Demnach hat man $AO = \frac{ar}{r+\varrho}$, und $BO = \frac{a\varrho}{r+\varrho}$. Auf dieſe Art läſt ſich O finden, und eine Tangente des einen Kreiſes durch O nach dem 126 §. Geom. gezogen, berührt auch den andern Kreis.

Weil $\sin AOG = \cos GAO = \frac{AG}{AO} = \frac{r+\varrho}{a}$ iſt, ſo kann man, wie im erſten Fall über AB einen Halbkreis zeichnen, und in denſelben die Sehne $AN = r+\varrho$ eintragen. Dieſe beſtimmt den einen Berührungspunct G, und BF mit AG parallel gezogen beſtimmt den andern Berührungspunct.

Beyde Tangenten DE und FG ſchneiden einander in V unter dem Winkel $TVt = BOF - BCD = EAG$, und wenn man auch für die beyden andern Halbkreiſe die Tangenten RS und PQ ziehet; ſo hat man $ZYC = BOQ + BCD = BOF + BCD = DBQ$.

72 §.

Die Entfernung des Mittelpuncts einer dunklen Kugel vom Mittelpunct einer leuchten-

tenden iſt gegeben, nebſt den Halbmeſſern beyder Kugeln; man ſoll nicht allein die Geſtalt und Gröſſe des Schattens der dunklen Kugel finden, ſondern auch beſtimmen, wie groß das erleuchtende Stück der einen und das erleuchtete Stück der andern Kugel ſey.

31 F. Aufl. Man lege eine Ebene durch die Mittelpuncte beyder Kugeln A und B, ſo geben ſich ein paar gröſte Kreiſe, und man kann nach Inhalt des vor. §. die Tangenten DE, RS, ingleichen FG, PQ ziehen. Jene Tangenten beſtimmen die Gränzen, wie weit ſich der Schatten, und dieſe wie weit ſich der Halbſchatten in dieſer Ebene erſtrecken kann. Eben dieſe Tangenten beſtimmen auch, wie groß das erleuchtende Stück des einen, und das erleuchtete Stück des andern Kreiſes iſt. Es ſey A die leuchtende, und B die dunkle Kugel, ſo iſt EHS der erleuchtende und DLR der erleuchtete Bogen. Indeſſen empfängt nicht jeder Punct L des Bogens DLR von jedem Punct des Bogens EHS einen Lichtſtrahl; oder mit andern Worten: es wird nicht jeder Punct L von dem ganzen Bogen EHS erleuchtet, ſondern nur von einem Theil deſſelben. Zu demjenigen Bogen, welcher aus jedem Punct einen Lichtſtrahl nach L werfen kann, gehört ein Winkel am Mittelpunct A, der den ſcheinbaren Durchmeſſer δ der leuchtenden Kugel aus L geſehen zu 180° ergänzt. Weil nun der Sinus des ſcheinbaren Halbmeſſers $\frac{1}{2}\delta$ der leuchtenden Kugel aus L geſehen $= \frac{r}{AL}$, (18 §.) und $\sin ACE = \frac{r}{AC}$ iſt; ſo iſt $\frac{1}{2}\delta > ACE$,

und

und $90^\circ - \frac{1}{2}\delta < 90^\circ - ACE$, d. i. $90^\circ - \frac{1}{2}\delta < EAC$, und $180^\circ - \delta < EAS$. Um $\sin \frac{1}{2}\delta = \frac{r}{AL}$ zu finden, darf man nur erwägen, daß $AL = \sqrt{(a^2 - 2a\varrho \cos ABL + \varrho^2)}$ ſey. Uebrigens erhellet, daß L zwiſchen Q und F liegen müſſe, wenn alle Puncte eines Bogens $= 180^\circ - \delta$ auf L Licht werfen ſollen. Die Puncte zwiſchen Q und D, ſo wie auch die Puncte zwiſchen F und R liegen ſchon im Halbſchatten, und empfangen deſto weniger Licht, je näher ſie dem Punct D oder R ſind; der Bogen DKR liegt völlig im Schatten.

Weil dieſe Schlüſſe auf jede Ebene durch die Mittelpuncte beyder Kugeln angewandt und die im 71 §. angeſtellten Unterſuchungen damit ohne Schwierigkeit verbunden werden können, ſo ziehet man daraus leicht folgende Schlußſätze.

I.) Die Gränze des erleuchteten und unerleuchteten Theils der dunklen Kugel iſt ein Kreis, deſſen Pole Π und K in der graden Linie AB liegen, die durch beyder Kugeln Mittelpuncte geht. Eben ſo verhält es ſich auch auf der leuchtenden Kugel mit der Gränze, welche den erleuchtenden Theil EHS von dem übrigen EIS abſondert. Alle dieſe Kugelſtücke ſind Kugelabſchnitte, und wenn beyde Kugeln gleich groß ſind, ſo ſind dieſe Kugelſtücke Halbkugeln. Iſt die dunkle Kugel kleiner, als die leuchtende, ſo iſt das erleuchtete Stück gröſſer als eine Halbkugel, und das erleuchtende kleiner als eine Halbkugel: iſt aber die dunkle Kugel gröſſer als die leuchtende, ſo hat es hiemit die entgegen geſetzte Bewandniß, wie man ſogleich ſiehet, wenn man A als die dunkle, und B als die leuchtende Kugel betrachtet. Gegen die

Gränze des erleuchteten Kugelabſchnitts fängt ſich ſchon der Halbſchatten an, und die im Halbſchatten liegende Zone wird hier mit zu dem erleuchteten Abſchnitt gerechnet; denn ſonſt iſt der völlig erleuchtete Abſchnitt der dunklen Kugel allemahl kleiner als eine Halbkugel. Die Gröſſe der Oberflächen dieſer Kugelabſchnitte, wird übrigens aus den bekannten Halbmeſſern und der Entfernung der Mittelpuncte nach dem 621 §. Geom. leicht gefunden, weil die Winkel EAO, GAO, QBO, DBO, nach Anleitung des 71 §. gefunden werden können.

II.) In allen Fällen iſt der körperliche Schatten kegelförmig, nur wird er in dem Fall cylindriſch, wenn beyde Kugeln gleich groß ſind. Iſt die kleinere Kugel dunkel, ſo wird der Schatten ein grader Kegel, deſſen Axe in die verlängerte Linie AB zwiſchen beyden Mittelpuncten fällt, und wenn man durch ſeine Länge die Entfernung ſeiner Spitze C vom Mittelpunct B der dunklen Kugel verſteht, ſo hat man die Länge dieſes Schattenkegels BC $= \frac{a\varrho}{r-\varrho}$ (71 §.) Der Halbſchatten umgiebt den vollen Schatten, und ſeine äuſſere Gränze iſt eine abgekürzte Kegelfläche, die mit dem vollen Schattenkegel einerley Axe hat, und deren Spitze, wenn ſie ergänzt würde, in O fiele, da dann auch BO $= \frac{a\varrho}{r+\varrho}$ aus dem 71 §. bekannt iſt.

Wofern die gröſſere Kugel dunkel und die kleinere leuchtend iſt, ſo wird der Schatten ein abgekürzter Kegel, deſſen Spitze, wenn er ergänzt würde, in C fiele, ſeine Länge aber erſtreckt ſich ins unend-

endliche hinaus. Der Halbſchatten iſt ebenfals ein abgekürzter Kegel, ſeine Spitze, wenn er ergänzt wird, fällt in O, und man hat $AO = \frac{ar}{r+\varrho}$ (71 §.).

III.) Wenn der Schattenkegel mit einer Ebene ſenkrecht auf ſeine Axe in W oder X geſchnitten wird, ſo iſt die Projection des Schattens auf dieſer Ebene ein Kreis, deſſen Halbmeſſer Wz oder X*t* iſt. Alsdenn hat man CW = BC − BW, und Wz = CWtangDCB. Es war aber $\sin DCB = \frac{r-\varrho}{a}$, alſo iſt $\cos DCB = \frac{\surd(a^2-(r-\varrho)^2)}{a}$, und $\operatorname{tang} DCB = \frac{r-\varrho}{\surd(a^2-(r-\varrho)^2)}$, mithin

$$Wz = (BC - BW) \cdot \frac{r-\varrho}{\surd(a^2-(r-\varrho)^2)}.$$

Setzt man BW = α, ſo wird Wz =

$$\left(\frac{a\varrho}{r-\varrho} - \alpha\right) \times \frac{r-\varrho}{\surd(a^2-(r-\varrho)^2)} = \frac{a\varrho}{\surd(a^2-(r-\varrho)^2)} - \frac{\alpha(r-\varrho)}{\surd(a^2-(r-\varrho)^2)}.$$

Eben ſo erhält man CX = BC + AB + AX, und X*t* = CXtangDCB. Die Projection des Halbſchattens auf einer ſolchen Ebene wird ein Ring, der den kreisförmigen Kern-Schatten umgiebt, und deſſen Breite Zz = WZ − Wz, oder wenn die gröſſere

Kugel die dunkle wäre, $Tt = XT - Xt$ iſt. Es iſt aber $WZ = (OB + BW) \tang BOQ$ und $XT = (OA + AX) \tang BOQ$. Weil nun $\sin BOQ = \frac{r + \varrho}{a}$ war, (71 §.) ſo iſt $\cos BOQ = \frac{\sqrt{(a^2 - (r + \varrho)^2)}}{a}$ und $\tang BOQ = \frac{r + \varrho}{\sqrt{(a^2 - (r+\varrho)^2)}}$; mithin

$$WZ = \left(\frac{a\varrho}{r+\varrho} + \alpha\right) \times \frac{r+\varrho}{\sqrt{(a^2 - (r+\varrho)^2)}}$$

$$= \frac{a\varrho}{\sqrt{(a^2 - (r+\varrho)^2)}} + \frac{\alpha(r+\varrho)}{\sqrt{(a^2 - (r+\varrho)^2)}}.$$

73 §.

Man wird aus dieſer Probe ſattſam wahrnehmen, daß die Unterſuchung über die Geſtalt und Gröſſe des Schattens oft ein ziemlich weitläuftiges Verfahren erfordere. Wenn der leuchtende Körper in Vergleichung mit dem dunklen nur klein iſt, wie z. E. die Flamme einer angezündeten Kerze oder Lampe in Vergleichung mit denjenigen Sachen iſt, die ſich gewöhnlich in unſern Wohnzimmern befinden, ſo kann man, ohne ſehr zu fehlen, die Flamme als einen leuchtenden Punct betrachten; durch dieſen leuchtenden Punct kann man ſich alsdenn eine kegelförmige oder pyramidenförmige Fläche vorſtellen, die den dunklen Körper rings herum berührt. In dem Raum dieſer Pyramide zwiſchen ihrer Spitze und dem dunklen Körper ſind alsdenn alle die Strahlen enthalten, die auf das erleuchtete Stück des dunklen Kör-

Körpers fallen können: es iſt die im 8 §. ſchon vorgekommene Strahlenpyramide, und ihre Erweiterung nach der Seite des dunklen Körpers, die vom Licht abgewandt iſt, giebt den körperlichen Schatten.

Wofern der leuchtende Körper ſo groß iſt, daß man *ihn* nicht als einen Punct betrachten kann, ohne ſehr zu fehlen; ſo giebt es zweyerley Hülfsmittel, die Geſtalt des Kern-Schattens zu finden. Es verſtattet nemlich in manchen Fällen die Geſtalt des leuchtenden und dunklen Körpers eine Fläche anzunehmen, welche beyde Körper zugleich rings herum berührt. Im vor. §. war das eine Kegelfläche, die beyde Kugeln, die leuchtende und dunkle zugleich berührte. Dieſe Fläche giebt alsdenn auf der Seite, die vom Licht abgewandt iſt, die Gränze des körperlichen Kern-Schattens ab: auf der andern Seite begränzt ſie zugleich den Raum, worin alle Strahlen enthalten ſind, die auf den dunklen Körper fallen, und deſſen erleuchtete Seite beſcheinen können, ſie berührt den leuchtenden Körper in der Gränze des erleuchtenden, und den dunklen Körper in der Gränze des erleuchteten Theils. Dieſe Betrachtungen enthalten die allgemeinen Gründe, worauf die Auflöſung der Aufgabe im 72 §. beruhet, die alſo auch wenigſtens in einigen andern beſondern Fällen ihre Anwendung finden können.

Ein andres und dabey ganz allgemeines Hülfsmittel, die Geſtalt und Gröſſe des Kernſchattens zu finden, kommt auf folgende Betrachtungen an. Für jeden Punct des leuchtenden Körpers, welcher auf den dunklen Strahlen werfen kann, giebt es eine Halbſchatten-Pyramide, und der Raum, den alle dieſe Halbſchatten-Pyramiden gemein haben, iſt der

Kernſchatten, weil gar kein Punct des leuchtenden Körpers in denſelben hinein ſcheinen kann. Es kann hier genügen, daß man vorläufig dieſe Hülfsmittel überhaupt kennen lernt, in der Perſpectiv werden davon Anwendungen vorkommen.

Der VIII. Abſchnitt.

Vom Sonnenlicht insbeſondre.

74 §.

32 F. Es ſey *AHIB* eine leuchtende Kugel, und *DE* eine kreisförmige Oefnung in der dunklen Ebene *MN*, welche auf der graden Linie zwiſchen den Mittelpuncten *S* und *C* der Kugel und der Oefnung ſenkrecht iſt: man ſucht, wie groß das Stück der leuchtenden Kugel ſey, welches durch die Oefnung durchſcheinen kann.

Aufl. Man lege durch den Mittelpunct S der leuchtenden Kugel und den Mittelpunct C der Oefnung eine Ebene ACS, EH ſey eine Tangente der Kugel in dieſer Ebene, ſo iſt H der äuſſerſte Punct, wovon ein Strahlenkegel HDE auf die Oefnung fallen kann, und HC ſeine Axe. Wird auf der andern Seite die Tangente DK gezogen, ſo iſt K der äuſſerſte Punct auf der andern Seite von SC, wo-

wovon ein Strahlenkegel DE auf die Oefnung fallen kann, und KC ſeine Axe. Von jedem Punct des Bogens HK fällt demnach ein Strahl auf jeden Punct des Durchmeſſers DE der Oefnung. Man ziehe *noch* die Tangenten DA und EB; ſo ſiehet man *wohl*, daß die zwiſchen A und H liegenden Puncte immer wenigere Puncte von DE erleuchten können, je *näher* ſie nach A zu liegen, und daß von A nur der einzige Strahl AD noch auffallen könne. Eben ſo iſt es mit den Puncten zwiſchen B und K beſchaffen. Demnach beſtimmt der Bogen AB die Gröſſe des Segments der Kugel, welches durch die Oefnung DE durchſcheinen kann.

Wenn nun DA und CS einander in F ſchneiden, und man ziehet nach SD, ſo hat man die ähnlichen Dreyecke FAS und FCD, worin der Winkel CDF = ASF = CSD + DSA. Man ſetze CS = a, SA = r, CD = ϱ, ſo wird ſinCSD = $\frac{\varrho}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}}$, coſCSD = $\frac{a}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}}$, coſDSA = $\frac{r}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}}$, ſin DSA = $\sqrt{\frac{a^2+\varrho^2-r^2}{a^2+\varrho^2}}$; mithin ſinASF = ſinCDF = $\frac{r\varrho + a\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)}}{a^2+\varrho^2}$, coſASF = coſCDF = $\frac{ar - \varrho\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)}}{a^2+\varrho^2}$ und hiedurch wird

 die

die Gröſſe des Segments AIB der Kugel beſtimmt, welches durch die Oefnung DE durchſcheint.

75. §.

Durch die Oefnung DE fällt demnach ein Lichtkegel DEF, deſſen Länge CF $= \varrho \tan CDF =$

$$\frac{r\varrho + a\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)}}{ar - \varrho\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)}} \cdot \varrho.$$

Dieſer Lichtkegel iſt mit einem Halbſchattenkegel umgeben, deſſen Spitze in G fällt, und man hat CG $= \varrho \tan CDG$. Es iſt aber

$$\sin CDS = \frac{a}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}},\ \cos CDS = \frac{\varrho}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}},\ \sin SDG = \frac{r}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}},$$

$$\cos SDG = \frac{\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)}}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}};$$ alſo $\sin CDG =$

$$\sin(CDS - SDG = \frac{a\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)} - r\varrho}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}};$$

$$\cos CDG = \frac{\varrho\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)} + ar}{\sqrt{(a^2+\varrho^2)}},$$ und

$$\tan CDG = \frac{a\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)} - r\varrho}{\varrho\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)} + ar},$$ folglich

$$CG = \frac{a\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)} - r\varrho}{\varrho\sqrt{(a^2+\varrho^2-r^2)} + ar} \cdot \varrho.$$

Fängt man das durchfallende Licht mit einer Ebene PQ auf, die mit MN parallel iſt, ſo projicirt ſich der volle Lichtkegel DEF in einen Kreis *ab*, deſſen

Halb-

Halbmeſſer $ca = \frac{CD}{CF}(CF - Cc) = CD$
$- \frac{CD}{CF} . Cc$ iſt: oder wenn man $Cc = \alpha$ ſetzt,
ſo wird $ca = \varrho - \frac{ar - \varrho\sqrt{(a^2 + \varrho^2 - r^2)}}{r\varrho + a\sqrt{(a^2 + \varrho^2 - r^2)}} . \alpha.$

Der Halbſchatten-Kegel aber projicirt ſich in einen Kreis hk, deſſen Halbmeſſer $ck = \frac{CD}{CG}(CG + Cc)$
$= CD + \frac{CD}{CG} . \alpha$ iſt, oder $ck = \varrho$
$+ \frac{\varrho\sqrt{(a^2 + \varrho^2 - r^2)} + ar}{a\sqrt{(a^2 + \varrho^2 - r^2)} - r\varrho} . \alpha.$

Wenn ϱ in Vergleichung mit a und r gar ſehr klein iſt, ſo hat man $ca =$

$$\varrho - \frac{a - \varrho\sqrt{\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)}}{a\sqrt{\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)}} . \alpha$$ beynahe

$= \varrho - \frac{r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} . \alpha$, und CF beynahe $=$
$\frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}}{r} . \varrho$. Ferner wird $ck = \varrho$
$+ \frac{r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} . \alpha$, ſo wie $CG =$
$\frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}}{r} . \varrho$; In dieſem Fall, kann man

vermöge der im 10 §. angeführten Gründe den auf PQ projicirten Kreis hk als das Bild der leuchtenden Kugel betrachten. Weil nun dieſer Vorausſetzung gemäß $\frac{r}{\sqrt{(a^2-r^2)}} = \text{tang}\, ADS$, und $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{r} = \cot ADS$ wird, ADS aber der ſcheinbare Halbmeſſer der leuchtenden Kugel iſt, aus D geſehen; ſo ſetze man $ADS = \delta$, und es wird $CF = \varrho \cot \delta$, $ck = \varrho + \alpha\, \text{tang}\, \delta$, und $ca = \varrho - \alpha\, \text{tang}\, \delta$.

76 §.

Weil die Sonne eine für ſich leuchtende Kugel iſt, wie man hier als einen aſtronomiſchen Lehrſatz vorläufig annehmen kann, ſo laſſen ſich die Rechnungen des 74. und 75 §. leicht auf die Sonne anwenden, wenn man ihre Entfernung von der Erde, und ihren Halbmeſſer kennet. Aſtronomiſche Beobachtungen haben gelehrt, daß der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne zwiſchen 31′ 30″ und 32′ 35″ abwechſele: Nimmt man ihn hier von 32′ an, ſo hat man $\delta = 16'$, alſo $\text{tang}\, \delta = 0{,}0046542$, und $\cot \delta = 214{,}85762$, oder $\cot \delta$ beynahe $= 215$, und $\text{tang}\, \delta$ beynahe $= \frac{1}{215}$. Nach den neueſten Ausmeſſungen iſt der Mittelpunct der Sonne in ihrem mittlern Abſtande von der Erde um 23436 halbe Durchmeſſer der Erde vom Mittelpunct der leztern entfernt. (Collectio Obſervationum quæ occaſione tranſitus veneris per Solem A. MDCCLXIX per imperium Ruſſicum inſtituta fuerunt Petrop. 1770. pag. 538.) Weil nun $r = a \sin \delta$, (19 §.) und auch hier

hier ſind beynahe $= \frac{1}{215}$ iſt; ſo findet man für den Halbmeſſer der Sonne $r = \frac{23436}{215} \doteq 109$ halbe Erddurchmeſſer. Wenn demnach die Sonne durch eine *kleine* kreisrunde Oefnung in ein ſonſt finſtres Zimmer ſcheint, ſo läſt ſich bey Anwendung der Formuln des 74 §. ſicher annehmen, daß die Brüche $\frac{\varrho}{a}$ und $\frac{\varrho}{r}$ ſo gut als verſchwindende Gröſſen zu betrachten ſind, und man hat $CF = 215 \cdot \varrho$, $ck = \varrho + \frac{1}{215}\alpha$, $ca = \varrho - \frac{1}{215}\alpha$. Mit demjenigen, was aus dieſen Formuln fließt, ſtimmt die Erfahrung vollkommen überein. Fängt man das durchfallende Sonnenlicht, mit einem weiſſen Papier auf, ſo ſiehet man ganz deutlich, wenn das Papier von der Oefnung nach und nach entfernt wird, wie ſich der Halbſchatten erweitert, und dagegen der mittlere hellere Kern des aufs Papier projicirten Kreiſes zuſammenziehet. Staub, Rauch, und andre im Zimmer in freyer Luft herum flatternde kleine Körperchen machen den mit dem durchfallenden Licht erfüllten Raum kenntlich, und alsdenn wird ſeine coniſche Figur ziemlich bemerklich, wenn die Oefnung gar ſehr klein iſt: ſonſt weicht ſie auf kurze Entfernungen von der Geſtalt eines Cylinders ſehr wenig ab.

77 §.

Wegen der ſehr groſſen Entfernung der Sonne von der Erde ſind alle von einem und eben demſelben Punct der Sonne auf die Erdfläche fallende Strahlen als parallel anzuſehen. Zwar ſind nicht alle Puncte in demjenigen Theil der Oberfläche der Sonne

Sonne, welcher die Erde erleuchtet, von der Erde gleichweit entfernt, wie man gleich ſiehet, wenn man in der 31 Fig. die Kugel A für die Sonne und B für die Erde annimmt. Der Punct H in der Mitte des die Erde erleuchtenden Segments iſt beynahe um den ganzen Halbmeſſer der Sonne der Erde näher, als diejenigen Puncte, welche an der Gränze des erleuchtenden Segments liegen. Weil aber auch H noch über 23000 Halbmeſſer der Erde von letzterer entfernt iſt, ſo iſt der Sinus des ſcheinbaren Halbmeſſers der Erde aus einem Punct in der Oberfläche der Sonne geſehen kleiner als $\frac{1}{23000}$, alſo kleiner als 0,0000435. Weil nun $\sin 1' = 0{,}0002909$, ſo iſt der erwehnte ſcheinbare Halbmeſſer der Erde kleiner $\frac{435}{2909}$ Minute, oder kleiner als 9 Secunden, und der ſcheinbare Durchmeſſer kleiner als 18 Secunden. Demnach ſind ein paar auf die Erde fallende Sonnenſtrahlen, die von einerley Punct der Sonne kommen, allemahl unter einem viel kleinern Winkel, als den von 18 Secunden gegen einander geneigt: und Sonnenſtrahlen, die aus einerley Punct der Sonne auf ein Stück der Erdfläche, oder ſolche Körper fallen, womit wir auf der Erde umgeben ſind, neigen ſich gegen einander nur unter einem ſo ſehr kleinen Winkel, daß ihre Abweichung von der parallelen Lage gar nicht merklich bleibt.

78 §.

Indeſſen ſind nicht alle Sonnenſtrahlen, welche die Gegenſtände auf der Erde erleuchten, ſchlechthin als parallel anzuſehen. Auf jeden Punct eines ſolchen Gegenſtandes fällt von jedem Punct des erleuchtenden Segments der Sonne ein Strahl, und

alle

alle Sonnenſtrahlen, die auf einerley Punct des erleuchteten Gegenſtandes fallen ſind in dem Raum eines Kegels enthalten, wovon der Winkel an der Spitze in dem Schnitt durch die Axe dieſes Kegels dem ſcheinbaren Durchmeſſer der Sonne gleich iſt. Wäre die Sonne ein einziger Punct, ſo wäre der körperliche Schatten eines jeden auf der Erde dem Sonnenlicht ausgeſetzten dunklen Körpers cylindriſch oder prismatiſch und zwar ohne allen Halbſchatten. Weil aber der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne noch mehr als $\frac{1}{2}$ Grad beträgt, ſo bleibt der Schatten nicht cylindriſch, der volle Schatten wird vielmehr nach der verſchiedenen Geſtalt der dem Sonnenlicht ausgeſetzten Körper coniſch oder pyramidenförmig, oder läuft doch wenigſtens nach Art ſolcher Körper ſpitzig zu, wenn er gleich übrigens eine ſehr irreguläre Geſtalt haben kann: um ihn herum aber entſteht ein Korb- oder Becherförmiger Halbſchatten. Es ſey DE ein dunkler Körper, A ein Punct in der Mitte der von der Sonne erleuchteten Seite, 33 F. C der mittlere Punct des erleuchtenden Segments der Sonne. Wenn man nun CA ziehet, ſo ſind alle von C auf DE fallende Strahlen CE, CD, unter ſich parallel: und wenn DE von C allein erleuchtet würde, ſo hätte der Schatten die cylindriſche Geſtalt DccE. Man lege durch AC eine Ebene, in welcher Lage man will, und nehme an, das D und E ſolche Puncte in dieſer Ebene ſind, die zugleich in der äuſſern Gränze der erleuchteten Seite von DE liegen, F und G in der äuſſern Gränze des erleuchtenden Segments der Sonne. Wenn nun die Strahlen FD, FE aus F kommen, ſo ſind ſie zwar unter ſich parallel, ſie ſchneiden aber die aus G auffallenden Strahlen unter einem

nem Winkel FDC $= f$Dc, welcher dem ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne gleich iſt. In den Raum cDf kommt alſo noch Sonnenlicht von den zwiſchen C und F liegenden Puncten der Sonne, mithin erſtreckt ſich der volle Schatten nur bis an Df und in den Raum cDf fällt ſchon Halbſchatten. Wenn ferner die Strahlen GD, GE aus G auffallen, ſo ſind zwar auch dieſe unter ſich parallel: ſie ſchneiden aber die aus C auffallenden Strahlen ebenfals unter einem Winkel GDC $= g$Dc, welcher dem ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne gleich iſt. Und weil in den Raum cDg noch nicht von allen Puncten des Bogens FCG, ſondern nur von deſto mehrern fallen kann, je näher man die Stellen bey der Gränze Dg annimmt, ſo iſt noch in dieſem Raum Halbſchatten: woraus zugleich ſoviel erhellet, daß der Winkel des Halbſchattens $fDg = fEg$ rings herum dem ſcheinbaren Durchmeſſer der Sonne gleich ſey.

79 §.

Die Länge des Schattens einer von der Sonne erleuchteten Kugel, und den Durchmeſſer des von ihr ſenkrecht auf eine Ebene geworfenen Schattens und Halbſchattens zu finden, wenn die Entfernung der Ebene vom Mittelpunct der Kugel nebſt dem Halbmeſſer der letztern gegeben iſt.

31 F. Aufl. Die Auflöſung der Aufgabe des 72 §. läſt ſich hier ſo anwenden. Man nehme A für die Sonne und B für die von ihr erleuchtete Kugel an: ſo iſt ϱ in Vergleichung mit a und r ſo ſehr klein, daß die Brüche $\frac{\varrho}{a}$ und $\frac{\varrho}{r}$ als verſchwindende be-

trachtet werden können. (Es wird nemlich durch B hier nur eine ſo kleine Kugel verſtanden, dergleichen wir auf der Erde durch Kunſt zu allerley beſondern Abſichten zu verfertigen pflegen.) Dies vorausgeſetzt kann $\frac{r-\varrho}{a} = \frac{r}{a}$, alſo $\frac{a}{r-\varrho} = \frac{a}{r}$ angenommen werden, und man hat für die Länge des Schattens BC $= \frac{a}{r} \cdot \varrho \cdot$ (72. §.) Weil nun hier $\frac{r}{a}$ der Sinus des ſcheinbaren Halbmeſſers der Sonne iſt, ſo wird $\frac{r}{a} = \sin 16'$ und $\frac{a}{r} =$ coſec 16′, mithin die Länge des Schattens BC $= 214,85995 . \varrho$ beynahe $= 215 . \varrho$. Eine ſolche Kugel wirft daher ihren Schatten nur auf eine Entfernung, die 215mahl gröſſer als ihr Halbmeſſer iſt, in gröſſerer Entfernung bleibt nur Halbſchatten übrig.

Ferner erhält man für den Halbmeſſer des in der Entfernung BW $= \alpha$ projicirten Schattens WZ $=$

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \cdot \varrho - \frac{r}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \cdot \alpha . \text{(72. §. n.}$$

III.) Es war aber $\frac{r}{a} = \sin 16'$, alſo iſt

$$\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} = \cos 16', \text{ und } \frac{a}{\sqrt{(a^2-r^2)}} =$$

ſec 16′ $= 1,0000108$ beynahe $= 1$. Ferner iſt

$$\frac{r}{\sqrt{(a^2-r^2)}} = \text{tang } 16' = \frac{1}{\cot 16'} =$$

$\frac{1}{214,85762}$ beynahe $= \frac{1}{215}$; mithin wird $WZ = \varrho - \frac{1}{215}\alpha$. Eben ſo findet man den Halbmeſſer des projicirten Halbſchattens $WZ = \frac{a}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \cdot \varrho + \frac{r}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \cdot \alpha$ (72. §. num. III.) $= \varrho + \frac{1}{215}\alpha$, folglich die Breite des Halbſchattenringes $= WZ - WZ = \frac{2}{215} \cdot \alpha$.

80. §.

Wenn man im 75. und 76. §. DE als eine dunkle kreisförmige Ebene betrachtet, ſo iſt DFE ihr Schattenkegel, und *Ghk* der Halbſchattenkegel. Wird demnach eine ſolche Scheibe, deren Halbmeſſer $= \varrho$ iſt, dem Sonnenlicht ſo ausgeſetzt, daß die vom mittlern Punct der Sonne ausgehenden Strahlen ſenkrecht auffallen, ſo hat es mit dem Schatten und Halbſchatten der Ebene eben ſo eine Bewandniß, als wenn es eine dunkle Kugel von eben dem Halbmeſſer wäre. Ihr Schatten iſt ein grader Kegel, der 215 mahl länger iſt, als der Halbmeſſer der Scheibe, und die Projection des Schattens auf eine mit der Scheibe in der Entfernung α parallele Ebene iſt ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \varrho - \frac{1}{215}\alpha$, die Projection des Halbſchattens aber ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \varrho + \frac{1}{215} \cdot \alpha$, und die Breite des Halbſchatten-Ringes $= \frac{2}{215} \cdot \alpha$.

81. §.

Es ſey ſeine grade Linie DE dem Sonnenlicht ausgeſetzt, und man ſtelle ſich eine Ebene durch DE und den Mittelpunct der Sonne vor, welche den gröſten Kreis AIB giebt. Würde nun DE allein von denjenigen Puncten erleuchtet, die in dem Bogen AB liegen, ſo wäre der Schatten ein Dreyeck DEF, und zwar ein gleichſchenklichtes Dreyeck, wenn man SC auf DE ſenkrecht annimmt, und die Länge deſſelben CF = 215. $\frac{1}{2}$ DE. Wegen der von den übrigen Puncten der Sonne herrührenden Erleuchtung aber, wäre dies nur ein Halbſchatten, weil von allen übrigen Puncten der Sonne Licht in den Raum dieſes Dreyecks fallen würde. Wenn aber DE nicht für eine geometriſche Linie angenommen wird, ſondern für einen prismatiſchen oder cylindriſchen Körper, geſetzt daß auch ſeine Querſchnitte ſehr klein wären, ſo entſteht ſchon ein voller Schatten. Die eigentliche Geſtalt des körperlichen Schattens in dieſem und andern ähnlichen Fällen zu ſuchen, würde theils weitläuftig, theils in vielen Fällen von keinem ſonderlichen Nutzen ſeyn. Deswegen begnügt man ſich damit, für einige beſonders in der Ausübung brauchbare Fälle die Projection des Schattens ſolcher Körper auf ebene beſonders horizontale und verticale Flächen zu betrachten, wovon nun einige Beyſpiele folgen ſollen. 32 F.

82. §.

Es ſey LM eine horizontale Ebene, E ein Punct in derſelben, ES eine grade Linie von E nach den Mittelpunct der Sonne gezogen, und SED der Neigungswinkel der Linie ES gegen die Ebene LM, ſo 34 F.

iſt DES die ſcheinbare Entfernung der Sonne von der horizontalen Ebene, und dieſe heiſt auch die Höhe der Sonne über dem Horizont. Man kann E in der horizontalen Ebene wo man will annehmen, der Winkel DES wird immer einerley ſeyn, (321. §. Geom.) weil alle dergleichen Linien wie ES unter ſich parallel ſind (77. §.)

83. §.

34 F. Es ſey AC eine lothrechte Linie, CS ein Strahl aus der Sonne Mittelpunct, GFHI ein Rechteck durch AC auf der Ebene ACS ſenkrecht: man ſucht den auf die horizontale Ebene LM projicirten Schatten des Rechtecks GFHI nach ſeiner Geſtalt und Gröſſe.

Aufl. Wenn der Strahl SC verlängert die horizontale Ebene LM in B trift, ſo iſt ABS die Höhe der Sonne. In der verticalen Ebene ABS nehme man die Winkel $BCb = BC\beta$ dem ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne gleich. Wenn nun das Rechteck GFHI allein von Mittelpunct der Sonne erleuchtet wurde, ſo wäre die Projection des Schattens ein Rechteck HKLI auf der Grundlinie HI in der Höhe $AB = AC \cot\alpha$, die Höhe der Sonne $= \alpha$ geſetzt. Hiezu kommt zuförderſt die Erleuchtung von allen denjenigen Puncten der Sonne, die in der verticalen Ebene ABS liegen, und deswegen erſtreckt ſich der volle Schatten nicht bis B, ſondern nur bis *b*, und wenn *kl* durch *b* mit KL parallel gezogen wird; ſo fällt in den Raum von B bis *b* noch Licht von den Puncten, die über dem Mittelpunct der Sonne liegen. Dieſemnach wäre nun das Rechteck K*kl*I der

vol-

volle Schatten, und ſeine Länge $Ab = AC \tang(90° - \alpha - \delta) = AC \cot(\alpha + \delta)$, den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne $= \delta$ geſetzt. Weil überdem in den Raum von B bis β kein Licht von allen Puncten kommen kann, die unter dem Mittelpunct der Sonne liegen, ſo erſtreckt ſich der Halbſchatten bis β, ſo daß man $A\beta = AC \tang(90° - (\alpha - \delta) = AC . \cot(\alpha - \delta)$ erhält. Der Halbſchatten kWXl wäre alſo ein Rechteck deſſen Grundfläche = HI und die Höhe $b\beta = A\beta - Ab = AC(\cot(\alpha - \delta) - \cot(\alpha + \delta))$. Um nun die von den übrigen Puncten der Sonne abhängende Erleuchtung ebenfalls in Betrachtung zu ziehen, erwäge man, daß die Ebene SFG einen gröſten Kreis auf der Sonne giebt, der den vorigen verticalen ſenkrecht ſchneidet. Wenn allein die in dieſem Kreiſe liegenden Puncte die Linie FG erleuchteten, ſo wäre ihr voller Schatten $MN = FG - \frac{2}{215} BC = FG - \frac{2}{215} \surd(AC^2 + AC^2 \cot \alpha^2) = FG - \frac{2}{215} AC \operatorname{coſec} \alpha$, der Halbſchatten $mn = FG + \frac{2}{215} AC \operatorname{coſec} \alpha$ (79. §.) Dieſelbe Bewandniß hat es mit jeder graden Linie OP im Rechteck GFHI die mit FG parallel liegt. Ihr voller Schatten QR iſt $= FG - \frac{2}{215} Aa . \operatorname{coſec} \alpha$ und der Halbſchatten TS $= FG + \frac{2}{215} Aa . \operatorname{coſec} \alpha$. Wenn nun TS und HK einander in V ſchneiden, ſo iſt $VQ = VS = \frac{1}{215} Aa . \operatorname{coſec} \alpha$ und $KM = Km = \frac{1}{215} AC \operatorname{coſec} \alpha$, mithin $VQ : KM = Ac : AC = HV : HK = VS : Km$. Demnach liegen alle Puncte Q mit H und M, ſo wie alle Puncte S mit H und m in grader Linie. Von FG fiele nun ein Schatten in $MN = FG - \frac{2}{215} AC \operatorname{coſec} \alpha$, und ein Halbſchatten $mn = FG + \frac{2}{215} AC \operatorname{coſec} \alpha$. Weil ſich aber wegen der übrigen Erleuchtung der volle Schatten nur bis an b erſtreckt, und $HK : Hk =$

AB:Ab=KM:ky iſt; ſo hat man $\cot\alpha : \cot(\alpha+\delta) = \frac{2}{215} \cdot AC \operatorname{coſec}\alpha : ky$, mithin $ky = \frac{\cot(\alpha+\delta)}{\cot\alpha}$

$\cdot \frac{1}{215} AC \operatorname{coſec}\alpha = \frac{\cot(\alpha+\delta)}{\operatorname{coſ}\alpha} \cdot \frac{1}{215} \cdot AC$,

und $by = \frac{1}{2}FG - \frac{1}{215} \cdot \frac{\cot(\alpha+\delta)}{\operatorname{coſ}\alpha} \cdot AC$, oder

$zy = FG - \frac{2}{215} \cdot \frac{\cot(\alpha+\delta)}{\operatorname{coſ}\alpha} AC$. Der volle Schatten hat alſo die Geſtalt des Trapezii HI*zy*, deſſen Abmeſſungen aus dem bisherigen bekannt ſind. Der Halbſchatten von A bis B würde die Geſtalt des Trapezii HI*nm* haben, deſſen Abmeſſungen ebenfalls bekannt ſind: und wenn die Erleuchtung allein von den bisher betrachteten gröſten Kreiſen käme, ſo würde noch in dem Rechteck KWXL Halbſchatten ſeyn. Hiezu kommt aber noch die Erleuchtung von den übrigen Puncten der Sonne.

Es ſey α ein willkührlicher Punct zwiſchen B und β, ſo wird eine Ebene durch FG und α die Sonne in einem kleinern Kreiſe ſchneiden. In der 35. Fig. ſtelle $fsg\sigma$ den gröſten Kreis der Sonne in der verticalen Ebene $sC\sigma$ vor, und αC verlängert ſchneide ihn in f und g, ſo iſt fg der Durchmeſſer des kleinen Kreiſes in der Ebene αGF (34. Fig.) Wird nun Se auf fg ſenkrecht angenommen und Se $=p$, $S\sigma = r$ $CS = a$ der Winkel $\beta C\alpha = ſC\sigma = e\delta h = \varphi$ geſetzt; ſo hat man $Sh = p \sec\varphi$, $C\sigma = r\cot\delta$, $a = r \operatorname{coſec}\delta$, und $h\sigma = r\cot\delta \operatorname{tang}\varphi$ mithin $p\sec\varphi + r\cot\delta\operatorname{tang}\varphi = r$, und p

$= \frac{r(1-\cot\delta\operatorname{tang}\varphi)}{\sec\varphi}$ oder $p = r(\operatorname{coſ}\varphi - \cot\delta$

ſin

$\sin\varphi$). Das giebt $ef=\sqrt{(r^2-p^2)}=r\sqrt{(1-(\cos\varphi-\cot\delta\sin\varphi)^2)}=r\sqrt{(1-\sin\varphi^2(\cot\varphi-\cot\delta)^2)}$, und überdem hat man $Ch=r\cot\delta\sec\varphi$

$$=\frac{r}{\sin\delta}\cos\delta\sec\varphi=r.\mathrm{cosec}\,\delta\cos\delta\sec\varphi=$$

$a\cos\delta\sec\varphi$. Nun ſey $ef=q$, und $C\alpha=s$, ſo ergiebt die Vergleichung mit den 75. und 81. §. daß FG wegen der in dem zum Durchmeſſer fg gehörigen 34 F.
Kreiſe befindlichen leuchtenden Puncte einen Schatten werfe, deſſen Projection $\varepsilon\zeta=FG$

$$-\frac{2q}{\sqrt{(a^2\cos\delta^2\sec\varphi^2-q^2)}}.s,$$ und einen Halbſchatten, deſſen Projection $\mu=FG$

$$+\frac{2q}{\sqrt{(a^2\cos\delta^2\sec\varphi^2-q^2)}}s$$ iſt; folglich iſt $\eta\mu=$

$$\vartheta\nu=\frac{q}{\sqrt{(a^2\cos\delta^2\sec\varphi^2-q^2)}}.s.$$ Im Dreyeck $\alpha C\beta$ aber hat man $\sin\varphi:\alpha\beta=\sin(\alpha-\delta):s$, also $\alpha\beta=X\vartheta=\frac{s\sin\varphi}{\sin(\alpha-\delta)}$, mithin $X\vartheta:\vartheta\nu$

$$=\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\delta)}:\frac{q}{\sqrt{(a^2\cos\delta^2\sec\varphi^2-q^2)}},$$ oder

$$\frac{\vartheta\nu}{X\vartheta}=\frac{q\sin(\alpha-\delta)}{\sin\varphi\sqrt{(a^2\cos\delta^2\sec\varphi^2-q^2)}}.$$ Weil nun q in Vergleichung mit a allemahl ſehr klein bleibt, ſo iſt beynahe $\frac{\vartheta\nu}{X\vartheta}=\frac{q\sin(\alpha-\delta)}{a\cos\delta\,\mathrm{tang}\,\varphi}$

$$=\frac{q\sin(\alpha-\delta)\cot\varphi}{a\cos\delta}=$$

$$\frac{r \sin(\alpha - \delta) \surd (\cot\varphi^2 - \operatorname{coſ}\varphi^2 (\cot\varphi - \cot\delta)^2)}{a \operatorname{coſ}\delta}.$$

Aber $\operatorname{coſ}\varphi$ iſt beynahe beſtändig $= 1$, alſo beynahe

$$\frac{\vartheta\nu}{X\vartheta} = \frac{r \sin(\alpha - \delta) \surd (2 \cot\varphi \cot\delta - \cot\delta^2)}{a \operatorname{coſ}\delta}.$$

Wenn $\varphi = \delta$ wird, ſo hat man $\frac{\vartheta\nu}{X\vartheta}$ $= \frac{r \cot\delta \sin(\alpha - \delta)}{a \operatorname{coſ}\delta} = \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\operatorname{coſ}\delta}$, weil $r \cot\delta$ beynahe $= a$ angenommen iſt. Es iſt aber $B\beta : \sin\delta$ $= AC \operatorname{coſec}\alpha : \sin(\alpha - \delta)$,

alſo $B\beta = XL = \frac{AC \operatorname{coſec}\alpha \sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)}$

und $Ln = AC \operatorname{coſec}\alpha \operatorname{tang}\delta$, folglich $\frac{Ln}{XL}$ $= \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(\alpha - \delta)}{\sin\delta} = \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\operatorname{coſ}\delta}$, welches mit dem vorigen überein kommt. Das Verhältniß $\frac{\vartheta\nu}{X\vartheta}$ iſt anfangs unendlich groß, wenn $\varphi = 0$ angenommen wird, und nimmt ab, wenn φ wächſt; daraus ergiebt ſich, daß die Gränze $n\nu X$, $m\mu W$ des Halbſchattens keine grade ſondern eine krumme Linie ſey, zu deren Verzeichnung die gefundenen Formuln dienen würden.

84. §.

Dieſe Aufgabe kann zur Probe dienen, wie man ſich verhalten müſte, wenn man in jedem Fall nicht allein den projicirten Schatten, ſondern auch den Halbſchatten eines Körpers auf einer Ebene nach ſei-

ſeiner Geſtalt und Gröſſe finden wollte; die Unterſuchung hat aber nicht ſo ſehr vielen practiſchen Nutzen, daß es der Mühe verlohnte, darüber umſtändlicher zu ſeyn, und es kann genügen, folgende allgemeine Sätze zu merken.

1.) Jeder Schatten, den ein dem Sonnenlicht ausgeſetzter dunkler Körper auf eine Ebene wirft, iſt mit einem Halbſchatten umgeben.

2.) Dieſer Halbſchatten verurſacht, daß die eigentliche Gränze des vollen Schattens nicht recht genau kenntlich ſeyn kann, weil der Halbſchatten von der Gränze des vollen Schattens bis zur Gränze der völligen Erleuchtung allmählig heller wird, und ſich auf der einen Seite im vollen Schatten, auf der andern Seite im vollen Licht allmählig verliert.

3.) Je näher der dunkle Körper der Ebene iſt, die den Schatten auffängt, deſto ſchärfer unterſcheiden ſich Licht und Schatten von einander: je weiter aber der dunkle Körper von der Ebene entfernt iſt, deſto mehr breitet ſich der Halbſchatten aus, und deſto kleiner wird der volle Schatten. Wenn des dunklen Körpers Entfernung von der Ebene mehr denn 215mahl gröſſer iſt, als des Körpers gröſter Durchmeſſer, in einer Ebene, die durch den Mittelpunct des Körper und der Sonne geht, ſo genommen, daß er auf beyden Seiten die Gränze der Erleuchtung trift; ſo wirft der Körper gar keinen vollen Schatten mehr, ſondern nur Halbſchatten.

85 §.

In ſolchen Fällen, wo der Halbſchatten nicht ſehr merklich iſt, wird die Unterſuchung über die Geſtalt und Gröſſe des Schattens ſehr erleichtert, wenn

man die Sonne als einen einzigen leuchtenden Punct betrachtet, und ihren Mittelpunct dafür annimmt. Zwar findet man alsdenn den Schatten etwas gröſſer, als der Kernſchatten in der That iſt: man kann aber, wenn es nöthig iſt, den Fehler leicht verbeſſern, weil derſelbe vom ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne, und der Entfernung der Stelle, wohin der Schatten fällt, von dem dunklen Körper abhängt. So hätte man bey dieſer Vorausſetzung im 83. §. die Länge des Schattens $AB = AC\cot\alpha$, der Fehler aber wäre $Bb = AC(\cot\alpha = \cot(\alpha+\delta))$, denn der volle Schatten erſtreckt ſich eigentlich nur bis b. Weil indeſſen der Raum zwiſchen B und b noch nicht von der Hälfte der Sonne erleuchtet wird, der Raum zwiſchen B und β aber mehr Licht als von der Hälfte der Sonne erhält, ſo wird zwiſchen B und b der Halbſchatten merklich dunkler als zwiſchen B und β ſeyn, und wenn das Auge die Gränze des vollen Schattens ſchätzen ſoll, ſo wird es demſelben länger ſchätzen als er in der That iſt, weil nahe nach b hin nur ſehr wenig Licht kommt. (84. §. n. 2.) Wenn man AB die mittlere Länge des Halbſchattens nennt, ſo iſt dieſe eigentlich $= A\cot\alpha$, und die Länge des vollen Schattens $Ab = A\cot(\alpha+\delta)$. Beyder Unterſcheid $Bb = AC(\cot\alpha - \cot(\alpha+\delta))$ iſt bey einerley α der Höhe AC proportional. Bey einerley Höhe AC aber wächſt dieſer Unterſchied, wenn α abnimmt, und würde für $\alpha - o$, unendlich groß werden.

86 §.

Der Schatten, welchen ein lothrecht ſtehender Körper auf eine wagrecht liegende Ebene wirft, heiſt der

der grade Schatten. (umbra recta) Eine grade 36 F.
Linie AC die auf einer Ebene LM lothrecht ſteht, kommt in die wagrechte Lage, wenn die Ebene LM lothrecht geſetzt wird: und wenn man durch AC eine andre lothrechte Ebene CAD legt, ſo ſchneidet dieſe die vorige LM ſenkrecht. Steht alsdenn der Mittelpunct S der Sonne in der Ebene CAD, ſo wirft AC einen Schatten auf LM der zugleich in der Ebene CAD liegt, mithin von A nach D herunter lothrecht herab hängt. Er heiſt der verkehrte Schatten. (umbra verſa) Es kann hier AC die Mittellinie eines auf LM befeſtigten Körpers ſeyn, von ſeiner höchſten Spitze auf LM ſenkrecht gezogen, wie wenn ein grader Stift ſenkrecht in einer vertical ſtehenden Mauer befeſtiget wäre. Verlangt man alsdenn nur die Länge des verkehrten Schattens zu wiſſen, ſo kommt auſſer der Länge AC auf die übrigen Abmeſſungen des Körpers nichts an.

87. §.

Wenn der verlängerte Sonnenſtrahl SC, welcher der Vorausſetzung gemäß in einer verticalen Ebene durch AC liegt, die Ebene LM in B trift, ſo iſt AB die mittlere Länge des verkehrten Schattens: und weil AB vertical iſt, ſo iſt ABS der Abſtand der Sonne von der Scheitellinie, und $ACB = \alpha$ ihre Höhe über dem Horizont. (82. §.) Demnach hat man $AB = AC \tang \alpha$. Eigentlich wäre $Ab = AC \tang (\alpha - \delta)$ die Länge des vollen Schattens, und $Bb = AC (\tang \alpha - \tang (\alpha - \delta))$. Dieſer Unterſcheid wächſt mit α, und nimmt mit α ab. Beym graden Schatten war $Bb = AC (\cot \alpha - \cot (\alpha + \delta))$ (85. §.) und beyde Differenzen werden gleich, wenn

α

$\alpha = 45°$ iſt, weil alsdenn $\tang(\alpha - \delta) = \frac{1 - \tang\delta}{1 + \tang.\delta}$ $= \cot(\alpha + \delta)$, und $\cot\alpha = \tang\alpha = 1$ wird. Uebrigens wächſt Bb (34. Fig.) wenn α abnimmt, zugleich aber nimmt Bb (36. Fig.) ab; ſo wie umgekehrt Bb (34. Fig.) abnimmt, wenn α und mit α zugleich Bb (36 Fig.) wächſt. Setzt man dieſen Unterſcheid ſowohl beym graden, als verkehrten Schatten beyſeite, und nimmt die Länge des graden Schattens $= r$, die Länge des verkehrten Schattens $= v$, die Länge des dunklen Körpers $= a$ an, ſo iſt $r = a \cot\alpha$, und $v = a \tang\alpha$, vorausgeſetzt, daß man beyde mahl die Länge des mittlern Schattens verſtehet. Demnach iſt $r : v = \cot\alpha : \tang\alpha$ bey einerley Länge a des dunklen Körpers, der den Schatten wirft.

88. §.

Aus der gemeſſenen Länge des graden oder verkehrten Schattens läſt ſich die Höhe der Sonne, (wodurch allemahl die Höhe des Mittelpuncts der Sonne zu verſtehen iſt) finden, wenn die Länge des dunklen Körpers bekannt iſt, und der Fehler wegen des Halbſchattens beyſeite geſetzt wird. Man hat nemlich $\cot\alpha = \frac{r}{a}$, ſo wie $\tang\alpha = \frac{v}{a}$, und man muß hiebey vorausſetzen, daß die mittlere Länge des Schattens gemeſſen ſey. Könnte man den vollen Schatten genau meſſen, ſo wäre eigentlich

$\cot(\alpha + \delta) = \frac{r}{a}$, und $\tang(\alpha - \delta) = \frac{v}{a}$,

wenn r und v die Längen des vollen Schattens bedeuten. Man müſte alſo vom Winkel, deſſen Cotan-

tangente $= \frac{r}{a}$ noch 16′ abziehen, und zum Winkel, deſſen Tangente $\frac{v}{a}$ nach 16′ addiren, um die eigentliche Höhe des Mittelpuncts der Sonne zu haben. Weil es aber ſchlechthin nicht angehet, die Länge des vollen Schattens genau zu haben, und man bey dieſem Verfahren ohnehin nicht erwarten kann, die Höhe der Sonne bis auf einzelne Minuten genau zu finden; auch vermöge der im 85. §. ſchon angeführten Grunde das Auge den vollen Schatten allemahl etwas länger ſchätzt, als er in der That iſt; ſo wird man bey würklicher Meſſung der mittlern Länge des Schattens vielleicht näher kommen, als der Länge des vollen Schattens. Am bequemſten wird es allemahl ſeyn, den graden Schatten zu brauchen, wenn die Sonne über 45° über dem Horizont erhaben iſt, den verkehrten Schatten aber wenn ihre Höhe weniger als 45° beträgt. (87. §.)

Wäre die Höhe der Sonne bekannt, ſo lieſſe ſich aus der Länge des Schattens die Länge $AC = a$ des dunklen Körpers finden. So würde man dieſe Unterſuchung brauchen können, die Höhe eines Thurms zu finden, wenn man ſeinen Schatten auf einer horizontalen Ebene gemeſſen hätte. Es wird nemlich $a = \frac{r}{\cot\alpha} = r \tan\alpha$, wenn r die mittlere Länge des Schattens iſt; oder $a = r \tan(\alpha + \delta)$, wenn man durch r die Länge des vollen Schattens verſtehen will.

Die

Die Perſpectiv.

oder

Die Theorie von den Abbildungen der ſcheinbaren Geſtalt ausgedehnter Figuren und ihrer ſcheinbaren Lage gegen einander nach Verſchiedenheit der Lage und Entfernung des Auges.

Der I. Abſchnitt.

Von

den allgemeinen Gründen der Kunſt perſpectiviſche Zeichnungen zu entwerfen.

1. §.

Man weis ſchon aus dem 38. bis 41 §. der Optik, daß unſer Auge eigentlich nur Flächen, keine körperliche Ausdehnungen ſiehet, und daß unſre Empfindungen, die wir durchs Geſicht bekommen, allemahl mit der Erinnerung ehemahliger Empfindungen, die wir durchs Gefühl bekommen haben,
26 F. verbunden ſind. Wenn die Strahlen-Pyramide OBDFE, welche von einem ſichtbaren Gegenſtande BDFE in unſer Auge kommt, mit einer Ebene GHIK ge-

geſchnitten wird; ſo geht durch jeden Punct *b* der Durchſchnitts-Figur ein Strahl, der von einem eigenen dem Auge zugekehrten Punct B des Gegenſtandes kommt. Und weil jeder Strahl das Bild des Gegenſtandes wovon er ausgehet, mit ſich führet, ſo kann man annehmen, jeder Strahl BO laſſe in dem Punct *b* ſeines Durchgangs durch die Ebene das Bild von dem Punct B des Gegenſtandes, wovon er ausgehet, zurück: alsdenn hat das Auge einerley Empfindung, es mag den Strahl von dem Punct B des Gegenſtandes ſelbſt, oder von dem zugehörigen Punct *b* der Ebene GHIK bekommen, welche die Strahlen-Pyramide ſchneidet. Die Bilder aller Puncte des Gegenſtandes BDFE auf der Ebene GHIK werden demnach in dem Auge noch eben dieſelbe Empfindung erregen, wenn gleich der Gegenſtand BDFE ſelbſt weg wäre: es wird damit eben die Bewandniß haben, als wenn die Ebene GHIK durchſichtig wäre, und das Auge den Gegenſtand durch eine durchſichtige Tafel betrachtete. Die ganze Durchſchnitts-Figur *bdfe* iſt nun die Perſpectiviſche Abbildung des Gegenſtandes BDFE, und man erſiehet hieraus, woher es gekommen iſt, daß man der Wiſſenſchaft von den Regeln, einen Gegenſtand ſo zu zeichnen, wie er dem Auge vorkommen würde, wenn es denſelben durch eine durchſichtige Tafel betrachtete, den Nahmen der Perſpectiv beygeleget hat.

2. §.

Jede ſolche Ebene, wie GHIK, welche die Strahlen-Pyramide des von dem Auge betrachteten Gegenſtandes ſchneidet, heiſt in der Perſpectiv die 16 F.

Ta-

Tafel: der Durchſchnittspunct *b* eines Lichtſtrahls BO mit der Tafel aber das Bild oder die Projection des Puncts B wovon er ausgehet, ſo wie die ganze Durchſchnitts-Figur *bdef* mit der Strahlen-Pyramide das Bild, oder die Projection des betrachteten Gegenſtandes BDEF genannt wird.

Demnach iſt das Bild eines Puncts auf der Tafel ebenfalls ein Punct, und das Bild *bd* einer graden Linie BD iſt auf der Tafel auch eine grade Linie. Denn alle Strahlen, die von der graden Linie BD ins Auge O kommen, liegen in der Ebene eines Dreyecks OBD, und der Durchſchnitt dieſes Dreyecks mit der Tafel, die grade Linie *bd*, iſt das Bild von BD. Je weiter das Auge vom Object und der Tafel wegrückt, deſto mehr nähern ſich die Geſichtsſtrahlen, welche von allen betrachteten Puncten des Objects ins Auge kommen, der parallelen Lage; und wenn das Auge vom Object und der Tafel unendlich weit wegrückte; ſo würden alle dieſe Strahlen einander parallel werden, die Strahlen-Pyramide würde ſich in ein Prisma, oder wenn es ein Strahlen-Kegel iſt, ſo würde er ſich in einen Cylinder verwandeln.

Hat nun in eben dieſem Fall die Tafel eine ſolche Lage, daß alle dieſe parallelen Strahlen die Tafel ſenkrecht ſchneiden, ſo heiſſen ihre Durchſchnitspuncte mit der Tafel, **orthographiſche Projectionen** der dazu gehörigen Puncte des Objects, und alle zuſammen, oder die ganze Durchſchnitts-Figur der Tafel mit dem Strahlen-Prisma, oder dem Strahlen-Cylinder, heiſt die **orthographiſche Projection des Objects.** Dies iſt wenigſtens die eigentliche Bedeutung des Nahmens, die auch

mit

mit der Grammattiſchen Abſtammung übereinkommt. Man hat aber die Bedeutung dieſes Nahmens auch erweitert, und nennt die Projection ſchon orthographiſche, wenn nur die Geſichtsſtrahlen parallel ſind, geſetzt daß ſie auch die Tafel ſchief ſchnitten.

3. §.

Gewöhnlich betrachtet man die Tafel als eine durchſichtige Ebene, die zwiſchen dem Auge, und dem Gegenſtande befindlich iſt; an ſich aber iſt dies nicht nothwendig. Der Gegenſtand BDFE ſtehe 37 F. zwiſchen dem Auge O und der Tafel GHIK, und man verlängere alle Strahlen in dem Raum der optiſchen Pyramide OBDFE bis ſie die Tafel treffen; ſo giebt ſich auf derſelben ebenfalls eine Durchſchnitsfigur *bdfe*, das Auge empfindet einerley, der Strahl BO mag von B oder von *b* ausgehen, wenn *b* das Bild des Puncts B iſt. Demnach iſt auch in dieſem Fall *bdfe* das Bild oder die Projection des Gegenſtandes BDFE auf der Tafel. Wäre die Entfernung des Auges von der Tafel ſehr vielmahl gröſſer, als die Entfernung des Gegenſtandes von der Tafel; ſo würde ohnehin dem Auge dieſer Gegenſtand auf der Tafel ſelbſt den Raum *bdfe* einzunehmen ſcheinen. (47 §. Opt.)

Wäre O ein leuchtender Punct, und BDFE ein dunkler Körper, ſo wäre *bdfe* die Projection des Schattens auf der Ebene der Tafel. (68 §. Opt.)

4. §.

Wenn das Auge ſeine Stelle ändert, ſo ändert ſich nicht allein die Stelle, welche das Bild des betrachteten Gegenſtandes auf der Tafel einnimmt,

ſondern auch die Geſtalt deſſelben. Eben das erfolgt, wenn der Gegenſtand ſeine Stelle ändert. Ueberdem hängt, wie man ſehr leicht ſiehet, die Gröſſe des Bildes von den Entfernungen des Auges und des Gegenſtandes von der Tafel ab. Demnach läſt ſich keine perſpectiviſche Abbildung eines Gegenſtandes auf der Tafel entwerfen, bevor ſowohl die Lage des Auges, als auch die Lage des Gegenſtandes gegen die Tafel beſtimmt iſt: und hiezu bedient man ſich eben derjenigen Hülfsmittel, welche die Geometrie an die Hand giebt, um den Ort eines Puncts gegen eine Ebene beſtimmt anzugeben.

Was die Tafel ſelbſt für eine Lage hat, iſt zwar an ſich gleichgültig: wenn man indeſſen verticalſtehende Gegenſtände abbilden will, ſo iſt es am natürlichſten, daß man auch der Tafel die verticale
38 F. Stellung laſſe, damit aufrecht ſtehende Sachen auf der Tafel aufgerichtet erſcheinen. Es ſey LM eine verticale Linie, O das Auge, und zwiſchen beyden ſtehe die Tafel CD vertical. Wenn nun OM und OL die Tafel in I und K ſchneiden; ſo iſt IK das Bild von LM. (2. §.) Aber die Ebene OLM iſt vertical, folglich ihr Durchſchnitt IK mit der vertical ſtehenden Tafel ebenfalls vertical. Eben dieſe Vorausſetzung, daß die Tafel vertical ſtehe, wird gewöhnlich auch alsdenn angenommen, wenn man Gegenſtände abbilden will, die alle in einerley horizontalen Ebene liegen, wenn man nicht beſonderer Gründe halber davon abzugehen genöthiget iſt: deswegen werde ich mit eben dieſer Vorausſetzung den Vortrag der Gründe der Perſpectiv anfangen. In der That hat auch dieſe Vorausſetzung den Vortheil, daß man ſich dabey am leichteſten nach

und

und nach dazu gewöhnt, von demjenigen, was perſpectiviſche Zeichnungen eigenes haben, ſich die rechte Vorſtellung zu machen.

5. §.

Es ſey alſo CD die vertical ſtehende Tafel, 38 F. und das Auge ſtehe in O: aus demſelben ſey OR auf die Tafel ſenkrecht gezogen, ſo iſt OR der Abſtand des Auges von der Tafel, und der Punct R, worin OR die Tafel trift, heiſt der Augenpunct. Wenn die Stelle deſſelben auf der Tafel gegeben, oder willkührlich angenommen iſt, und überdem der Abſtand des Auges von der Tafel gleichfalls bekannt iſt; ſo iſt die Lage des Auges gegen die Tafel völlig beſtimmt. Dieſe Entfernung OR des Auges von der Tafel heiſt hier kurz **der Abſtand des Auges.**

Durch den Augenpunct R ſey in der Tafel CD eine verticale Linie RT gezogen, ſo iſt die Ebene CRT vertical, und zugleich auf der Tafel ſenkrecht: ſie heiſt hier die **Verticalfläche des Auges**, oder ſchlechthin die **Ebene des Auges**; ihre Durchſchnittslinie RT mit der Tafel heiſt die **Verticallinie des Auges**, oder auch ſchlechthin die Linie des Auges.

Noch ſey durch den Augenpunct R die grade Linie RH auf der Tafel horizontal gezogen, ſo iſt die Ebene ORH horizontal, und ſie heiſt hier der **Horizont des Auges**, ſo wie ihre Durchſchnittslinie RH mit der Tafel die **Horizontallinie des Auges**, oder ſchlechthin die **Horizontallinie.**

Nun mag ein Punct des abzubildenden Gegenſtandes hinter der Tafel liegen, wo er wolle, ſo läßt ſich der Ort deſſelben beſtimmt angeben, wenn

man weis, wie weit derſelbe von der Tafel, von der Ebene des Auges, und vom Horizont des Auges entfernt iſt: zugleich muß man wiſſen, ob er unter oder über dem Horizont des Auges, rechter oder linker Hand der Ebene des Auges liegt. Wenn G ein Punct im Horizont des Auges iſt, und man zieht GH auf die Tafel ſenkrecht, ſo iſt RH ſeine Entfernung von der Ebene des Auges, und HG ſeine Entfernung von der Tafel. Liegt L über dem Horizont des Auges, und man zieht LG auf dieſen Horizont, GH aber auf die Tafel ſenkrecht, ſo iſt GL ſeine Höhe über dem Horizont des Auges, GH und RH ſeine Entfernungen von der Tafel und der Ebene des Auges. Eben ſo iſt GM die Tiefe des Puncts M unter dem Horizont des Auges, GH und RH ſeine Entfernungen von der Tafel und der Ebene des Auges.

6. §.

Wenn entweder alle, oder doch die merkwürdigſten Puncte der abzubildenden Gegenſtände in einerley horizontalen Ebene AB liegen, ſo iſt die Tiefe GM aller dieſer Puncte, oder der Ebene AB, unter dem Horizont des Auges einerley mit der Höhe des Auges über dem Horizont AB: dieſe heiſt alsdenn ſchlechthin die Höhe des Auges. Man kann die horizontale Ebene AB als die Fundamental-Ebene betrachten, ihre Durchſchnittslinie CE mit der Tafel iſt horizontal, und ſie heiſt die Fundamentallinie oder Grundlinie dieſes Horizonts. Dieſe Grundlinie CE des Horizonts, und die Horizontallinie RH des Auges ſind demnach allemahl parallele Linien, und ihre Entfernung RT von einander

der iſt der Höhe des Auges gleich. Es werden nemlich CE und RT einander irgendwo in T ſchneiden, weil CE horizontal, und RT vertical iſt, alsdenn iſt RT der Abſtand der Ebene AB vom Horizont des Auges, oder hier die Tiefe der Ebene AB unter dem Horizont des Auges, oder welches einerley iſt, die Höhe des Auges über AB.

Der Punct T, worin die Linie RT des Auges die Grundlinie CE des Horizonts AB ſchneidet, heiſt auch der **Fußpunct des Auges**. Wenn nemlich OS auf AB ſenkrecht iſt, ſo iſt OS = und # RT, mithin wird ORTS ein Rechteck, und wenn in S ein Zuſchauer auf dem Horizont AB aufrecht ſteht, ſo geht eine grade Linie vom Fuß S des Zuſchauers auf die Tafel ſenkrecht gezogen durch T, und es iſt ST dem Abſtand des Auges OR gleich.

7. §.

Ein Punct M im Horizont AB mag hinter der Tafel wo man will liegen, ſo wird doch das Bild I deſſelben allemahl zwiſchen den beyden Parallelen RH und CE liegen müſſen. Denn das Bild I liegt da, wo OM die Tafel durchboret. Man richte MG lothrecht auf, und mache MG = OS, ſo liegt G im Horizont des Auges, und RH wird von OG in *g* geſchnitten, ſo wie CE von SM in W geſchnitten wird. Beyde Puncte W und *g* liegen alſo in der Tafel CD und in der verticalen Ebene OSMG, mithin iſt W*g* beyder Ebenen Durchſchnittslinie. In beyden Ebenen liegt auch I, mithin liegt I in W*g*, und W*g* iſt auf dem Horizont AB ſenkrecht (319. §. Geom.) Ueberdem ſind OS und MG gleich groß und parallel, (308. §. Geom.) alſo iſt OSMG ein Pa-

Parallelogramm, und OM eine Diagonale deſſelben. In dieſer Diagonale liegt I, da wo OM und W*g* einander ſchneiden, und dieſer Durchſchnittspunct liegt zwiſchen W und *g*, weil auch W*g* mit OS und MG parallel iſt: mithin liegt I zwiſchen den parallelen CE und RH. Dieſerwegen heiſt die Horizontallinie RH des Auges auch die Gränzlinie des Horizonts AB, weil kein Bild eines Puncts M im Horizont AB über RH hinaus liegen kann.

8. §.

Wenn MN auf CE ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt auch MN auf CD ſenkrecht, und mit OR parallel. Die Ebene dieſer Parallelen, ſchneidet die Tafel in der graden Linie NR, weil N und R in der Ebene ONMR und in der Tafel zugleich liegen. Aber OM liegt in der Ebene ONMR, mithin auch das Bild I des Puncts N, und weil daſſelbe zugleich in der Tafel liegt, ſo muß daſſelbe allemahl in NR liegen. Man ſiehet wohl, daß I deſto näher bey N liege, je weniger M von N oder von der Tafel entfernt iſt: wenn M von N weiter wegrückt, ſo rückt I gegen R zu. Indeſſen kann I mit R nie zuſammen fallen, es mag NM ſo groß werden, wie man will. Würde NM unendlich groß, ſo würde OM mit NM parallel werden, und I würde in R fallen. Demnach iſt NR das Bild einer ins unendliche fortlaufenden horizontalen Linie, welche die Grundlinie der Tafel in N ſenkrecht ſchneidet: oder NR iſt das Bild einer ins unendliche fort laufenden horizontalen Linie, welche mit der Ebene des Auges in der Entfernung TN parallel iſt.

Die Entfernung TN von der Ebene des Auges mag ſo groß oder ſo klein ſeyn, wie ſie wolle, ſo wird doch das Bild von NM allemahl gegen den Augenpunct zu laufen. Daraus folgt der in der ganzen Perſpectiv vornemlich merkwürdige Satz:

Die Bilder aller auf der Grundlinie *CE* ſenkrechten horizontalen Linien laufen im Augenpunct zuſammen.

Bey einigen Practiſchen Schriftſtellern heiſſen dieſe in den Augenpunct zuſammen laufenden Linien, wie NR, Geſichtslinien.

9. §.

Weil NM die wahre Entfernung des Puncts M von der Grundlinie der Tafel, und NI das Bild von NM iſt, ſo heiſt NI die perſpectiviſche Entfernung des Bildes I von der Grundlinie. Wenn gleich die Tafel (4. §.) vertical ſtehend angenommen wird, ſo betrachtet man doch NI als horizontal liegend, weil man ſich die Tafel als durchſichtig vorſtellt. Wenn dagegen IK das Bild der vertical ſtehenden Linie ML iſt, ſo wird auch IK als vertical ſtehend betrachtet, wie denn auch IK würklich vertical iſt. Iſt ML die wahre Höhe eines vertical ſtehenden Objects, ſo iſt IK ſeine perſpectiviſche Höhe. Es iſt ſehr gut, daß man ſich gleich anfangs an dieſe Vorſtellungen gewöhnt, weil hierauf die Hauptſache bey perſpectiviſchen Zeichnungen ankommt; alles was perſpectiviſche Zeichnungen eigenes haben, und wodurch ſie ſich von Geometriſchen Grundriſſen unterſcheiden beruhet auf dieſen Vorſtellungen. Die ſenkrechte Entfernung NM des Puncts M hinter der

Tafel heiſt auch ſeine Tiefe hinter der Tafel: man ſagt, der Punct M liege ſo und ſo viele Fuß tief hinter der Tafel, und in dieſer Rückſicht heiſt auch NI die perſpectiviſche Vertiefung ſeines Bildes I.

Weil IW auf CE ſenkrecht ſteht, ſo lieſſe ſich die Lage des Bildes I auf der Tafel durch TW und WI beſtimmen, weil TW die Entfernung des Bildes von der Vertical-Linie des Auges und WI die Entfernung deſſelben von der Grundlinie iſt. Statt TW und WI können auch Rg und gI zu eben der Abſicht dienen, da dann Rg mit TW einerley, und gI die Tiefe des Bildes unter der Horizontallinie des Auges iſt. Man kann aber die Lage des Bildes I eben ſo gut, und bey perſpectiviſchen Zeichnungen noch bequemer durch TN und NI beſtimmen, da dann TN die Entfernung des abzubildenden Puncts von der Ebene des Auges, und NI ſeine perſpectiviſche Vertiefung iſt. Jene iſt allemahl gegeben, und die Lage der Linie NI iſt allemahl bekannt, weil ſie vermöge des 8. §. in den Augenpunct läuft. Demnach darf man nur NI ſuchen, um die Stelle des Bildes I auf der Tafel zu finden.

Hiebey müſſen nun folgende Stücke jedesmahl gegeben ſeyn, die in der Folge beſtändig mit den hier angezeigten Buchſtaben ſollen bezeichnet werden: Die Entfernung des Auges von der Tafel $= D$, die Höhe des Auges über dem Horizont des abzubildenden Puncts $= a$, die Entfernung des abzubildenden Puncts von der Ebene des Auges $= \Delta$, deſſelben Entfernung von der Tafel $= \delta$.

10. §.

Der Augenpunct R iſt auf der Tafel ge- 39 F.
geben nebſt der Entfernung D des Auges von der Tafel und der Höhe a des Auges über dem Horizont eines abzubildenden Puncts M: auch ſind die Entfernungen Δ und δ dieſes Puncts von der Ebene des Auges und der Tafel gegeben: man ſoll das Bild deſſelben auf der Tafel finden.

Aufl. Man ziehe RT vertical, RH horizontal, und CE durch T mit RH parallel; ſo iſt CE die Grundlinie, RH die Gränzlinie des Horizonts. Auf CE nehme man TN $=\Delta$, und zwar ſo, daß N rechter Hand oder linker Hand von T falle, nachdem der abzubildende Punct rechter oder linker Hand der Ebene des Auges liegt. Hiernächſt ziehe man NR, ſo muß das geſuchte Bild in NR liegen. Auf RH nehme man RF $=$ D, auf CE aber NG $=\delta$ und zwar ſo, daß F und G nicht auf einerley Seite von NR fallen. Endlich ziehe man FG, welche, wenn der zuletzt bemerkte Umſtand beobachtet wird, NR nothwendig in I ſchneidet, und eben dieſer Durchſchnittspunct I iſt das geſuchte Bild.

Beweis. In der Ebene ONMR (38 Fig.) 38 F.
ſind die Dreyecke MNI und ORI einander ähnlich, mithin hat man $OR:MN = RI:NI$, alſo auch $OR+MN:MN = RI+NI:NI$, oder $D+\delta:\delta = RN:NI$, folglich $NI = \frac{\delta}{D+\delta}\cdot RN$. In der 39. Figur ſind RT, TN, ſo groß gemacht, als die mit eben dieſen Buchſtaben bezeichneten Linien in der

38ſten Fig. angenommen werden, alſo hat auch RN in beyden Figuren einerley Lage und Gröſſe, weil RTN in beyden Figuren $= 90°$ iſt. Ueberdem iſt in der 39 Fig. das Dreyeck $RFI \sim NIG$, alſo $RF : NG = RI : NI$, mithin $RF + NG : NG = RI + NI : NI$. Weil nun $RF = D$, $NG = \delta$, genommen iſt, ſo hat man $D + \delta : \delta = NR : NI$, und $NI = \frac{\delta}{D+\delta} . NR$, wie erfordert wird.

Aus NI findet man $RI = NR - NI = NR - \frac{\delta}{D+\delta} . NR$, alſo $RI = \frac{D}{D+\delta} . NR$.

Wollte man TW und WI brauchen, die Lage des Bildes I zu beſtimmen, ſo müſte man erwägen, daß WI mit RT parallel iſt, mithin $RN : RI = TN : TW$, oder $1 : \frac{D}{D+\delta} = \Delta : TW$, und das giebt $TW = \frac{D}{D+\delta} . \Delta$. Ferner iſt $NR : RT = NI : WI$, oder $NR : a = \frac{\delta}{D+\delta} . NR : WI$, alſo $WI = \frac{\delta}{D+\delta} . a$.

Aus WI hat man auch $gI = Wg - WI = a - \frac{\delta}{D+\delta} . a = \frac{D}{D+\delta} . a$, und die Lage des Bildes wird auch durch $Rg = \frac{D}{D+\delta} . \Delta$, und

gI =

$gl = \frac{D}{D+\delta} \cdot a$ beſtimmt.

11 §.

Die Puncte F und G (39 Fig.) heiſſen die Diſtanz-Puncte, und zwar jener insbeſondre der Diſtanz-Punct des Auges, dieſer des abzubildenden Puncts; NR heiſt die Geſichtslinie des abzubildenden Puncts, RF, NG, die Diſtanz-Linien, und FG die Durchſchnittslinie. Alle dieſe Linien ſind nöthig, um den Punct I durch Zeichnung zu finden. Wollte man ihn durch Rechnung ſuchen, ſo darf man nur erwägen, daß $NR = \sqrt{(aa + \Delta\Delta)}$ ſey, mithin hat man $NI = \frac{\delta}{D+\delta} \sqrt{(aa + \Delta\Delta)}$ aus D, Δ, δ und a.

Hiebey muß man ſich erinnern, daß eigentlich NR das Bild einer von der Grundlinie der Tafel, aus dem Punct N, im Horizont ins unendliche fortlaufenden, auf der Tafel ſenkrechten, Linie ſey, die von der Ebene des Auges um den Abſtand $TN = \Delta$ entfernt iſt. (8 §.) Setzt man die Länge dieſes Bildes $= L$, ſo iſt $L = \sqrt{(aa + \Delta\Delta)}$ eine bekannte Linie, und man hat $NI = \frac{\delta}{D+\delta} \cdot L$.

Dieſe Formul könnte dienen, jede Geſichtslinie, wie NR in perſpectiviſche ſo genannte vertiefte Fuſſe einzutheilen. Wenn nemlich D, Δ, a, einerley bleiben, und man ſetzt nach und nach $\delta = 1$ Fuß, $\delta = 2$ Fuß, u. ſ. f. ſo findet man die Vertiefung NI von 1 Fuß, 2 Fuß, u. ſ. f.

Man

Man ſchreibt der Vertiefung NI eben ſo viele Fuſſe im perſpectiviſchen Maaß zu, als NM im geometriſchen Maaſſe lang iſt; alsdenn aber ſind die vertieften perſpectiviſchen Fuſſe ungleich lang, und deſto kürzer, je weiter ſich die Vertiefung gegen R erſtreckt, da ſtatt deſſen die geometriſchen Füſſe alle
38 F. gleich lang ſind. Es ſey z. E. NM bey α, β, γ, in vier gleiche Theile getheilt, und jeder Theil ſey 1 Fuß lang. Man ziehe $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, ſo geben ſich die Bilder a, b, c, der Puncte α, β, γ, auf der Tafel, und es iſt Na der erſte, ab, der zweyte, bc der dritte, cI der vierte vertiefte Fuß, wo man ſchon aus Betrachtung der Figur ſiehet, daß dieſe Theile deſto kleiner ausfallen, je weiter ſie gegen R zu liegen. Wenn überhaupt von N nach M n Füſſe ſind, und Mm iſt der $(n+1)$te Fuß, ſo iſt Ii der $(n+1)$te vertiefte Fuß. Es iſt aber $NI = \frac{NM}{D+NM} \cdot NR$ und $Ni = \frac{Nm}{D+Nm} \cdot NR$ (10 §.) alſo $Ii = Ni -$

$$NI = \left(\frac{Nm}{D+Nm} - \frac{NM}{D+NM}\right) \cdot NR$$

$$= \frac{D.(Nm - NM).NR}{(D+Nm)(D+NM)} = \frac{D.NR.}{(D+Nm)(D+NM)}$$

$.Mm$; und dieſer Ausdruck zeigt, daß Ii ein deſto kleineres Stück von Mm ſey, je gröſſer NM iſt.

39 F. Auf der Tafel ſelbſt kann man NI leicht in vertiefte Füſſe auf folgende Art eintheilen. Man theile $NG = \Delta$ bey α, β, γ, u. ſ. f. in ſo viele gleiche Theile als die Entfernung Δ geometriſche Fuſſe faſ-

ſet,

ſet, welches alſo eben das verjüngte Maaß ſeyn muß, in welchem RF=D angenommen iſt; hierauf ziehe man die Durchſchnittslinie $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$, u. ſ. f. ſo beſtimmen die Durchſchnittspuncte *a*, *b*, *c*, u. ſ. f. die Länge des erſten, zweyten und der folgenden vertieften Fuſſe.

12 §.

Der Augenpunct *R* iſt auf der Tafel ge- 38
geben nebſt der Entfernung *D* des Auges von 39 F.
der Tafel und der Höhe *a* des Auges über der
Fundamentalebene: auch ſind die Entfernungen Δ nnd δ eines über der Fundamentalebene liegenden Puncts *L* von der Ebene des Auges und der Tafel gegeben, nebſt ſeiner Höhe $LM = \alpha$ über der Fundamentalebene: man ſoll das Bild *K* deſſelben auf der Tafel finden.

Aufl. Weil Δ und δ zugleich die Entfernungen des Puncts M im Horizont von der Ebene des
Auges und der Tafel ſind; ſo ſuche man das Bild 39 F.
I des Puncts M wie im 10 §. Aus N richte man $NV = \alpha$ über der Fundamentallinie CE ſenkrecht auf, ziehe RV, und IK mit NV parallel, ſo iſt K das geſuchte Bild.

Beweis. Wenn LV auf CD ſenkrecht fällt, 38 F.
ſo iſt LV = und # NM, alſo auch NV # und $= LM = \alpha$: mithin iſt NV ſo wie LM vertical, und IK iſt ebenfalls vertical, (4 §.) folglich wird IK auf der Tafel (39 Fig.) nach der gegebenen Vorſchrift richtig gefunden.

Weil

Weil IK und NV parallel ſind, ſo hat man NR:RI=NV:IK, und RI $= \frac{D}{D+\delta} \cdot$ NR, alſo iſt $1 : \frac{D}{D+\delta} = \alpha$:IK, folglich IK $= \frac{D}{D+\delta} \cdot \alpha$. Dieſer Ausdruck dient aus der wahren lothrechten Höhe α die zugehörige perſpectiviſche Höhe IK auch durch Rechnung zu finden. Letztere iſt allemahl kleiner als α, und deſto kleiner je gröſſer δ iſt. Man ſchreibt auch hier der perſpectiviſchen Höhe ſo viele perſpectiviſche Füſſe zu, als die wahre Höhe faſſet, ſie heiſſen hier verjüngte oder verkürzte Füſſe, und ſie unterſcheiden ſich von den vertieften Füſſen (11. §.) dadurch, daß ſie insgeſamt gleich groß ſind, da jene bey gröſſerer Vertiefung immer kleiner ausfallen. Man ſiehet wohl daß IK ſich wie α verhält, wenn δ ſich nicht ändert. Wenn demnach $N\delta = 1$ Fuß iſt, ſo iſt die zugehörige perſpectiviſche Höhe ID $= \frac{D}{D+\delta} \cdot 1$ Fuß; iſt $N\varepsilon = 2$ Fuß, ſo wird die perſpectiviſche Höhe $Ie = \frac{D}{D+\delta} \cdot 2$ Fuß, mithin auch $de = \frac{D}{D+\delta} \cdot 1$ Fuß. Ueberhaupt wenn $Nd = n$ Fuß, und NV $= (n+1)$ Fuß iſt, ſo ſind die zugehörigen perſpectiviſchen Höhen $Ih = \frac{D}{D+\delta} \cdot n$ Fuß, und IK $= \frac{D}{D+\delta} (n+1)$ Fuß, mithin auch $hk = \frac{D}{D+\delta} \cdot 1$ Fuß.

Will

Will man alſo auf der Tafel die perſpectiviſche Höhe IK in ihre perſpectiviſchen Füſſe theilen, ſo theilt man die wahre Höhe NV bey δ, ε, ζ, η, ϑ, in ihre geometriſchen Füſſe in eben das Maaß, worin die Diſtanz-Linie RF$=$D, NG$=\delta$, und die Höhe RT$=a$ angenommen ſind, und ziehet aus R in alle Theilungspuncte Linien, ſo geben ſich die Durchſchnittspuncte d, e, f, g, h, für die perſpectiviſchen Füſſe in IK. Demnach läſt ſich jede perſpectiviſche Höhe nach einem geometriſchen Maaßſtab ausmeſſen, der aus dem Maaßſtaab für die Diſtanzlinien und Höhen entſteht, wenn man ihn in dem Verhältniß $D+\delta:D$ verjüngt.

13 §.

Das Bild *Ip* einer graden Linie *MP* die im Horizont *AB* mit der Fundamentallinie parallel liegt, iſt ebenfalls mit der Fundamentallinie parallel. 38 F.

Beweis. Weil MP mit CE parallel iſt, ſo iſt MP auch mit der Tafel CD parallel, (311 §. G.) Demnach können Ip und MP nicht zuſammen ſtoſſen, weil ſonſt MP mit der Tafel zuſammen ſtieſſe, worin Ip liegt. Weil nun Ip und MP in einerley Ebene OMP liegen, ſo iſt Ip ⧺ MP, und weil CE ⧺ MP war, ſo iſt auch Ip ⧺ CE.

Demnach hat man OM:OI$=$MP:Ip, aber auch OM:OI$=$NR:RI, alſo NR:RI$=$MP:Ip, d. i. $NR : \frac{D}{D+\delta} \cdot NR = MP : Ip$, (10 §.) mithin wird $Ip = \frac{D}{D+\delta} \cdot MP$, da dann $\delta=$MN die

Ent-

Entfernung der Parallele MP von der Fundamentallinie bedeutet. Dieſer Ausdruck giebt die perſpectiviſche Länge einer mit der Fundamentallinie parallelen Linie MP aus ihrer wahren Länge. Jene iſt allemahl kleiner als dieſe, und deſto kleiner, je gröſſer δ iſt. Der Ausdruck iſt dem im 12 §. gefundenen ganz ähnlich, welcher die perſpectiviſche Höhe aus der wahren Höhe einer vertical ſtehenden Linie beſtimmt, welches daher rührt, weil dergleichen verticale Linien ebenfalls mit der Tafel parallel ſind.

Wenn demnach die Stellen eines Endpuncts M durch ſeine Entfernungen von der Ebene des Auges und der Tafel beſtimmt iſt, ſo iſt es leicht das Bild einer ſolchen Parallele von gegebener Länge auf
39 F. der Tafel zu zeichnen. Man ſuche das Bild I des Anfangspuncts M nach dem 10 §. ziehe $Ip \# CE$, nehme NQ von ſo vielen Füſſen, als MP faſſet, und ziehe RQ ſo giebt ſich der Durchſchnittspunct p und Ip iſt das verlangte Bild.

Dieſem Bilde ſchreibt man wiederum eben ſo viele perſpectiviſche Füſſe zu, als MP geometriſche Füſſe lang iſt, und das ſind hier wie bey den Höhen verkürzte übrigens aber gleiche Füſſe. Jeder verkürzte Fuß wird aus dem geometriſchen, wenn man ihn mit $\frac{D}{D+\delta}$ multiplicirt, oder den geometriſchen Maaßſtab in dem Verhältniß $D+\delta : D$ verjüngt.

39 F. Will man Ip in Perſpectiviſch-verkürzte Füſſe eintheilen, ſo theile man NQ in gleiche Geometriſche Füſſe ein, und ziehe nach alle Theilungspuncte

α, β, γ, G, T, λ, Q, die Durchſchnittslinien RQ, Rλ, RT, RG, u. ſ. f. ſo ſind die Durchſchnittspuncte mit Ip die geſuchten Theilungspuncte.

14. §.

Eine ebene Figur die horizontal liegt, auf der vertical ſtehenden Tafel perſpectiviſch zu zeichnen.

Aufl. Wenn die Figur gradlinicht iſt, ſo kömmt die Sache darauf an, daß man die Bilder aller Seitenlinien ſuche. Weil nun das Bild einer graden Linie ebenfalls eine grade Linie iſt, die mit dem Auge und der abzubildenden Linie in einer Ebene liegt; (2 §.) ſo wird nur erfordert, daß man die Projectionen der Endpuncte ſuche, da dann die grade Linie zwiſchen dieſen Projectionen das Bild der graden Linie iſt. Wenn demnach eine ebene gradlinichte Figur, die in der Fundamental-Ebene liegt, perſpectiviſch abgebildet werden ſoll, ſo wird erfordert, daß man die Projectionen aller Winkelpuncte ſuche, und dieſe hiernächſt nach der Ordnung mit graden Linien zuſammen ziehe, ſo giebt ſich das Bild der Figur. Dies ſetzt voraus, daß man die Entfernungen der Winkelpuncte von der Ebene des Auges und der Tafel kenne, und dieſe ſind nicht allemahl unmittelbar gegeben. Oft iſt nur die Lage einer Seitenlinie gegen die Fundamentallinie mit den Entfernungen eines ihrer Endpuncte von der Ebene des Auges und der Tafel gegeben: wenn alsdenn alle Seiten und Winkel der Figur bekannt ſind, ſo kann man die nöthigen Entfernungen der übrigen Winkelpuncte durch Rechnung, oder auch durch Zeichnung finden.

Den letztern Weg erwählt man gewöhnlich, und verhält ſich dabey auf folgende Art.

40 F. Man zeichnet die gradlinichte Figur ABQ unter der Fundamentallinie CE in der gehörigen Entfernung und Lage. Ich nehme hier Kürze halber an, ABQ ſey ein Dreyeck, die Grundlinie AB mit der Fundamentallinie parallel, und um den Abſtand AN = B*n* davon entfernt. Man laſſe nun von allen Winkelpuncten auf die Fundamentallinie CE die Lothe AN, B*n*, Q*v*, fallen; und weil auch bekannt ſeyn muß, wie weit die Verticalfläche des Auges von der Ebene eines der Winkelpuncte, wie A, entfernt ſeyn ſolle, ſo kann man NT = △ nach der einen oder der andern Seite von N auf CE auftragen: hier alſo linker Hand, wenn das ganze Dreyeck rechter Hand der Verticalfläche des Auges liegen ſoll. Hierauf wird TR über CE ſenkrecht aufgerichtet, und der Höhe des Auges gleich gemacht, ſo iſt R der Augenpunct, und RH mit CE parallel gezogen die Horizontallinie des Auges, ſo wie TR die Verticallinie deſſelben. Noch macht man RF = D, ſo iſt F der Diſtanzpunct des Auges. Endlich nimmt man NG = NA, $ng = nB$, $\nu\gamma = \nu C$, ſo ſind G, *g*, γ, die Diſtanzpuncte für die Winkelſpitzen, RN und FG beſtimmen das Bild *a* des Puncts A, R*n* und F*g* das Bild *b* des Puncts B, Rν und Fγ das Bild *q* des Puncts Q; das Dreyeck *abq* aber wird das Bild des Dreyecks ABQ.

Wäre ABQ eine krummlinichte Figur, z. E. ein Kreis; ſo könnte man in ihrem Umfange ſo viele Puncte, wie man will, annehmen, und ihre Projectionen auf der Tafel eben ſo, wie hier die Projec-

tio-

tionen der Puncte A, B, Q, ſuchen. Durch die projicirten Puncte muß hiernächſt das Bild der krummen Linie ſelbſt aus freyer Hand durchgeführet werden, welches deſto richtiger gerathen wird, je mehr Puncte man im Umfange der abzubildenden Linie angenommen und auf der Tafel abgebildet hat.

Man ſiehet indeſſen wohl, daß dies Verfahren überhaupt deſto mühſamer werde, je mehr Puncte im Umfang der Figur vorhanden ſind, deren Projectionen man ſuchen muß. Wenn die Figur gradlinicht iſt, und unter ihren Seitenlinien ſolche vorkommen, die auf der Grundlinie ſenkrecht, oder damit parallel ſind; ſo laſſen ſich einige Winkelpuncte bequemer finden, ohne daß man die in den Diſtanzpunct des Auges laufenden Durchſchnittslinien alle nöthig hat. Ein Beyſpiel giebt das Bild *abq* des Dreyecks ABQ, wo *ab* mit CE parallel ſeyn muß. (13 §.) Nachdem alſo die Geſichtslinien RN, R*n*, gezogen worden, und *a* gefunden war, konnte man *ab* mit CE parallel ziehen, ihr Durchſchnitt mit R*n* beſtimmet ſchon *b*, und ſo blieb nur übrig, den Punct *q* zu ſuchen.

Die Zeichnung des Geometriſchen Grundriſſes der abzubildenden Figur unter der Fundamentallinie iſt nur deswegen nöthig, um die Entfernungen der Winkelpuncte von der Ebene des Auges und der Tafel zu finden. Wenn dieſe entweder unmittelbar gegeben ſind, oder auch auf andre Art leicht gefunden werden, ſo kann man der Mühe, den Grundriß zu zeichnen, überhoben bleiben. Um hievon ein leichtes Beyſpiel zu geben, will ich ſetzen, es ſoll ein

Rechteck perſpectiviſch gezeichnet werden, wovon eine Seitenlinie 7 Fuß, die andre 3 Fuß lang iſt: die längere Seite ſoll mit der Grundlinie in der Entfernung von 1 Fuß parallel laufen, fünf Fuß davon ſollen rechter Hand, und die übrigen zwey Fuß linker Hand der Ebene des Auges liegen. Dieſen Bedingungen gemäß zähle man auf der Grundlinie von
39 F. T nach N fünf Fuß, von T nach Q zwey Fuß, und ziehe RN, RQ. Von N nach α nehme man 1 Fuß, ziehe Fα, ſo hat man einen Winkelpunct *a*. Von α nach G zähle man noch 3 Fuß, ziehe FG, ſo hat man noch einen Winkelpunct I, und *a*I iſt 3 vertiefte Füſſe lang. Uebrigens ziehe man *aq* und I*p* mit CE parallel, ſo iſt jede dieſer Parallelen 7 verkürzte Fuß lang, und *aqp*I iſt das verlangte Bild des Rechtecks.

15. §.

Wenn ein eckigter Körper auf einer ebenen wagrechten Grundfläche ſteht, und die Entfernungen der Spitzen aller dem Auge zugekehrten Ecken von den dreyen Ebenen des Auges, der Tafel, und des Horizonts bekannt ſind; ſo kann man die Projectionen dieſer Puncte nach dem 12 §. ſuchen, und die Projectionen der im Horizont liegenden nach dem 10 §. Ziehet man hiernächſt die Projectionen aller Eckpuncte nach der Ordnung mit graden Linien zuſammen, wie in dem Körper ſelbſt die abgebildeten Puncte zuſammen hängen; ſo geben ſich nach der Reihe die Bilder aller Seitenlinien, mithin das Bild des ganzen Körpers. Gewöhnlich hilft man ſich hiebey durch folgende Mittel.

Man

Man ſtellet ſich vor, daß von allen merkwürdigen Puncten des Körpers auf die horizontale Grundflächen lothrechte Linien herab gelaſſen ſind, der Körper mag übrigens ſelbſt eine wagrechte Grundfläche haben, oder wie man ſonſt will, geſtaltet ſeyn; man ſetzt zugleich voraus, daß aus der gegebenen Lage, und den Abmeſſungen des Körpers diejenige Figur in der horizontalen Grundfläche gefunden werden könne, worin die Puncte, über welchen jene lothrechte Linien ſtehen, die gehörige Lage und Entfernung gegen einander haben, und nennt dieſe Figur den Grundriß, oder die Geometriſche Ichnographie des Körpers. Man ſtellt ſich ferner vor, daß aus eben denſelben Puncten des Körpers auch auf eine verticale mit der Tafel parallele Ebene ſenkrechte Linien gezogen ſind, und nennt die Figur, worin alle durch dieſe ſenkrechte Linien auf der verticalen Ebene beſtimmten Puncte ihre gehörige Lage und Entfernung gegen einander haben, die Orthographie des Körpers. Wenn man die Durchſchnittslinie der verticalen Ebene mit der horizontalen Grundfläche die Grundlinie der Orthographie nennt, und ſich von allen Puncten der Orthographie ſenkrechte Linien auf die Grundlinie herab gelaſſen vorſtellt, ſo ſind dieſe einerley mit den Höhen der dadurch gleichſam abgebildeten Puncte des Körpers über der verticalen Grundfläche.

In der That ſind dieſe Puncte, welche in dem eben erklärten Verſtande zur Geometriſchen Ichnographie ſowohl als auch zur Orthographie des Körpers gehören nichts anders, als orthographiſche Projectionen der dazu gehörigen Puncte des Kör-

pers in dem Verſtande, wie dieſer Ausdruck im 2 §. iſt erklärt worden. Bey der Ichnographie iſt die horizontale Grundfläche ſelbſt als die Tafel zu betrachten, und die Orthographie kann man ſich ſo gut auf der Tafel ſelbſt, als auch auf jeder damit parallelen Ebene, als einer eigenen Tafel vorſtellen. Letztere Vorſtellung wird deswegen gewöhnlich angenommen, weil man auf die eigentliche Tafel nur die Bilder derſelben Puncte bringen will, ſo wie ſie aus einem in endlicher Entfernung angenommenen Geſichtspunct erſcheinen.

Wenn man nun von der Geometriſchen Ichnographie des Körpers nach den Regeln des 14 §. die perſpectiviſche Abbildung ſucht, ſo hat man die perſpectiviſche Ichnographie. Ueber den Bildern aller auf die horizontale Grundfläche orthographiſch projicirten Puncte des Körpers richtet man nun die perſpectiviſchen Höhen auf, die den geometriſchen Höhen zugehören, welche die Orthographie auf der mit der Tafel parallelen Ebene darſtellet: ſo giebt ſich wie ſchon vorhin bemerkt iſt, das Bild des Körpers, welches auch ſeine Scenographie genannt wird.

Geſetzt der Körper gehörte auch nicht in die Claſſe eckigter Körper, wie wenn es ein Cylinder oder Kegel wäre, ſo lieſſe ſich doch auf ähnliche Art eine perſpectiviſche Abbildung davon zu Stande bringen. Die Projection der Grundfläche des Cylinders und Kegels würde man nach Anleitung des vor. §. finden: weis man hiernächſt, wohin die lothrechte Linie aus der Spitze des Kegels in der wagrechten Grundfläche fällt; ſo kann man aus der Pro-

jec-

jection dieſes Durchſchnittspuncts mit der Grundfläche die perſpectiviſche Höhe des Kegels aufzeichten, um das Bild ſeiner Spitze zu finden. Auf ähnliche Art könnte man die Projectionen des Mittelpuncts und einer zulänglichen Anzahl von Puncten im Umfang der obern Grundfläche eines Cylinders ſuchen, um denſelben perſpectiviſch abzubilden. So allgemein indeſſen dies Verfahren an ſich würklich iſt, ſo wenig verdient es doch, daß man ſich in jedem beſondern Fall ſchlechthin daran binde. Gemeiniglich genügt es, daß man einige der vornehmſten Puncte dieſen Schlüſſen gemäß ſuche, da dann die übrigen durch kürzere Methoden gefunden werden können, und hiezu ſollen die folgenden Lehren und Unterſuchungen den Weg bahnen.

Vorläufig kann man übrigens noch bemerken, daß ſelbſt die Regeln zur perſpectiviſchen Abbildung horizontal liegender Figuren, (wohin alle Geometriſche Grundriſſe von Gebäuden, Gärten, Feſtungen, ganzen Gegenden einer Landſchaft, u. ſ. f. gehören) unter dem Nahmen der perſpectiviſchen Ichnographie gewöhnlich vorgetragen werden; daß man auch eben ſo unter dem Nahmen der perſpectiviſchen Scenographie den Inbegrif von Regeln vorzutragen pflege, nach welchen ſolche Figuren, deren Ebenen einander ſelbſt und die Tafel, unter mancherley Winkeln ſchneiden, imgleichen körperliche Figuren, von allerley Art, perſpectiviſch abgebildet werden können: obgleich dieſe Nahmen eigentlich die kurz vorhin angezeigte Bedeutung haben. Und weil die perſpectiviſchen Zeichnungen körperlicher Gegenſtände alsdenn ein noch mehr natürliches Anſehen bekommen, wenn zugleich der Schatten ausgedruckt

wird, den ſie entweder auf einen horizontalen Boden, oder ſonſt daneben gezeichnete Gegenſtände werfen; ſo trägt man die dahin gehörigen Regeln unter dem Nahmen der Sciagraphie vor.

Der II. Abſchnitt.

Vergleichung der Linien und Winkel des horizontalen Geometriſchen Grundriſſes mit ihren perſpectiviſchen Abbildungen.

16 §.

41 F. Es ſey FG eine grade Linie in der Fundamental-Ebene, die wenn ſie verlängert wird, die Grundlinie XY in A trift, und FN ſey auf XY ſenkrecht; ſo iſt NAF der Linie FG Neigungswinkel gegen die Tafel, NFA aber ihr Neigungswinkel gegen die Verticalfläche des Auges. Hinführo ſoll jener Winkel die Abweichung der Linie FG von der Tafel, dieſer aber ihre Abweichung von der Verticalfläche des Auges heiſſen.

Durchs Auge O ſey mit FG eine Parallele gezogen, welche die Tafel in P trift; ſo erhellet, daß die Tafel von der Ebene der Parallelen FG, OP, in der

der graden Linie AP geſchnitten werde. In eben dieſer Durchſchnittslinie muß das Bild *f* eines jeden Puncts F der graden Linie FG liegen. Denn *f* liegt in der *Tafel*, und in der Ebene der Parallelen FG, OP, mithin in beyder Ebenen Durchſchnittslinie AP.

Alle Bilder der Puncte zwiſchen A und F liegen auf der Tafel zwiſchen A und *f*; je weiter F nach G hinaus rückt, deſto weiter rückt *f* nach P hinauf, und *f* würde in P fallen, wenn F ſich von A unendlich weit entfernte, weil alsdenn OF mit FG parallel würde, mithin mit OP zuſammen fallen müſte.

Demnach iſt AP das Bild einer von A aus nach der Richtung AG mit OP parallel ins unendliche fortlaufenden graden Linie, und das Bild iſt von endlicher Gröſſe, wenn gleich die abgebildete Linie ſelbſt unendlich groß iſt. Man vergleiche den 8 §. woſelbſt der beſondre Fall vorkommt, wenn AG auf der Grundlinie ſenkrecht iſt.

17. §.

Die Bilder aller Parallellinien auf der horizontalen Grundfläche laufen auf der Tafel in einem Punct zuſammen, der in der Horizontallinie des Auges liegt.

Beweis. Das Bild der graden Linie, die 41 F.
ſich von A nach G ins unendliche hinaus erſtreckt, liegt in AP, vorausgeſetzt, daß OP mit AG parallel ſey; und wenn eine mit FG in der Grundfläche parallel gezogene grade Linie die Grundlinie in B trift, ſo liegt aus eben dem Grunde ihr Bild in BP. (16. §.) Beyde Bilder laufen demnach in P zuſammen.

Weil nun FG, CD, horizontal ſind, und OP mit FG und CD parallel iſt, ſo iſt OP horizontal. Aber OR iſt ebenfalls horizontal, folglich liegt die Ebene OPR horizontal, und ihre Durchſchnittslinie RP mit der Tafel iſt ebenfalls horizontal. Eben dieſe Linie aber iſt die Horizontallinie des Auges. (5 §.)

Der Punct P iſt das Bild eines unendlich weit entlegenen Puncts in jeder graden Linie, welche die Grundlinie unter dem Winkel NAF $= \eta$ ſchneidet, ſo wie der Augenpunct R das Bild eines unendlich weit entlegenen Puncts in jeder graden Linie iſt, welche die Fundamentallinie ſenkrecht ſchneidet. (8 §.) Künftig ſoll P der Vereinigungspunct der Bilder aller Parallellinien heiſſen, welche die Grundlinie unter einerley Winkel η ſchneiden.

18 §.

41 **Aus der gegebenen Lage einer graden Li-**
42 F. **nie FG in der Fundamental-Ebene gegen die Tafel, die Lage ihres Bildes auf der Tafel zu finden.**

Aufl. Wenn der Punct A bekannt iſt, worin FG verlängert die Grundlinie ſchneidet, und überdem der Winkel NAF, oder auch NFA, wovon einer den andern zu 90° ergänzt, wenn FN auf XY ſenkrecht iſt; ſo iſt die Lage der Linie FG beſtimmt: ihr Bild aber geht durch A und einen Punct P in der Horizontallinie des Auges, der gefunden wird, wenn man OP mit AG parallel ziehet. (17 §.) Weil nun OR und FN beyde auf der Tafel ſenkrecht ſind, ſo iſt FN mit OR parallel, mithin der Winkel ROP $=$ NFA $= 90° - \eta$ NAF. Man ſetze nun,

wie

wie im 9. §. OR=D, und überdem NAF=η, ſo erhält man in dem bey R rechtwinklichten Dreyeck ROP die Seitenlinie RP=D cotη: oder wenn man den Abweichungswinkel NFA von der Verticalfläche des Auges=ϑ ſetzt; ſo hat man RP=D tangϑ.

Hieraus flieſſen nun folgende Regeln die Zeichnung zu bewerkſtelligen. In der Vorausſetzung, daß TA=f, nebſt TAF=η, mithin auch NFA=$90°-\eta=\vartheta$ bekannt ſey, gleiche man durch den Augenpunct R die Horizontallinie des Auges, nehme auf derſelben RP = D cotη = D tangϑ, und ziehe AP ſo iſt die Lage des Bildes gefunden. Auf der Verticallinie des Auges RT kann man alſo RO=D nehmen, und an RO den Winkel ROP=$90°-\eta=\vartheta$ zeichnen, ſo iſt RP=D tangϑ, und der Punct P gefunden. 43 F.

Die 43 Fig. ſtellet die Tafel für ſich allein vor: auf derſelben ſey PQ auf die Grundlinie ſenkrecht herab gelaſſen, ſo hat man tang TAP = $\frac{PQ}{AQ}$.
Es wird aber PQ=RT=a, (9 §.) und AQ=AT+RP=f+Dcotη. Wenn demnach TAP=ζ geſetzt wird, ſo hat man tang $\zeta = \frac{a}{f+D\cot\eta}$, und man findet auch die geſuchte Lage des Bildes, wenn man TA=f nimmt, an TA aber einen Winkel ζ zeichnet, deſſen Tangente = $\frac{a}{f+D\cot\eta}$.

Anſtatt TA=f, und TAF=η, kann wie im 9 §, TN=Δ, NF=δ und überdem NFA=ϑ =$90°-\eta$ gegeben ſeyn. Dies beſtimmt

NA

$NA = \delta \tang \vartheta$, alſo auch $TA = \Delta + \delta \tang \vartheta = f$, und $NAF = 90^\circ - \vartheta = \eta$.

19 §.

Unter der allgemeinen Auflöſung der Aufgabe des vor. §. ſind verſchiedene beſondre Fälle enthalten, die beſonders bemerkt zu werden verdienen.

42 F. I.) Man ſtelle ſich vor, die Linie GFA werde um F ſo gedreht, daß A gegen N rückt, ſo rückt P gegen R. Wenn A in N fällt, mithin GFA in LFN, welche Linie auf XY ſenkrecht iſt, ſo wird $\vartheta = NFA = o$, und $RP = D \tang \vartheta = o$, d. i. P fällt in R, und NR iſt das Bild der ins unendliche verlängerten Linie NL. Dies leitet auf den im 8 §. ſchon bemerkten beſondern Satz, daß die Bilder aller auf der Grundlinie ſenkrechten Parallelen im Augenpunct zuſammen laufen.

II.) Wenn dagegen A von N wegrückt, mithin $NFA = \vartheta$ wächſt, ſo rückt P von R ebenfalls weg, ſo lange bis FA in Fl fällt, wenn Fl mit XY parallel iſt. Alsdenn iſt $NFl = \vartheta = 90^\circ$, mithin $RP = D . \tang \vartheta$ unendlich groß, und das Bild von Fl wird mit RP und der Grundlinie XY parallel, wie dem 13 §. gemäß iſt. Demnach iſt der Satz des 13 §. keine Ausnahme von der allgemeinen Regel des 17 §. ſondern nur ein beſondrer Fall von ihr. Man kann ſich vorſtellen, daß auch die Bilder ſolcher Linien in der Grundfläche, die mit der Grundlinie parallel ſind, in der Horizontallinie des Auges einen Vereinigungspunct haben, der aber vom Augenpunct unendlich weit entlegen iſt.

Die Lage einer in der Grundfläche mit XY parallelen Linie Fl iſt bekannt, wenn ihre Entfernung $FN = \delta$ von XY gegeben iſt. Um alſo die Lage ihres Bildes auf der Tafel zu finden, ſuche man nach dem 10 §. Das Bild f eines Puncts F, der um die Diſtanz δ von der Tafel entfernt iſt, und ziehe durch f mit der Fundamentallinie eine Parallele. Weil alle Puncte der Parallele gleich weit von XY entfernt ſind, ſo kann man N wo man will annehmen, RN ziehen, und hiernächſt RN bey f ſo theilen, daß $Rf : fN = D : \delta$ wird. (10 §.)

III.) Wenn Fl weiter um F nach FL zu gedreht wird, ſo wird der Winkel ϑ, mithin auch $\tang \vartheta$, ſo wie $D \tang \vartheta$ negativ, das heißt, P fällt nun auf der andern Seite von R in Π, wenn Fl in FE fällt. Schneidet nemlich FE die Grundlinie in C, ſo iſt $C\Pi$ das geſuchte Bild, und es iſt $NFC = -\vartheta$, weil NFC dem Winkel NFA entgegen geſetzt iſt. Weiter iſt nun $TCF = \eta > 90°$, und $\cot \eta$ negativ, mithin $\tang \zeta$ (18 §.) $= \frac{a}{f - D \cot \eta}$, und ζ bezeichnet jetzt den Winkel $TC\Pi$.

IV.) Dieſer Winkel ζ bleibt ſpitz, ſo lange $D \cot \eta > f$ iſt, er wird $= 90°$ in dem Fall $D \cot \eta = f$, oder $\cot \eta = \frac{f}{D}$, oder $\tang \eta = \frac{D}{f}$: eben der Winkel ζ wird ſtumpf, wenn $D \cot \eta > f$ iſt. Den 38 F.
beſondern Fall $D \cot \eta = f$ ſtellt die 38 Fig. vor, wenn man $TW = f$, und $TWM = \eta$ annimmt: daſelbſt iſt Wg das Bild der Linie WM die in den Fußpunct S des Zuſchauers läuft, und $TWK = \zeta = 90°$, welches letztere auch daraus erhellet, weil die Ebene OSM,

OSM, ſo wie die Ebene der Tafel vertical iſt, mithin beyder Durchſchnit Wg ebenfalls vertical und auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht ſeyn muß.

42 F. V.) Wäre $TAF = \eta$ ſehr klein, ſo würde $RP = D \cot \eta$ ſehr groß ausfallen, und alsdenn hätte es ſeine Unbequemlichkeit, den Punct P der Regel des 18 §. gemäß durch Zeichnung zu ſuchen, wenn die Tafel, worauf man zeichnet, nicht groß genug wäre. In Fällen dieſer Art werden ST und AF einander irgendwo in G ſchneiden: und weil TR das Bild von TG iſt, wird der Punct γ, worin AP und TR einander ſchneiden, das Bild von G ſeyn. Alsdann hat man $TG = f \text{tang}\,\eta$, alſo $T\gamma = \frac{f \text{tang}\,\eta}{D + f \text{tang}\,\eta} \cdot$ TR, weil hier $f \text{tang}\,\eta$ das iſt, was in 10 §. δ war, und man kann γ den Regeln des 10 §. gemäß finden, mithin auch $A\gamma$, als das verlangte Bild zeichnen. So lange $\eta < 90°$ iſt, wird γ unter R fallen, für $\eta = 90°$, wird $T\gamma = TR$, wie erfordert wird; wenn aber $\eta > 90°$, mithin $\text{tang}\,\eta$ negativ iſt, ſo wird $T\gamma = \frac{f \text{tang}\,\eta}{f \text{tang}\,\eta - D} \cdot TR > TR$, und γ fällt über R hinaus bis $\text{tang}\,\eta = \frac{D}{f}$ wird, wo das Bild mit FR parallel iſt, und die abgebildete Linie gegen den Fußpunct des Zuſchauers läuft. (Man vergleiche den num. IV.) Wenn η noch weiter wächſt, ſo wird $T\gamma$ negativ, und γ fällt unter T. In Fällen, wo ein ſolcher Winkel wie $TCF = \eta$ ſehr wenig von 180° verſchieden wäre, würde $R\Pi$ ſehr groß ausfallen, mithin ebenfalls bequemer der Punct

y in TR geſucht werden können, durch welchen CΠ durchgehen muß.

Schließlich iſt zu bemerken, daß bey dieſer Abbildung *einer* graden Linie, die in der Fundamental-Ebene *liegt*, die Länge der abzubildenden Linie noch nicht *in* Betrachtung komme. Es wird bloß aus der gegebenen **Lage** der **Linie** die **Lage** ihres Bildes geſucht, alſo jene noch von unbeſtimmter Länge angenommen.

20 §.

Um auf der Tafel ſelbſt mit Vortheil zu zeich- 43 F. nen, wenn man nach dem 18 §. das Bild einer Linie von gegebener Lage perſpectiviſch entwerfen ſoll, dient folgende Vorbereitung. Durch den Augenpunct R ziehe man die Horizontallinie, und trage auf ſelbige zu beyden Seiten von R die Tangenten aller Winkel von 0° bis 90° für den Halbmeſſer OR = D auf. In ſolcher Abſicht nehme man auf der Verticallinie RT des Auges RO = D, beſchreibe aus dem Mittelpunct O mit dem Halbmeſſer OR einen Halbkreis, und theile ihn in ſeine Grade gehörig ein. Vom Punct R angerechnet zähle man die 90 Grade beyder Quadranten nach beyden Seiten fort, und ziehe die Halbmeſſer durch die Theilungspuncte bis an die Horizontallinie, ſo geben ſich auf derſelben zu beyden Seiten des Puncts R die Tangenten aller Winkel von 0° bis 90° für den Halbmeſſer OR = D.

Um nun das Bild einer graden Linie zu haben, die um 30 Grad von der Tafel, mithin um 60 Grad von der Verticalfläche des Auges abweicht, und

durch

durch A gehet, zieht man aus A in den 60ſten Grad der Horizontallinie eine grade Linie AP, ſo hat man das verlangte Bild.

Aus Vergleichung mit der 42 Fig. ergiebt ſich, daß OP die Entfernung des Auges von dem Vereinigungspunct P ſey, und man hat $OP = D\,\mathrm{ſec}\,(90^\circ - \eta) = D\,\mathrm{coſec}\,\eta$, wenn η der Abweichungswinkel von der Tafel iſt, oder $OP = D\,\mathrm{ſec}\,\vartheta$, wenn ϑ den Abweichungswinkel von der Ebene des Auges bezeichnet.

Der Winkel $TAP = \zeta$ auf der Tafel iſt das Bild des Winkels $TAG = \eta$ in der horizontalen Grundfläche. Hat man die Horizontallinie nach dem Verhältniß der Tangenten in ihre Grade gehörig eingetheilt; ſo liegen zwiſchen den Schenkeln des Winkels TAP, von P aus ins unendliche fort gerechnet, ſo viele Grade, als der durch TAP abgebildete Winkel faſſet, welches in der 43 Fig. 30 Grade ſind. Dies hat noch ſeine Richtigkeit; wenn gleich der Winkel, wie TCΠ einem ſtumpfen Winkel abbildet, von Π über P ins unendliche hinaus hat man auf der Horizontallinie ſo viele Grade, als der durch TCΠ abgebildete ſtumpfe Winkel faſſet.

21 §.

Die ganze Länge *AP* des Bildes einer graden Linie zu finden, die in der horizontalen Ebene von *A* aus ins unendliche fortläuft, und von der Tafel um den gegebenen Winkel η abweicht.

Aufl. Wenn der Winkel $TAP = \zeta$, deſſen Tangente $= \dfrac{a}{f + D\cot\eta}$ (18 §.) ſchon gefunden

iſt,

iſt, ſo hat man $AP = AQ \sec\zeta = (f + D\cot\eta)\sec\zeta$, oder auch $AP = PQ \operatorname{coſec}\zeta = a \operatorname{coſec}\zeta$. Aus $\tang\zeta$

$$= \frac{a}{f + D\cot\eta}$$ findet man $\sec\zeta$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + (f + D\cot\eta)^2)}}{f + D\cot\eta},$$ und es wird

$AP = \sqrt{(a^2 + (f + D\cot\eta)^2)}$, wie auch für ſich aus Betrachtung der Figur erhellet.

Es ſey dieſe Linie $AP = L$, ſo iſt ſelbige von nun an als eine bekannte Linie anzuſehen, ſobald D und a gegeben ſind, wenn überdem auch die Lage der hiedurch abgebildeten Linie durch f und η beſtimmt iſt. Für alle diejenigen Linien, welche die Grundlinie der Tafel ſenkrecht ſchneiden, wird alsdenn $L = \sqrt{(a^2 + f^2)}$ und $\tang\zeta = \frac{a}{f}$, da dann das hieſige f mit dem $\triangle$ im 9 §. einerley iſt.

22 §.

Das Bild eines Dreyecks ABF, deſſen Grundlinie AB in der Fundamentallinie liegt, 42
und deſſen Winkel gegeben ſind, auf der Ta- 43 F.
fel zu zeichnen.

Aufl. Es ſey $BAF = \eta$, $AFB = \varphi$, ſo iſt $TBF = \eta + \varphi$, mithin der Linie BF Abweichung von der Ebene des Auges $= 90° (\eta + \varphi)$. Man nehme $RP = D \tang.(90° - \eta)$ und ziehe AP, ſo iſt dieſe Linie das Bild von AF unbeſtimmt verlängert. Weiter nehme man $Rp = D \tang(90° - (\eta + \varphi))$ und ziehe Bp, ſo iſt dieſe Linie das Bild von BF. unbeſtimmt verlängert. Das Bild der Spitze F muß in AP liegen,

weil F in AF liegt; und das Bild eben der Spitze F muß in Bp liegen, weil F in BF liegt. Demnach iſt beyder Bilder AP und Bp Durchſchnittspunct f das Bild von F, und ABf iſt das Bild des Dreyecks ABF.

Einer von den Winkeln an der Grundlinie AB kann nur ſtumpf ſeyn, und die Figur nimmt an, daß ABF ſtumpf ſey: alsdenn iſt $\eta+\varphi<90°$, deswegen bleibt AP$=$D tang$(90°-\eta$ ſowohl, als auch B$p=$D tang$(90°-(\eta+\varphi))$ poſitiv, und p fällt mit P auf einerley Seite von R. Wären beyde Winkel an der Grundlinie ſpitz, wie im Dreyeck ACF, und man nimmt, der vorigen Bezeichnung gemäß, TAF$=\eta$, AFC$=\varphi$ an, ſo wäre $\eta+\varphi>90°$, mithin tang$(90°-(\eta+\varphi))$ negativ. Demnach müſte man R$\Pi=$D.tang$(90°-(\eta+\varphi))$ auf der andern Seite von R nehmen, ſo wird CΠ das Bild von CF unbeſtimmt verlängert, und ACf das Bild des Dreyecks ACF.

44 F. Wenn AC$=$AF, mithin das Dreyeck ACF gleichſchenklicht iſt, ſo iſt ACF allemahl ſpitz, nemlich ACF$=$AFC$=\varphi=90°-\frac{1}{2}\eta$, und es wird $\eta+\varphi=90°+\frac{1}{2}\eta$; mithin $90°-(\eta+\varphi)=-\frac{1}{2}\eta$. Iſt alſo η auch ſpitz, ſo liegen P und Π auf verſchiedenen Seiten von R. Zugleich iſt um Af das Bild einer graden Linie AF, die in A gegen die Fundamentallinie unter dem Winkel η geneigt, und eben ſo groß, als AC iſt.

23 §.

42 F. Weil NF die ſenkrechte Entfernung oder die ſenkrechte Vertiefung des Puncts F hinter der Tafel heiſt, und Nf die dazu gehörige ſenkrechte perſpectiviſche Vertiefung des Bildes f; (11 §.) ſo kann

kann in einem ähnlichen Verſtande AF die ſchräge oder ſchiefe unter dem Winkel η geneigte Entfernung oder Tiefe des Puncts F hinter der Tafel, und Af die dazu gehörige ſchräge oder ſchiefe perſpectiviſche Vertiefung des Bildes f heiſſen.

24 §.

Aus dem bekannten ſchrägen oder ſchiefen Abſtande des Puncts F im Horizont von der Fundamentallinie die dazu gehörige ſchräge Vertiefung des Bildes f zu finden.

Aufl. Weil OP und AF parallel ſind, ſo ſind die Dreyecke OPf, und AFf einander ähnlich, und man hat $OP:AF = Pf:Af$, mithin auch $OP + AF : AF = Pf + Af : Af$. Weil nun $OP = D \operatorname{coſec} \eta$ war, $TAF = \eta$ geſetzt, (20 §.) und $Pf + Af = AP = L$ aus dem 21 §. bekannt iſt, ſo findet man $Af = \frac{AF \cdot L}{D \operatorname{coſec} \eta + AF}$. Will man Pf haben, ſo erwäge man nur, daß $Pf = AP - Af$ ſey, ſo findet man $Pf = L - \frac{AF \cdot L}{D \operatorname{coſec} \eta + AF} = \frac{D \operatorname{coſec} \eta}{D \operatorname{coſec} \eta + AF} \cdot L$. Dieſemnach läſt ſich die Lage des Bildes f auf der Tafel vermittelſt der bekannten ſchrägen Vertiefung auf eine völlig ähnliche Art durch Zeichnung finden wie im 10 §. vermittelſt der ſenkrechten Vertiefung. 42 F.

Weil nemlich f und η bekannt ſeyn müſſen; ſo mache man $TA = f$, (ob A rechter oder linker Hand des Puncts T genommen werden müſſe, ergiebt ſich allemahl von ſelbſt, weil man jedesmahl wiſſen muß, 43 F.

ob A rechter oder linker Hand der Ebene des Auges liegt,) von R nach P zähle man ſo viele Grade, als die Ergänzung des Winkels η zum rechten Winkel faſſet, und ziehe AP, ſo hat man die Lage der perſpectiviſchen Vertiefung des Puncts F, (18 §.) und P iſt der Vereinigungspunct der Bilder aller Parallellinien, welche die Fundamentallinie unter dem Winkel η ſchneiden. Für dieſe Linien iſt P das, was der Augenpunct R für die auf der Fundamentallinie ſenkrechten Linien iſt. Nun faſſe man OP als die Entfernung des Auges von P zwiſchen dem Cirkel-Inſtrument, und trage ſie aus P nach Π, auf der Grundlinie aber mache man $AC = AF$, ſo ſind Π und C Diſtanz-Puncte, wie F und G im 10 §. waren: alsdenn giebt die Durchſchnittslinie ΠC das geſuchte Bild f, und die perſpectiviſche Vertiefung Af. Denn es iſt $P\Pi : AC = Pf : Af$, alſo $P\Pi + AC : AC = Pf + Af : Af$, oder $D \operatorname{coſec}\eta + AF : AF = (AP = L) : Af$, mithin $Af = \frac{AF.L}{D \operatorname{coſec}\eta + AF}$, wie erfordert wird.

Dieſelbe Auflöſung lieſſe ſich auch aus dem 22 §. herleiten. Nachdem AP gehörig gezogen iſt, ſo daß von R nach P ſo viele Grade genommen worden, als der Winkel $90° - \eta$ faſſet, zähle man von R nach Π halb ſo viele Grade als der Winkel η faſſet, oder welches einerley iſt, von P nach Π die Grade eines Winkels $= 90° - \frac{1}{2}\eta$, und verfahre übrigens wie vorhin, ſo findet man gleichfalls das Bild f und
44 F. die perſpectiviſche Vertiefung Af: denn nun wird ACf das Bild des gleichſchenklichten Dreyecks ACF, worin $AF = AC$, und Af das Bild von AF iſt.

Beyde Arten des Verfahrens hängen ſo mit einander zuſammen. Es iſt η der Abweichungswinkel von der Tafel, und $\vartheta = 90° - \eta$ der Abweichungswinkel von der Ebene des Auges. (18 §.) Weiter iſt $OP = D\,\mathrm{coſec}\,\eta = D\,\mathrm{ſec}\,\vartheta$, und $\mathrm{ſec}\,\vartheta = \mathrm{tang}\,\vartheta + \mathrm{tang}\,(45° - \frac{1}{2}\vartheta)$ (458 §. Geom.) $= \mathrm{tang}\,\vartheta + \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(90 - \vartheta) = \mathrm{tang}\,\vartheta + \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\eta$; mithin wird OP als der Abſtand des Auges vom Vereinigungspunct $P = D\,\mathrm{tang}\,\vartheta + D\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\eta = RP + R\Pi = P\Pi$. Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke $P\Pi f$ und ACf folgt nun $P\Pi : AC = Pf : Af$, und daraus ferner componendo (189 §. Geom.) wie vorhin $Af = \frac{AC}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AC} \cdot AP$, oder $Af = \frac{AF}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF} \cdot L$, weil $AC = AF$, $AP = L$ war.

Wenn die gegebene Entfernung eines Puncts 43
M im Horizont, wie AM, auf der Fundamentallinie 44 F.
ſenkrecht iſt, ſo wird $\eta = 90°$, alſo $RP = D\,\mathrm{tang}\,(90° - \eta) = 0$, und P fällt in R, wie dem 8 §. gemäß iſt. Ferner wird $R\Pi = D . \mathrm{tang}\,45° = D$, und Π fällt in D, wenn $RD = D = OR$ iſt. Wird hiernächſt $AC = AM$ genommen, und DC gezogen, ſo wird Am das Bild von AM, und m das Bild von M, deſſen Entfernung von der Fundamentallinie $AM = \delta$ iſt. Hieraus erhellet, daß die Aufgabe im 10 §. nur ein beſondrer Fall von dieſer ſey, wie denn auch jene Auflöſung aus dieſer folgt. Stellet man ſich in der 42 Fig. vor, daß ſich AF um F gegen FN zu drehe, ſo rückt P gegen R, Π aber rückt von R weiter weg, weil η alſo auch $\frac{1}{2}\eta$ gröſſer wird. Iſt FN auf XY ſenkrecht, ſo fällt P in R, wenn FA mit FN zuſammen fällt, und es wird $R\Pi = D\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\eta$ =

$=D \tan 45° = D$; mithin fällt Π in D (43 Fig.) und wenn man $NG = NF$ (42 Fig.) nimmt, ſo giebt der Durchſchnitt der Linie DG mit NR die ſenkrechte Vertiefung Nf, welche der geometriſchen Vertiefung NF zugehört.

25. §.

45 F. Die Lage und Länge der graden Linie FG im Horizont iſt gegeben, man ſucht die Länge ihres Bildes auf der Tafel.

Aufl. Weil die Lage dieſer Linie im Horizont als bekannt angenommen wird, ſo muß die Stelle A bekannt ſeyn, wo ſie verlängert die Grundlinie trift; auch muß der Winkel $TAF = \eta$, nebſt der ſchiefen Entfernung AF bekannt ſeyn. Statt deſſen könnten auch die Entfernungen eines ihrer Endpuncte F von der Tafel, $NF = \delta$, und von der Ebene des Auges, $TN = \Delta$, nebſt dem Winkel $NFA = \vartheta = 90° - \eta$ gegeben ſeyn, und daraus lieſſe ſich $TA = \Delta + \delta \tan \vartheta$, und $AF = \delta \sec \vartheta$, nebſt dem Winkel $\eta = 90° - \vartheta$ finden. Alsdenn muß man von R nach P die Grade des Winkels ϑ zählen, und AP ziehen, ſo liegen die Bilder f und g der Endpuncte F und G in AP, und man hat $AP = L$ aus dem 21 §. Weiter hat man $Ag = \dfrac{AG \cdot L}{D \operatorname{coſec} \eta + AG}$, und

$Af = \dfrac{AF \cdot L}{D \operatorname{coſec} \eta + A \cdot F}$, (24 §.) mithin wird

$$fg = Ag - Af = \left(\frac{AG}{D \operatorname{coſec} \eta + AG} \right.$$

$$= \frac{AF}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF}\Big)\,.\,L$$

$$= \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\eta\,(AG - AF)\,.\,L}{(D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AG)\,(D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF)},$$ oder

$$fg = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\eta\,.\,FG\,.\,L}{(D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF + FG)\,(D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF)}.$$

Aus dieſer Formul fließt, daß bey einerley Länge und Lage der Linie FG das Bild *fg* deſto kleiner ausfalle, je gröſſer AF iſt, d. i. je weiter die durch *fg* abgebildete Linie FG hinter der Tafel liegt. Wenn δ die ſenkrechte Entfernung des durch *f* abgebildeten Puncts F von der Tafel bezeichnet; ſo iſt $AF = \delta\,\mathrm{coſec}\,\eta$: und weil $Pf = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\eta\,.\,L}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF}$ war, (24 §.) ſo kann man auch dieſe Werthe in die eben gefundene Formul ſetzen, und man erhält

$$fg = \frac{FG\,.\,fP}{(D + \delta)\,\mathrm{coſec}\,\eta + FG},$$ da dann $fP = \surd(a^2 + (f + (D - \delta)\cot\eta)^2)$ iſt. Nach multiplicire man im Zähler und Nenner mit $\frac{D}{D+\delta}$, und nehme $\frac{D}{D+\delta} = n$ an; ſo erhält man den Ausdruck

$$fg = \frac{n\,.\,FG\,.\,fP}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + n\,.\,FG}.$$

In der horizontalen Grundfläche ſey FH mit der Grundlinie parallel gezogen, und FH = FG genommen; ſo iſt das Bild *fh* der Linie FH gleichfalls

mit der Grundlinie parallel, und man hat $fh = \frac{D}{D+\delta} \cdot FH$ (13 §.) $= n . FG$, mithin wird das Bild $fg = \frac{fh . fP}{D \operatorname{coſec} \eta + fh}$. Dieſe Formul hat eine völlige Aehnlichkeit mit derjenigen, welche Af aus AF und AP im 24 §. beſtimmte: fP iſt hier das Bild von FG ins unendliche verlängert, und fh iſt hier das, was im 24 §. $AF = AC$ war. Wird $\delta = 0$ geſetzt, ſo wird $n = 1$, und die Formul verwandelt ſich völlig in diejenige, welche im 24 §. Af ausdrückte.

Weil $Pg = fP - fg$ iſt, ſo erhält man auch $Pg = fP \left(1 - \frac{fh}{D \operatorname{coſec} \eta + fh)}\right)$, oder
$$Pg = \frac{D \operatorname{coſec} \eta . fP}{D \operatorname{coſec} \eta + fh}.$$

Aus dieſen Schlüſſen mit dem 24 §. verbunden läßt ſich nun eine zwiefache Methode herleiten, das geſuchte Bild fg durch Zeichnung auf der Tafel zu finden. Es wird angenommen, daß $TA = f$, $TAF = \eta$, und AF bekannt ſey, oder ſtatt deſſen $TN = \Delta$, $NF = \delta$, und $NFA = \vartheta = 90° - \eta$. Im erſten Fall würde man Af aus dem 24 §, im letzten Fall Nf dem 10 §. gemäß ſuchen können, und ſo hätte man allemahl das Bild f des Anfangspuncts F. Im erſten Fall hätte man zugleich ſchon die Lage des Bildes fg, um dieſe im zweyten Fall zu finden müßte man noch von R nach P die Grade des Winkels ϑ zählen und fP ziehen, ſo hätte man ebenfalls

falls die Lage des geſuchten Bildes. Eben ſo müßte man verfahren, wenn der Punct f auf der Tafel gegeben wäre, und verlangt würde: man ſolle auf der Tafel von f aus das Bild einer graden Linie FG, ziehen, deren Länge und Neigung gegen die Grundlinie gegeben wäre. Hat man die Lage des Bildes fP auf eine oder die andere Art, ſo wird die Gröſſe deſſelben, oder der andere Endpunct g auf eine von den beyden folgenden Arten gefunden.

1.) Man trägt den Abſtand $OP = D \operatorname{coſec} \eta$ von 50 F.
P nach Π, (oder zählt von P nach Π die Grade des Winkels $90° - \frac{1}{2}\eta$) ziehet $f\Pi$, und verlängert beyde Schenkel des Winkels $Pf\Pi$ bis an die Grundlinie in A und C, ſo iſt Af das Bild von $AF = AC$ (24 §.) Auf der Grundlinie nimmt man weiter $CD =$ der gegebenen Linie FG und ziehet ΠD, welche AP in g ſchneidet, ſo iſt g das Bild von C, (24 §.) mithin fg das Bild von FG.

2.) Vorausgeſetzt, daß die Lage fP des Bildes ſchon gefunden ſey, ziehe man fh mit der Grundlinie parallel, ſo iſt nach Pfh das Bild der Neigung η der abzubildenden Linie gegen die Tafel. Weil nun D und δ als bekannt angenommen werden, ſo kann man

$$fh = \frac{D}{D+\delta} \cdot FG = n \cdot FG$$

nehmen, und nachdem $P\Pi = D \operatorname{coſec} \eta$ gemacht iſt, Πh ziehen, welche fP in g ſchneidet, und man hat ebenfalls das geſuchte Bild fg. Die Vergleichung mit dem 22. und 24. §. ergiebt nemlich, daß $rh\Pi$ das Bild eines Winkels $= 90° + \frac{1}{2}\eta$, und fhg das Bild eines Winkels $= 90° - \frac{1}{2}\eta$, mithin fgh das Bild eines gleich-

gleichſchenklichten Dreyecks werde, wovon fg, fh, die gleichen Schenkel abbilden. Aber fh iſt das Bild einer Linie $= FG$, (13 §.) mithin auch fg. Die Richtigkeit dieſer Auflöſung erhellet auch ſo. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke $Pg\Pi$ und fgh hat man $P\Pi : fh = Pg : fg$, alſo $P\Pi + fh : fh = Pg + fg : fg$, d. i. $D\,\mathrm{coſec}\,\eta + fh : fh = fP : fg$, und man erhält $fg = \dfrac{fh \,.\, fP}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + fh}$, oder

$$fg = \frac{n\,FG \,.\, fP}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + n \,.\, FG},$$ wie vermöge des obigen erfordert wird. Im 24 §. muſte AC ſo viele Geometriſche Schuhe lang gemacht werden, als AF faßte: hier wird fh ſo viele verkürzte Schuhe lang gemacht, als FG geometriſche Schuhe faſſet, und übrigens bleibt die Auflöſung in beyden Fällen einerley. Die Verkürzung drückt der Bruch $\dfrac{D}{D+\delta}$ aus, der $= 1$ wird, wenn F in der Fundamentallinie liegt.

Die unter der allgemeinen Auflöſung dieſer Aufgabe enthaltenen beſondern Fälle, wenn FG entweder auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht oder damit parallel iſt, ſind zwar aus dem 10ten 13ten und 19ten §. ſchon bekannt, indeſſen iſt es nicht undienlich kurz zu erwägen, wie ſie mit der allgemeinen Auflöſung zuſammen hängen. Wenn in der 45 Fig. FL in N auf der Grundlinie ſenkrecht iſt, ſo hat man $\eta = 90$, $RP = 0$, $R\Pi = D\,\mathrm{tang}\,45° = D$, alſo fällt Π in B, $RB = D$ genommen, (Man vergleiche die 50. Fig.) und das Bild von FL liegt in NR. Man

nimmt alſo NQ=NF=δ, ziehet BQ ſo giebt ſich f: weiter nimmt man QK=FL, und ziehet BK, ſo hat man das geſuchte Bild fl. Statt des letztern Verfahrens kann auch fh mit der Grundlinie parallel und $= \frac{D}{D+\delta} \cdot FL$ genommen und Bh gezogen werden. Uebrigens wird $fg = \frac{D.FG.L}{(D+AF+FG)(D+AF)}$, welches mit dem 11 §. übereinſtimmt: oder auch $fg = \frac{n\,FG.fR}{D+n.FG}$, da dann $fR = \surd(a^2+\Delta^2)$ wird.

Wenn FH mit der Grundlinie parallel iſt, (45 Fig.) ſo hat man $\eta = 0$, alſo RP unendlich groß, RΠ=0, und Π fällt in R. Nachdem alſo f aus TN=Δ und NF=δ gefunden iſt, zieht man durch f mit der Grundlinie eine Parallele, (die alſo in den unendlich weit entlegenen Punct P läuft) nimmt NE=FH, und zieht RE, ſo giebt ſich fh, als das Bild von FH: und ſo iſt wiederum die Aufgabe im 13. §. von der jetzigen nur ein beſondrer Fall. Weil überhaupt $L = \surd(a^2+(f+D\cot\eta)^2)$ war, (21 §.) und $f = \Delta + \delta\cot\eta$, AF$=\delta\operatorname{coſec}\eta$; ſo verwandelt ſich die allgemeine Formul

$$fg = \frac{D\operatorname{coſec}\eta.FG.L}{(D\operatorname{coſec}\eta+AF+FG)(D\operatorname{coſec}\eta+AF)}$$

bey der Vorausſetzung $\eta = 0$ in folgende

$$fg = \frac{D(D+G)FG}{(D+\delta)^2} = \frac{D}{D+\delta} \cdot FG,$$

wie erfordert wird. Eben das giebt auch die Formul

$fg=$

$fg = \frac{n\mathrm{FG}.f\mathrm{P}}{\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\eta + n\,\mathrm{FG}}$, weil $f\mathrm{P} = \sqrt{(a^2 + (f + (\mathrm{D} - \delta)\cot\eta)^2)}$ war.

26. §.

42 F. Es iſt die Lage der Spitze F eines Winkels GFH, deſſen Gröſſe bekannt iſt, nebſt der Lage eines ſeiner Schenkel FG in der Fundamental-Ebene gegeben: man ſoll das Bild des Winkels auf der Tafel zeichnen.

Aufl. Es ſey FG und FH verlängert, bis ſie die Fundamental-Linie in A und B ſchneiden. Wenn nun $\mathrm{TAF} = \eta$ $\mathrm{GFH} = \varphi$ iſt, ſo müſſen $\mathrm{TA} = f$, AF, η und φ gegeben ſeyn, oder auch $\mathrm{TN} = \Delta$, $\mathrm{NF} = \delta$, $\mathrm{NFA} = \vartheta$ ſtatt TA, AF und η, da dann $\mathrm{NAF} = 90° - \vartheta = \eta$, $\mathrm{TA} = f = \Delta - \delta\,\mathrm{tg}(90° - \eta)$ und $\mathrm{AF} = \delta\,\mathrm{ſec}\,\vartheta = \delta\,\mathrm{coſec}\,\eta$ auch bekannt ſind. Weiter iſt $\mathrm{AFB} = \varphi = \mathrm{GFH}$, alſo $\mathrm{TBF} = (\eta + \varphi)$, und man kann nach dem 22 §. das Bild des Dreyecks ABF ſuchen. Man nehme alſo $\mathrm{RP} = \mathrm{D}\,\mathrm{tang}(90° - \eta)$ und ziehe AP: man nehme ferner $\mathrm{R}p = \mathrm{tang}(90° - (\eta + \varphi))$ und ziehe Bp, welche AP in f ſchneidet, ſo iſt AfB das Bild des Winkels AFB, mithin P$f$$p$ das Bild des Winkels GFH.

Wäre demnach das Bild f der Spitze F ſchon dem 10 §. gemäß aus Δ und δ gefunden, oder auch ſonſt gegeben; ſo könnte man um die Lage der Schenkel zu finden, ſo verfahren. Man nehme $\mathrm{RP} = \mathrm{D}\,\mathrm{tang}(90° - \eta)$, und $\mathrm{R}p = \mathrm{D}\,\mathrm{tang}\,90° - (\eta + \varphi)$, ziehe fP und fp, ſo iſt Pfp das geſuchte Bild. Wäre $\mathrm{GFE} = \psi$ der gegebene Winkel, und $\eta + \psi > 90°$, ſo wäre $\mathrm{tang}(90° - (\eta + \psi))$ negativ, und man mü-

müſte $R\Pi = D . tg (90° - (\eta + \psi))$ auf der andern Seite von R nehmen, da dann $Pf\Pi$ das Bild des Winkels GFE ſeyn wird.

Es ſey z. E. ein Winkel von 40° zu zeichnen, 43 F. deſſen Spitze von der Ebene des Auges um die Diſtanz Δ, von der Tafel aber um die Diſtanz δ abſtehet, und deſſen auf die Ebene des Auges zu laufender Schenkel um 60° von der Ebene des Auges, alſo um 30° von der Tafel abweicht: ſo iſt $\eta = 30°$, $90° - \eta = 60°$ $90° - (\eta + \phi) = 20°$. Man nehme $TN = \Delta$, ziehe RN, nehme $RD = D$, $NG = \delta$, ziehe DG ſo iſt f das Bild der Spitze. Weiter nehme man $RP = D . \tang 60°$, $Rp = D . \tang 20°$, und ziehe fP, fp, ſo iſt Pfp das verlangte Bild. Wäre aber der gegebene Winkel $= \psi = 75°$, ſo wäre $90° - (\eta + \psi) = - 15°$; alsdenn wird $R\Pi = - tg . 15°$ genommen, und es wird $Pf\Pi$ das geſuchte Bild.

Hat man auf der Tafel die durch R laufende Horizontal-Linie nach Vorſchrift des 20 §. in dem Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer $= D$ gehörig eingetheilt; ſo kann dieſe Scale zugleich als ein Perſpectiviſcher Winkelmeſſer dienen. Denn jeder Winkel wie Pfp iſt die perſpectiviſche Abbildung eines Winkels von ſo vielen Graden als auf der Scale zwiſchen P und p fallen. Es gehört nemlich RP zu $90 - \eta$ Graden und Rp zu $90 - \eta - \phi$ Graden, und die letzte Zahl von der erſten abgezogen, läſt zwiſchen P und p, ſo viele Grade übrig, als der Winkel ϕ faſſet.

Eben ſo iſt auch $Pf\Pi$ ein Winkel von ſo vielen Graden, als auf der Scale zwiſchen P und Π liegen, wenn man die Zahlen auf beyden Seiten von R zuſam-

ſammen nimmt. Denn von R nach P liegen $90 - \eta$ Grade von R nach Π, aber $\eta + \psi - 90$ Grade, wenn der abgebildete Winkel ψ Grade hält. Die Summe iſt $= \psi$, und ſo viele Grade liegen zwiſchen P und Π.

Wenn demnach das Bild f der Spitze ſchon gefunden iſt, ſo zählt man nur ſchlechthin von R nach P die Grade des Winkels ϑ, um welchen der eine Schenkel des Winkels von der Ebene des Auges abweicht, von P nach p oder Π aber die Zahl der Grade, des abzubildenden Winkels; ziehet fP und fp oder fΠ, ſo iſt das verlangte Bild gezeichnet.

27. §.

50 F. Zu noch mehrerer Bequemlichkeit der Zeichnung auf der Tafel kann man auch noch die Fundamental-Linie eben ſo in gleiche Theile eintheilen, wie man ſonſt einen verjüngten Maaßſtab eintheilet. Dieſe gleichen Theile können alsdenn nach Beſchaffenheit der Umſtände Ruthen, Fuſſe, was man will, bedeuten, da dann die in Ruthen oder Füſſen gegebene Entfernung des Auges nach eben dieſem Maasſtab von R nach O abgetragen werden muß, um den Winkelmeſſer einzutheilen. Alle dieſe Vorbereitungen vorausgeſetzt, kann man nun von dem perſpectiviſchen Grundriß einer horizontal liegenden Figur eben ſo reden, als wenn es ein geometriſcher Grundriß wäre: man kann den perſpectiviſchen Winkeln eben die Zahl der Grade zuſchreiben, welche die dadurch abgebildeten Winkel faſſen, und die der perſpectiviſche Winkelmeſſer unmittelbar anzeigt: den perſpectiviſchen Linien kann man eben die Länge in

Ru-

Ruthen oder Füſſen ausgedruckt beylegen, welche die dadurch abgebildeten Linien haben, und ihre Länge auf der in gleiche Theile eingetheilten Fundamental-Linie meſſen. Zur nähern Erläuterung werden folgende Aufgaben dienen, wobey ich vorausſetze, daß die Horizontallinie und Fundamentallinie gehörig, und zwar jene nach der angenommenen Entfernung des Auges eingetheilt ſind.

Der III. Abſchnitt.

Die Perſpectiviſch-ichnographiſche Zeichnung und Ausmeſſung grader Linien und Winkel.

28. §.

Es iſt die grade Linie *ab* auf der Tafel gegeben, man ſoll durch den gleichfalls gegebenen Punct *c* damit eine Parallele ziehen. 50 F.

Aufl. Man verlängere *ab* bis an die Horizontallinie in *p*, und ziehe von *c* nach *p* die grade Linie *cd*, dieſe iſt mit *ab* perſpectiviſch parallel. (17. 18. §.)

Die durch dieſe Parallelen abgebildeten Linien ſchneiden die Ebene des Auges unter einem Winkel

von

von 55°, mithin die Tafel unter einem Winkel von 35°. Weil *ba* verlängert die Grundlinie im 38ſten, *dc* aber im 55ſten Theilungspunct trift, ſo macht der Abſtand ihrer Durchſchnittspuncte 17 Fuß aus, und man findet die wahre Entfernung von einander, wenn man 17 Fuß mit dem ſin 35° multiplicirt, welches $9\frac{3}{4}$ Fuß ausmacht.

Würde demnach verlangt: man ſolle mit *ab* eine Parallele ziehen in einer Entfernung von $9\frac{3}{4}$ Fuß; ſo müſte man, nachdem *ab* bis an die Horizontallinie in *p* verlängert, und ihr Abweichungswinkel von der Tafel gefunden worden, die gegebenen $9\frac{3}{4}$ Fuß mit ſin 35° dividiren, welches 17 Fuß giebt. Nachdem nun *ba* bis an die Grundlinie in *a'* verlängert worden, müſte man von *a'* nach *c'* 17 Fuß zählen, und alsdenn *pc'* ziehen.

29. §.

An dem Punct *a* der Linie *ab* einen Winkel von verlangter Gröſſe zu zeichnen.

Aufl. Nachdem *ab* bis *p* verlängert worden, zählt man von *p* nach *q* die Zahl der Grade des gegebenen Winkels ab, z. E. 35°, und zieht *aq*, ſo iſt *paq* der verlangte Winkel.

Wenn an *ab* bey *a* linker Hand ein Winkel von 145° gezeichnet werden ſollte, ſo müſte man rechter Hand ſeinen Nebenwinkel *baq* von 35° zeichnen, alsdenn iſt *bae* der verlangte Winkel.

Sollte man aber bey *a* an *ae* einen Winkel von 35° zeichnen, der ſeine Oefnung der Grundlinie zukehrt, ſo würde man *a* rückwärts verlängern, und

den

den Scheitelwinkel *paq* von 35° zeichnen müſſen, alsdenn wäre *eai* der verlangte Winkel.

Wäre der Winkel auf der Tafel ſchon gezeichnet, und man ſollte ihn meſſen, ſo müſte man nur ſeine Schenkel bis an die Horizontallinie verlängern, und die zwiſchen den Schenkeln liegende Grade auf der Scale zählen. Wenn nicht beyde Schenkel eines ſolchen Winkels, wie *bae*, vorwärts verlängert die Scale treffen, ſo verlängert man den einen *ea* rückwärts, und mißt den Nebenwinkel *bay*, der hier 35° faßt, ſo hat man auch die Gröſſe des Winkels *bae* = 145°. Liefe ein Schenkel *am* eines ſolchen Winkels wie *bam* mit der Horizontallinie parallel, ſo wäre es ſo viel, als wenn *am* verlängert die Scale im 90ſten Grad ſchnitte, und ſo ſiehet man, daß *bam* 35 Grad faſſe.

30 §.

Die Länge einer graden Linie *fg* auf der Tafel zu meſſen. 50 F.

Aufl. Man verlängere ſie bis zur Horizontallinie in P, wo ſie den 40ſten Grad trift, ſo weis man, daß ſie 50° von der Tafel abweicht. Hievon nehme man die Hälfte 25° zähle von R nach Π dieſe 25°, und ziehe von Π durch *f* und *g* Linien bis an die Grundlinie in C und D, ſo fallen zwiſchen C und D 20 Fuß, und ſo lang iſt *fg*.

Beweis. Wenn man *fg* bis an die Grundlinie in A verlängert, ſo ſind A*f*C, A*g*D Bilder von gleichſchenklichten Dreyecken, wovon AC, AD, die in der Grundlinie liegenden Schenkel ſind, und wovon die Winkel an der Spitze A 50° faſſen: mithin

iſt $Af = AC$, $Ag = AD$, und $fg = CD$. (22. 24. §.)

Wofern eine ſolche Linie, wie fh mit der Grundlinie parallel liegt, ſo fällt Π in R; zieht man alſo Rf und Rh, welche die Grundlinie in N und E treffen, ſo ſiehet man, daß hier fh ebenfalls 20 Fuß lang ſey.

Läuft aber die Linie, wie fl in den Augenpunct R, ſo fällt Π in den 45ſten Grad bey B; und wenn man Bf, BL ziehet, welche die Grundlinie in Q und K treffen; ſo ergiebt ſich auf der Grundlinie zwiſchen Q und K die Zahl der Füſſe für die Länge fl, welches hier auch 20 Fuß ſind.

31. §.

50 F. **Auf einer gegebenen graden Linie fh ein Stück von verlangter Länge, von f angerechnet, abzuſcheiden.**

Aufl. Man verlängere ſie bis an die Horizontallinie in P, ſo ſiehet man hier, daß ſie 40° von der Ebene des Auges, mithin 50° von der Ebene der Tafel abweicht. Die Hälfte hievon, nemlich 25° trage man aus R nach Π, ziehe Πf bis an die Grundlinie nach C fort. Von C nach D zähle man ſo viele Füſſe ab, als die Länge des abzuſchneidenden Stücks ausmachen ſoll, z. E. 30 Fuß, und ziehe ΠD, welche fn in g ſchneidet, ſo iſt fg ſelbſt 20 Fuß lang.

Wäre die gegebene Linie, wie fr mit der Grundlinie parallel, ſo würde Π in den Augenpunct R fallen: nun müſte man Rf ziehen, und bis an die

Grund-

Grundlinie in N verlängern. Soll alsdenn die Linie z. E. 20 Fuß lang werden, ſo zählt man 20 Fuß von N bis E, ziehet RE, welche *fr* in *h* ſchneidet, ſo iſt *fh* 20 Fuß lang.

Liefe aber die gegebene Linie, wie *fs* auf den Augenpunct R zu, ſo fiele Π in den 45ſten Grad bey *B*. Nun muß man *Bf* ziehen und bis an die Grundlinie nach Q verlängern: und wenn man ein Stück z. E. von 20 Fuß abſchneiden ſoll, ſo zählt man 20 Fuß von Q nach K, ziehet BK, welche *fs* in *l* ſchneidet, ſo iſt *fl* 20 Fuß lang.

32 §.

Die Bilder aller Linien, die entweder auf der Grundlinie ſenkrecht ſind, oder damit parallel laufen, perſpectiviſch in Ruthen oder Füſſe einzutheilen.

Aufl. Es iſt $Nf = \frac{\delta}{D+\delta} \cdot NR$ (10. §.) 50 F.

wenn δ die Länge der Linie NF bedeutet, wovon N*f* das Bild iſt: (45 Fig.) da dann dem Bilde N*f* eben ſo viele perſpectiviſche Füſſe zugeſchrieben werden, als NF geometriſche Füſſe faſſet. (11 §.) Wenn nun für eine angenommene Diſtanz des Auges nach der Reihe die Zahlen 1, 2, 3 u. ſ. f. ſtatt δ geſetzt werden, ſo findet man nach der Reihe die Perſpectiviſche Länge von $Nf=1$, $Nf=2$, $Nf=3$, u. ſ. f. in eben dem Maaß, worin D ausgedrückt iſt.

Weil $Rf = NR - Nf = \frac{D}{D+\delta} \cdot NR$ iſt, ſo kann man auch eben ſo die nöthigen Theilungspuncte

finden, wenn man die Werthe von Rf ſucht, die den Werthen $\delta=1$, $\delta=2$, $\delta=3$, u. ſ. f. zugehören, da ſich dann dieſe Werthe umgekehrt wie $D+\delta$ verhalten; und hierauf gründet ſich die im 11 §. ſchon gelehrte Verzeichnung.

Wenn fh mit der Grundlinie parallel iſt, und RT in r ſchneidet, ſo ſind Tr und Nf von gleicher perſpectiviſchen Länge, weil es Bilder gleich langer Parallel-Linien ſind. Auch umgekehrt, wenn Tr mit Nf einerley Perſpectiviſche Länge haben ſoll, ſo muß $Tr = \frac{\delta}{D+\delta}$ TR und δ für beyde einerley ſeyn, mithin iſt Tr.Nf = TR:NR, alſo rf ‡ NT (204. §. Geom.) Wenn demnach eine von dem im Augenpunct zuſammen laufenden Geſichtslinien perſpectiviſch eingetheilt iſt, ſo kann man durch alle Theilungspuncte mit der Grundlinie Parallelen ziehen, dieſe werden alle übrige theilen. Am bequemſten wählt man alſo die Verticallinie RT als die gegebene Höhe des Auges. Wenn nun Tα, $\alpha\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\eta$, $\eta\iota$, die Bilder des erſten, zweyten, dritten u. f. Fuſſes, der durch T auf der Tafel ſenkrechten Linie ſind, ſo ſind dieſe Abtheilungen vertiefte Füſſe. (11 §.) Die durch α, γ, u. ſ. f. mit TA parallel laufenden Linien, ſchneiden nun auch auf NR die Theile Nα', $\alpha'\gamma'$, u. ſ. f. als den erſten, zweyten, und die folgenden vertieften Schuhe ab.

Eine mit der Grundlinie parallel laufende Linie hf iſt ſo viele Ruthen oder Füſſe lang, als das dazu gehörige Stück der Grundlinie EN zwiſchen den Geſichtslinien durch ihre Endpuncte: wenn alſo TE, EN gleich groß ſind, ſo ſind rh, hf auch gleich groß,

und man weis ſchon aus dem 13 §, daß auf einer und derſelben Parallele alle perſpectiviſche Ruthen oder Fuſſe gleich groß ſind. Auf verſchiedenen Parallelen aber verhalten ſie ſich umgekehrt wie die Entfernung $D+\delta$ des Zuſchauers von der dadurch abgebildeten Linie.

Dieſe Schlüſſe leiten auf folgende Methode, die im Augenpunct zuſammenlaufenden Bilder aller auf der Tafel ſenkrechten Linie ſowohl, als auch die Bilder der mit der Grundlinie parallelen Linien, in ihre Füſſe oder Ruthen einzutheilen. Nachdem auf der Grundlinie von T bis I, II, III, u. ſ. f. gleiche Abtheilungen aufgetragen ſind, ziehe man die Geſichtslinien RT, R.I, R.II, R.III, u. ſ. f., nehme Rb dem Abſtand des Auges gleich, und ziehe die Durchſchnittslinie bT, welche die Geſichtslinie in β, λ, μ, ν, ξ, ſchneidet. Durch dieſe Puncte ziehe man $\beta\alpha$, $\lambda\gamma$, $\mu\varepsilon$, $\nu\eta$, $\xi\iota$, mit der Grundlinie parallel, ſo ſind Tα, $\alpha\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\eta$, $\eta\iota$, vertiefte, und $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\xi$, $\eta\vartheta$, $\iota\kappa$, verkürzte Maaſſe.

33 §.

Das auf dieſe Art eingetheilte Dreyeck RTI heiſt nun der **Perſpectiviſche Maaßſtaab**, und man kann eben denſelben Maaßſtab an einer Seite der Tafel (51 Fig.) noch bequemer auf folgende Art eintheilen. Es ſey AC auf TC lothrecht, und CD = 1 Fuß. Man nehme AB dem Abſtand des Auges gleich, ziehe AD, BC, und durch den Durchſchnittspunct μ mit der Grundlinie die Parallele $\beta\alpha$, ſo iſt Cα der erſte vertiefte Fuß, und wenn Bα die Grundlinie in H trift, ſo iſt lH = CD, mithin $\beta\delta$ 51 F.

 auf

auf DA der zweyte vertiefte Fuß, ſo wie auch $\alpha\gamma$ auf CA, wenn $\delta\gamma$ mit CD parallel iſt. Demnach ziehe man weiter $B\gamma$, und durch ζ mit CD eine Parallele $\zeta\varepsilon$, ſo iſt $\gamma\varepsilon$ der dritte vertiefte Fuß, da dann $B\varepsilon$ wiederum den Durchſchnittspunct ϑ, und die Parallele $\vartheta\eta$ den vierten vertieften Schuh giebt. Auf dieſe Art kann CA ſo weit man will eingetheilt werden, und das Dreyeck ACD (51 Fig.) ſtellt wie RTI (50 Fig.) den perſpectiviſchen Maaßſtab vor, der hiernächſt allemahl mit Vortheil gebraucht werden kann, für ſolche Puncte in der Fundamental-Ebene, deren Entfernungen von der Tafel und der Ebene des Auges bekannt ſind, auf der Tafel die zugehörigen Bilder zu finden. Sein Gebrauch ſoll weiter unten umſtändlicher gewieſen werden.

45 50 F. Hier iſt nur noch zu bemerken, daß $\alpha\beta$ ein verkürzter Fuß für die ſenkrechte Vertiefung von 1 Fuß, $\gamma\delta$ ein verkürzter Fuß für die ſenkrechte Vertiefung von 2 Fuß ſey, u. ſ. f. So wie übrigens für jede ſenkrechte Vertiefung $NF = \delta$ (45 Fig.) die dazu gehörige Verkürzung durch den Bruch $\frac{D}{D+\delta}$ ausgedrückt wird, ſo giebt für jede ſchräge, unter dem Winkel η gegen die Tafel geneigte Vertiefung AF der Bruch $\frac{D \operatorname{coſec}\eta}{D \operatorname{coſec}\eta + AF}$ die dazu gehörige Verkürzung. Denn in der 45 und 50 Fig. iſt fh das Bild von FH, und man hat $fh = \frac{D}{D+\delta}$

$$. FH = \frac{D \operatorname{coſec}\eta}{D \operatorname{coſec}\eta + \delta \operatorname{coſec}\eta} . FH.$$ Es iſt

aber

aber δ coſecη = AF, alſo auch $fh = \frac{D\,\text{coſec}\,\eta}{D\,\text{coſec}\,\eta + AF}$. FH. Ziehet man durch f und h die Geſichtslinien in den Augenpunct R, welche die Grundlinie in N und E treffen, ſo weis man aus dem vor. §. daß fh ſo viele verkürzte Schuhe faſſe, als NE geometriſche Schuhe lang iſt, und daß man fh in verkürzte Schuhe theile, wenn man NE in geometriſche Schuhe theilt, und durch alle Theilungspuncte Geſichtslinien in R ziehet.

Statt R kann nun auch jeder andre Punct Π der Horizontallinie dienen. Ziehet man Πf und Πh bis an die Grundlinie in l und D, ſo iſt CD = NE; denn es iſt $fh = \frac{f\Pi}{C\Pi} \cdot CD = \frac{fR}{NR} \cdot NE$, und $\frac{f\Pi}{C\Pi} = \frac{fR}{NR}$ (205 §. Geom.), alſo CD = NE. Wenn alſo CD in geometriſche Füſſe getheilt wird, und man durch die Theilungspuncte grade Linien nach Π ziehet, ſo wird fh in verkürzte Füſſe getheilt, die der ſenkrechten Vertiefung NF oder der ſchrägen Vertiefung AF zugehören. Weil CΠ und DΠ eben ſo, wie NR und ER Bilder paralleler Linien ſind, ſo erhellet auch ſchon daraus, daß fh das Bild einer mit der Grundlinie parallelen Linie ſeyn müſſe, die = NE = CD iſt.

34. §.

Die Bilder ſolcher Linien in der Fundamental-Ebene, welche die Grundlinie unter ſchiefen Winkeln ſchneiden, perſpectiviſch in Ruthen, Fuſſe u. ſ. f. einzutheilen.

45 F. Aufl. Es ſey, wie im 21-24 §. AP das Bild von AG bis ins unendliche verlängert, Af das Bild von AF; ſo hat man $Af = \frac{AF}{D \sec\vartheta + AF} \cdot AP$, und $Pf = \frac{D \sec\vartheta}{D \sec\vartheta + AF} \cdot AP$. (24 §.) Weil nun AP bey einerley Winkel ϑ ſich nicht ändert, wenn nach der Ordnung AF = 1, AF = 2, u. ſ. f. in eben dem Maaß angenommen wird, wodurch man D ausgedruckt hat, ſo läſt ſich die perſpectiviſche Länge $Af = 1$, $Af = 2$, u. ſ. f. in eben dem Maaß finden. Die Werthe von Pf verhalten ſich nun umgekehrt wie $D \sec\vartheta + AF$, weil D einerley bleibt, und ϑ bey einerley Abweichung von der Tafel ebenfalls. Hier iſt $D \sec\vartheta = D \csc\eta$ der Abſtand des Auges von dem Vereinigungspunct P aller mit AP perſpectiviſch parallel laufenden Linien, und ſo bleibt die Eintheilung der Bilder ſolcher Linien, die in der Fundamentalebene die Grundlinie ſchief ſchneiden, der im 32 §. gelehrten Eintheilung der Bilder ſenkrechter Linien in allen Stücken ähnlich, nur daß ſtatt D, welches eigentlich der ſenkrechte Abſtand des Auges von der Tafel iſt, allemahl die Entfernung des Auges von dem Vereinigungspunct aller mit der einzutheilenden Linie perſpectiviſch parallel laufenden Linien genommen werden muß, der jedesmahl $= D \sec.\vartheta$ iſt.

50 F. Iſt eine ſolche Linie wie PA gehörig eingetheilt, ſo theilen ſich alle andre damit perſpectiviſch parallele in eben dem Punct P zuſammen laufende von ſelbſt, wenn man durch alle Theilungspuncte in AP mit der Grundlinie Parallelen ziehet. So iſt Dw eben ſo lang,

lang, als *Af*, wenn beyde in P zuſammen laufen, und *fw* mit der Grundlinie parallel iſt. Uebrigens iſt *fw* ſo viele verkürzte Schuhe lang, für die ſchieflaufende Vertiefung *Af*, D*w*, als AD geometriſche Schuhe des Längenmaſſes auf dem Grundriß faſſet: (33 §.) es verſtehet ſich aber, daß *fw* keine Verkürzung der ſenkrechten Entfernung beyder durch AP, DP abgebildeten Parallelen ſey, ſondern die Verkürzung ihrer ſchrägen mit der Grundlinie parallelen Entfernung. Das Bild ihrer ſenkrechten Entfernung für die Vertiefung A*g*, wäre *gv*, wenn *vg* auf den 40ſten Grad zuläuft, damit *vgf* das Bild eines rechten Winkels werde, ſo wie P*fh* das Bild des Neigungswinkels gegen die Tafel iſt.

Dieſemnach kann man für die vertieften Maaſſe auf den Bildern ſolcher Linien, die gegen die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel geneigt ſind, einen völlig ähnlichen Perſpectiviſchen Maaßſtab machen, wie im vor. §. für die Bilder ſenkrechter Linien diente. Wenn z. E. $\vartheta = 58°$ iſt, und $OR = D$, $RP = D \tang 58°$; ſo hat man $OP. = D \sec\vartheta$. Will man alſo auf der lothrechten Linie ET den Maaßſtab 51 F.
haben, ſo nehme man $EW = OP = D \sec\vartheta$, und $FG = 1$ Fuß, ziehe EG und WF, durch ihren Durchſchnittspunct I aber mit der Grundlinie eine Parallele I1, ſo iſt F1 der erſte vertiefte Schuh. Für die übrigen verfährt man, wie im 33 §. ſchon gewieſen iſt.

Ja ſelbſt der Maaßſtab ACD kann als ein allgemeiner Maasſtab auch für die ſchrägen Vertiefungen dienen. Es ſey CK die gråde Vertiefung von *n* Schuhen, und KL die Vertiefung von den nächſt

folgenden m Schuhen; die wahre Länge eines Schuhes ſey $= p$, und $AC = a$, ſo iſt $AK = \frac{D}{D + np} \cdot a$, $AL = \frac{D}{D + (n + m)p} \cdot a$, mithin $AK : AL = D + (n + m)p : D + np$, und $AL = \frac{D + np}{D + np + mp} \cdot AK$. Nun ſey eine Linie PQ, die um den Winkel ϑ von der Ebene des Auges abweicht, ſo zu theilen, daß das unterſte Stück QS m Schuhe lang werde, ſo muß $PS = \frac{D \sec\vartheta}{D \sec\vartheta + mp} \cdot PQ$ ſeyn. Mit dem Halbmeſſer AC ſey der Quadrant CMZ beſchrieben, und die Parallele $K\vartheta$ verlängert, bis ſie den Quadranten in M ſchneidet, ſo iſt $\frac{AK}{AM} = \frac{AK}{a} = \cos CAM = \frac{D}{D + np}$, weil $AK = \frac{D}{D + np} \cdot a$ war, mithin $D + np = \frac{D}{\cos CAM} = D \sec. CAM$, und das giebt $AL = \frac{D \sec. CAM}{D \sec. CAM + mp} \cdot AK$. Aus A ſchlage man mit dem Halbmeſſer PQ einen Bogen, der KM in N ſchneidet, und ziehe AN durch L aber die Parallele LV, ſo iſt $\frac{AV}{AN} = \frac{AL}{AK} = \frac{D \sec. CAM}{D \sec. CAM + mp}$, folglich $AV = \frac{D \sec. CAM}{D \sec. CAM + mp} \cdot PQ$, weil $AN = PQ$ iſt.

Man nehme nun an, es ſey auch PS = AV, ſo wird

$$\frac{D\,\text{ſec}\,\vartheta}{D\,\text{ſec}\,\vartheta + mp} = \frac{D\,\text{ſec}\,CAM}{D\,\text{ſec}.CAM + mp},$$ und

man erhält $\text{ſec}.CAM = \text{ſec}.\vartheta$, mithin $CAM = \vartheta$.

Hieraus fließt umgekehrt folgende Regel, wie der Maaßſtab ACD dienen kann, jede ſchräge Vertiefung PQ einzutheilen, wenn ϑ der Abweichungswinkel von der Ebene des Auges iſt. Mit dem Halbmeſſer AC verzeichne man den Quadranten CZ, und theile ihn in ſeine Grade von C nach Z gezählt. Von C zähle man ſo viele Grade bis M, als der Winkel ϑ faſſet, und durch M ziehe man eine Parallele MK mit der Grundlinie. Trift dieſe nun einen ſchon vorhandenen Theilungspunct K, ſo iſt AK ſchon ſo getheilt, wie PQ getheilt werden muß. Demnach macht man wie vorhin AN = PQ, und wenn QS *m* Schuhe faſſen ſoll, ſo zählt man ſo viele Schuhe von K nach L hinauf, zieht durch L die Parallele LV, und macht QS = NV, oder PS = AV. Denn es erhellet wie vorhin, daß $AL = \frac{D + np}{D + np + mp} . AK$ ſey, und $AK = \frac{D}{D + np} . a$; nun aber iſt $\text{coſ}\,CAM = \text{coſ}\,\vartheta = \frac{AK}{a} = \frac{D}{D + np}$, und $\text{ſec}\,\vartheta = \frac{D + np}{D}$, mithin

$$AL = \frac{D\,\text{ſec}\,\vartheta}{D\,\text{ſec}\,\vartheta + mp} . AK,$$ folglich auch

$$AV = \frac{D\,\text{ſec}\,\vartheta}{D\,\text{ſec}\,\vartheta + mp} . AN,$$ und

PS =

$$PS = \frac{D \sec \vartheta}{D \sec \vartheta + mp} . PQ,$$ wie erfordert wird.

Träfe MK auf keinen Theilungspunct zu, ſo würde man doch hiedurch das Verhältniß AK : AC $= \cos \vartheta$ finden, das giebt $\frac{D}{D+np} = \cos \vartheta$, und daraus folgt $n = \frac{D(1-\cos \vartheta)}{p \cos \vartheta} = \frac{D}{p}$.

$$\frac{\sin v . \vartheta}{\cos \vartheta} . = \frac{D}{p} (\sec \vartheta - 1).$$

Dies wird nun eine Zahl mit einem angehängten Bruch ſeyn, und wenn gleich letzterer ſich gewöhnlich in Decimaltheilen ergeben wird, ſo kann hier, wo keine groſſe Schärfe nöthig iſt, ein nahe kommender gemeiner Bruch, etwa $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, genommen werden. Wenn alsdenn, nachdem es der Nenner eines ſolchen Bruchs an die Hand giebt, AC in halbe, 3tel, oder 4tel Schuhen dem 33 §. gemäß perſpectiviſch getheilt wird, ſo wird MK wenigſtens ſehr nahe einen Theilungspunct treffen; und AK wird nun ebenfalls in halbe, $\frac{1}{3}$tel oder $\frac{1}{4}$ Fuſſe für die ſchräge Vertiefung unter dem Winkel ϑ eingetheilt ſeyn.

35. §.

50 F. Jede grade Linie, wie fg auf der Tafel perſpectiviſch einzutheilen.

Aufl. Man verlängere fg bis an die Horizontallinie in P, nehme $P\Pi = PO = D \operatorname{coſec} \eta = D (\cot \eta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \eta)$, (24 §.) ziehe Πf und Πg, hiernächſt aber durch f mit der Grundlinie eine Parallele fh, welche Πg, in h ſchneidet: ſo iſt fg ſo viele vertief-

tiefte Fuſſe lang, als fh verkürzte Fuſſe faſſet. (25 §. num. 2.) Wenn demnach fu, ux, verkürzte Schuhe für fh ſind, und man ziehet Πu, Πx, welche fg in y, z, ſchneiden, ſo ſind fy, yz, vertiefte Füſſe für fg, weil aus denſelben angeführten Grunde fu, fy, und fx, fz Bilder gleich langer Linien ſind. Wenn man nun Πf und Πg bis an die Grundlinie in C und D verlängerte, ſo wüſte man, daß fh ſo viele verkürzte Füſſe faſſet, als CD geometriſche: theilte man alſo nun CD in ſeine Fuſſe ein, ſo könnte man von allen Theilungspuncten in Π Linien ziehen, und dieſe würden fh in verkürzte, ſo wie fg in vertiefte Füſſe theilen.

Man kann aber auch die verkürzten Füſſe in fh auf folgende Art finden. Es iſt $fh = \frac{D}{D+\delta}$ .FH (45 Fig.) oder $fh = \frac{D}{D+\delta} \cdot CD$ (13 §.) und $\frac{D}{D+\delta} = \frac{D \operatorname{coſec} \eta}{D \operatorname{coſec} \eta + \delta \operatorname{coſec} \eta} = \frac{Pf}{AP}$ $= \frac{\Pi f}{\Pi C} = \frac{Rf}{RN}$ (33 §.) Man verlängere fh bis an RT in r, und ſetze $Rr = \alpha$, ſo iſt $\frac{Rf}{RN}$ $= \frac{Rr}{RT} = \frac{\alpha}{a}$, mithin auch $fh = \frac{\alpha}{a}$ FH, oder $fh = \frac{\alpha}{a} \cdot CD$. Wenn demnach fu, ux, verkürzte Füſſe auf fh ſind, ſo iſt $fu = \frac{\alpha}{a} \cdot 1$

Fuß,

Fuß, $fx = \frac{\alpha}{a} \cdot 2$ Fuß u. ſ. f. Das heiſt, die verkürzten Füſſe auf fh ſind in dem Verhältniß $a : \alpha$ verjüngte geometriſche Fuſſe, da dann Rr der ſenkrechte Abſtand des Puncts f von der Horizontallinie iſt: und daraus fließt folgende Regel.

Man ziehe fL auf die Horizontallinie ſenkrecht, und theile fL in ſo viele gleiche Theile, als die Höhe des Auges a=RT geometriſche Fuſſe faſſet, ſo iſt fL$=\alpha$ der verkürzte Maaßſtab für fh, und man kann fh auf fL, wie ſonſt jede Linie vermittelſt eines geometriſchen verjüngten Maaßſtabs meſſen. Es ſind nemlich nun alle gleiche Theile in fh in dem Verhältniß $\frac{\mathrm{R}r}{a}$, oder $\frac{f\mathrm{L}}{a}$ kleiner, als die geometriſchen Schuhe, welche die Höhe des Auges RT$=a$ faſſet.

Auf ſolche Art läſt ſich für jede Vertiefung hinter der Tafel ein verkürzter Maaßſtab finden, auf welchem die mit der Grundlinie in dieſer Vertiefung parallel laufenden Linien gemeſſen und eingetheilt werden können. Die eingetheilte Parallele aber dient hiernächſt eben ſo, jede von derſelben ſchräge oder ſenkrecht fortlaufende Vertiefung zu meſſen, und einzutheilen, wie die Grundlinie ſelbſt dient, die von derſelben fortlaufenden Vertiefungen nach Vorſchrift des 32. und 34 §. zu meſſen und einzutheilen.

Man kann demnach die jeder Vertiefung δ zugehörige Verkürzung nicht allein durch $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}+\delta}$, ſon-

ſondern auch durch $\frac{\alpha}{a}$ ausdrücken, und die Glei-
chung $\frac{D}{D+\delta} = \frac{\alpha}{a}$ giebt $\alpha = \frac{D}{D+\delta} \cdot a$, ſo
wie auch $\delta = \frac{1-n}{n} \cdot D$, $\frac{\alpha}{a} = n$ geſetzt,
woraus für jede Verkürzung die zugehörige Vertiefung, und umgekehrt jene aus dieſer gefunden wird. Uebrigens iſt nichts bequemer, als die Art, die Länge jeder perſpectiviſchen Linie auf der Tafel zu meſſen, die ſich auf dieſe Schlüſſe gründet. Der ſenkrechte Abſtand eines jeden Puncts dieſer Linie von der Horizontallinie iſt der Maaßſtab dazu, nachdem derſelbe in ſo viele gleiche Theile getheilt worden, als die Höhe des Auges geometriſche Fuſſe faſſet. In der That iſt $fL = \alpha = \frac{D}{D+\delta} a$ die der Entfernung δ hinter der Tafel gemäß verkürzte oder verjüngte perſpectiviſche Höhe des Horizonts, worin das Auge liegt, über der horizontalen Grundfläche (12 §.) und fL iſt das Bild einer Verticallinie über dem Punct f im Horizont, die ſo hoch als die Höhe des Auges iſt. Dieſemnach iſt fL in ſo viele gleiche Theile, als Füſſe die Höhe des Auges ausmachen, eingetheilt, zugleich der Maaßſtab für jede Verticallinie, die über einen Punct der Parallele fr ſtehet, oder von der Tafel um denſelben Abſtand δ entfernt iſt. Hievon wird unten im VI. Abſchnitt weiterer Gebrauch gemacht werden.

36. §.

So bequem indeſſen dieſe Regeln für die perſpec-

ſpectiviſche Eintheilung der Linien immer ſeyn mögen; ſo unangenehm bleibt es doch, daß man genöthiget iſt, das Papier mit vielen überflüſſigen Linien zu überziehen, die man wieder weglöſchen muß, wenn man nicht den erſten Entwurf der Zeichnung nachdem wieder auf ein reines Blad copiren will. Es kommt bey allen bisher betrachteten Fällen beſtändig darauf an, daß eine Linie, wie AP oder NR, in einem bekannten Verhältniß getheilt werden ſoll, und wenn man ſich die Mühe geben will, ſo laſſen ſich alle nöthige Abtheilungen durch Rechnungen finden, der man jedoch, um die Zeit zu erſparen, gern überhoben iſt, zumahl wo es auf keine geometriſche Schärfe ankommt. Die geometriſche Aufgabe: eine Linie in einem gegebenen Verhältniß zu theilen, läſt ſich vermittelſt eines bekannten Inſtruments ſehr bequem in allen Fällen auflöſen, wo keine große Schärfe nöthig iſt, und man kann dadurch viele Zeit erſparen, die man ſonſt mit Rechnen, oder Zeichnen hinbringen müſte. Zwey grade meſſingene Li-
46 F. neale ABCD, EFCD, werden bey C vermittelſt eines guten Gewindes, auf ähnliche Art wie die Stäbe eines ſonſt bekannten Cirkelinſtruments an einander ſo befeſtiget, daß ſie ſich um den Punct C umdrehen, und in jede ſolche Lage bringen laſſen, daß ihre zwey
47 F. innere Seitenlinien CD, C*d*, wie es die 47 Fig. vorſtellt, einen gewiſſen Winkel einſchlieſſen. Hat man nun auf jedem Lineal eine grade Linie wie CA, CE, ſo gezogen, daß beyde in dem Punct C zuſammen laufen, ſo ändert ſich auch der Winkel ACE, wenn man das Inſtrument öfnet. Beyde Schenkel dieſes Winkels CA und CE werden gleich lang abgemacht, und hiernächſt der eine eben ſo, wie der andere in einem

nem gewiſſen Verhältniſſe bey F und f eingetheilt, damit CF = Cf ſey. Wenn nun eine andre Linie GH, die nicht (49. §.) länger iſt, als die Summe der beyden Schenkel des Inſtruments, in eben dem Verhältniß getheilt werden ſoll, ſo faſſet man ſie zwiſchen dem gewöhnlichen Hand-Cirkel, ſetzt eine Spitze in den einen Endpunct E und bringt die Schenkel ſo weit aus einander bis die andre Spitze in A fällt, mithin der Abſtand AE = GH iſt. In dieſer Lage läſt man die Schenkel des Inſtruments bleiben, wie denn auch deswegen das Gewinde C ſo eingerichtet ſeyn muß, daß ſich zwar die Schenkel ohne Schwürigkeit öfnen laſſen, aber doch auch aus der Lage, worin ſie einmahl gebracht ſind, ſich nicht leicht verrücken. Nun faſſet man den Abſtand Tf der Puncte F und f zwiſchen dem Handcirkel, und trägt ihn aus G nach I, ſo iſt GH bey I ſo getheilt, wie die Schenkel des Inſtruments bey F und f, denn es iſt AE ♯ Ff (204 §. Geom.) alſo das Dr. ACE c Dr. FCf (210. §. Geom.) und CA : CF = AE : Ff, mithin CA : CF = GH : GI. Das Inſtrument heiſt von ſeinem Gebrauch ein **Proportional-Cirkel.**

37. §.

Man kann auf den Schenkeln eines ſolchen Proportional-Cirkels ſehr viele verſchiedene Verhältniſſe ein für allemahl auftragen, und denſelben dadurch zum Gebranch ſehr bequem machen. Die einfachſte Art dieſes zu bewerkſtelligen beſtehet darin, daß man beyde Schenkel CA, CE in gleich viele ganz kleine gleiche Theile eintheilt, da dann CA, CE, 46 F. die **arithmetiſchen Linien** des Proportionalcirkels heiſſen: alsdenn dient derſelbe, jede Länge, die das

47 Inſtrument faſſen kann, in einem durch ganze Zah-
48 F. len ausgedruckten Verhältniß zu theilen, wenn die gröſte dieſer Zahlen die Zahl der Theile, die jeder Schenkel faſſet, nicht übertrift. Soll z. E. KL in dem Verhältniß 64:23 getheilt werden, ſo öfnet man den Proportional-Cirkel ſo weit, daß der Abſtand der mit der Ziffer 64 bezeichneter Puncte = KL wird, faſſet nun den Abſtand von 23 bis 23 zwiſchen den Hand-Cirkel, und trägt ihn von K nach M, ſo iſt KL : KM = 64 : 23.

Dieſer Gebrauch des Inſtruments iſt aber auch deswegen noch eingeſchränkt, weil manche Verhältniſſe ſich nicht wohl anders als durch groſſe Zahlen, ja die Irrational-Verhältniſſe gar nicht genau durch Zahlen ausdrucken laſſen, da doch viele dergleichen Verhältniſſe durch eine leichte Geometriſche Zeichnung genau gefunden und durch Linien ausgedruckt werden können. Wenn nun dergleichen Verhältniſſe oft vorkommen, ſo iſt es ſehr bequem, wenn ſie ein für allemahl auf den Proportional-Cirkel aufgetragen ſind. Ein Beyſpiel davon geben die Seitenlinien der regulären Polygone ab, die in ähnlichen Polygonen ſich wie die Halbmeſſer der zugehörigen Kreiſe verhalten. Hat man dieſe einmahl für einen gewiſſen Halbmeſſer durch eine geometriſche Zeichnung geſucht, und auf die Schenkel des Proportional-Cirkels aufgetragen, ſo hat man ſie für unzählig viele verſchiedene Halbmeſſer, welche die Summe der Schenkel nicht übertreffen.

38 §.

Wenn beyde Liniale ABCD und EFCD, welche die Schenkel des Proportional-Cirkels ausmachen, breit

breit genug ſind, ſo kann man auf jedes Lineal mehr als eine Linie ziehen, ſo daß alle in C zuſammen laufen, wie CA, CP; imgleichen CE, CQ, die alsdenn paarweiſe, wie CA, CE, imgleichen CP, CQ zuſammen gehören, da dann die zuſammen gehörigen auf einerley Art eingetheilt werden. Damit alsdenn die zuſammen gehörigen deſto leichter von den übrigen unterſchieden werden können, zieht man ſie dergeſtalt, daß ſie mit der innern Seitenlinie CD, Cϑ, beyder Lineale gleiche Winkel machen, und legt ihnen zugleich Nahmen bey, die ſich auf die Verhältniſſe, nach welchen ſie eingetheilt ſind, beziehen. Es ſey z. E. CP = CQ der Durchmeſſer eines Kreiſes, ſo iſt die Seite des regulären Sechsecks in dieſem Kreiſe = $\frac{1}{2}$ CP. Verzeichnet man mit dieſem Halbmeſſer den Kreis würklich, und ſucht den Vorſchriften der Geometrie gemäß die Seitenlinien des regulären Drey-Vier-Fünf-Seiten-Ecks u. ſ. f. in eben dem Kreiſe; ſo kann man ſie hiernächſt auf den Proportional-Cirkel von C nach 3, von C nach 4, und eben ſo nach 5, nach 6, nach 7, u. ſ. f. auftragen, ſo hat man zugleich die Seitenlinien aller dieſer Polygone für unzählig viele verſchiedene Kreiſe, deren Durchmeſſer die Summe der Schenkel des Inſtruments nicht übertrift. Wenn für den Halbmeſſer RS die Seite des Siebenecks verlangt wird, ſo öfnet man den Proportional-Cirkel ſo weit, daß der Abſtand von 6 bis 6 dem gegebenen Halbmeſſer RS gleich wird, ſo iſt der Abſtand von 7 bis 7 die geſuchte Seite des Siebenecks, die man mit dem Hand-Cirkel abtragen kann. Die ſo eingetheilte Linie CP oder CQ heiſt nun die Polygon-Linie.

39. §.

Weil man die Verhältniſſe der Tangenten und Secanten verſchiedener Winkel für verſchiedene Halbmeſſer oft in der Perſpectiv nöthig hat, ſo wird der Proportional-Cirkel zum Gebrauch in der Perſpectiv oft bequem dienen können, wenn auch demſelben ein paar Schenkel im Verhältniß der Tangenten, und ein Paar andre im Verhältniß der Secanten eingetheilt werden, wie in der 52 Fig. CA und CB,
52 F. eingetheilt ſind. An jedem Endpunct wird die Zahl der Grade desjenigen Winkels beygeſetzt, wozu die Tangente oder Secante gehört: und weil die Tangente von 45°, ſo wie die Secante von 0° dem Halbmeſſer gleich ſind, ſo gehören die aufgetragenen Linien zum Halbmeſſer CD. Soll nun für einen andern Halbmeſſer EF die Tangente oder Secante von 50° geſucht werden, ſo öfnet man den Proportional-Cirkel ſo weit, daß der Abſtand von 45° bis 45° = EF wird, alsdenn iſt der Abſtand von 50° bis 50° auf den Tangenten-Linien die Tangente von 50° für den Halbmeſſer EF. Um die Secante zu haben, muß man die Schenkel des Proportional-Cirkels nur ſo weit von einander bringen, daß der Abſtand von 0° bis 0° auf der Secantenlinie = EF wird, ſo iſt der Abſtand von 50° bis 50° auf der Secanten-Linie die geſuchte Secante.

Will man nun zum Behuf einer perſpectiviſch-ichnographiſchen Zeichnung, auf der Horizontallinie den Winkelmeſſer dem 20 u. 26. §. gemäß auftragen, ſo erhellet, daß dieſes vermittelſt des Proportional-Cirkels und der darauf befindlichen Tangenten-Linien geſchehen kann, wenn man den gegebenen Abſtand des Auges für den Halbmeſſer annimmt.

40 §.

40. §.

Bey Eintheilung und Ausmeſſung der Per- 50 F.
ſpectiviſchen Linien auf der Tafel leiſtet der Propor-
tional-Cirkel vorzüglich gute Dienſte: denn die arith-
metiſche Linie dient, alle mit der Grundlinie parallel
laufenden Linien ſehr leicht und kurz zu meſſen, wenn
man nur weis, wie viele geometriſche Fuſſe die Höhe
des Auges faſſet. Soll man die mit der Grundli-
nie parallel laufende Linie *fh* meſſen, ſo iſt ihr Ab-
ſtand *f*L von der Horizontallinie der Maaßſtaab da-
zu, wenn *f*L in ſo viele gleiche Theile getheilt wird,
als die Höhe des Auges *a* geometriſche Schuhe lang
iſt. Geſetzt, dies ſind 41 Schuh, ſo muß alles
was auf der durch *f* laufenden Parallele zu meſſen iſt,
nach einem ſolchen Maasſtabe gemeſſen werden,
worauf *f*L=41 Schuh iſt. Um demnach *fh* zu
meſſen, öfne man den Proportional-Cirkel ſo weit,
daß auf den arithmetiſchen Linien der Abſtand von
41 bis 41 ſo lang als *f*L iſt: nehme darauf *fh* zwi-
ſchen dem Hand-Cirkel, und ſehe nach, welche von
den mit einerley Zahl bezeichneten Puncten nun um
den Abſtand *fh* von einander entfernt ſind. Die da-
bey ſtehende Zahl zeigt an, wie lang *fh* in verkürz-
ten Fuſſen ſey.

Auf dieſe Art läſt ſich auch jede verlangte Länge, die in einerley Maaß mit dem Abſtand und der Höhe des Auges gegeben iſt, von *fr* abſchneiden. Soll z. E. *fh* 20 Fuß lang ſeyn, und man weis, daß die Höhe des Auges 41 Fuß betrage: ſo öfnet man wiederum den Proportional-Cirkel ſo weit, daß der Abſtand von 41 bis 41 ſo groß als *f*L wird, faſſet hiernächſt den Abſtand von 20 bis 20 zwiſchen

dem Hand-Cirkel und trägt ihn von *f* nach *h*, ſo iſt *fh* 20 verkürzte Fuß lang.

Aehnliche Dienſte kann die Arithmetiſche Linie des Proportional-Cirkels bey Eintheilung und Ausmeſſung ſolcher Linien leiſten, die in einem Punct der Horizontallinie zuſammen laufen.

Soll man eine Linie, wie *fg* (50 Fig.) eintheilen oder ausmeſſen, ſo macht man $P\Pi = OP$, ziehet Πg, durch *f* aber mit der Grundlinie eine Parallele, welche Πg in *h* ſchneidet. Nun meſſe man *fh*, wie oben vorgeſchrieben iſt, ſo iſt zugleich *fg* gemeſſen: und weil man *fh* nun vermittelſt des Proportional-Cirkels in verkürzte Fuſſe theilen kann, ſo läſt ſich *fg* dem 35 §. gemäß in vertiefte Fuſſe theilen. Soll man von *f*P ein Stück von verlangter Länge abſchneiden, ſo ſchneidet man auf *fr* nach obiger Vorſchrift ſo viele verkürzte Fuſſe von *f* nach *h* ab, als *fg* vertiefte faſſen ſoll: ziehet hiernächſt Πh, ſo findet man *fg* als die verlangte Länge.

41. §.

Noch bequemer kann man den Proportional-Cirkel zu dem letztern Gebrauch einrichten, nemlich zur Eintheilung und Ausmeſſung ſolcher Linien, die in einem Punct der Horizontallinie zuſammen laufen, wenn man eine oder etliche Linien auf demſelben ein für allemahl ſo eintheilt, wie es den Gründen des 32 und 34 §. gemäß iſt. Hiebey muß man zwar eine gewiſſe Diſtanz des Auges von der Tafel zum Grunde legen, es wird ſich aber gleich weiter ergeben, daß alsdenn eben die eingetheilte Linie auch für andre Diſtanzen des Auges dienen könne. Man neh-

nehme an, der Abſtand des Auges betrage 10 Fuß, 53 F.
und theile auf dem Proportional-Cirkel die Linie BC ſo ein, daß C. 11. = $\frac{10}{11}$ CB, C. 12 = $\frac{10}{12}$ CB, C. 13. = $\frac{10}{13}$ CB wird u. ſ. f. und ſetze beym Endpunct B die Zahl 10, bey den übrigen aber gegen C zu die Zahlen 11, 12, 13, u. ſ. f. nach der Ordnung fort; ſo iſt CB ſo eingetheilt, wie jede in den Augenpunct laufende Linie in vertiefte Maaſſe eingetheilet werden muß. Iſt der Proportional-Cirkel lang genug, daß man kleinere Theile auftragen kann, ſo brauche man auch die Brüche $\frac{10}{10,1}$, $\frac{10}{10,2}$, $\frac{10}{10,3}$, u. ſ. f. $\frac{10}{11,1}$, $\frac{10}{11,2}$, $\frac{10}{11,3}$, u. ſ. f. ſo können die gröſſern Abtheilungen Ruthen, die kleinern Schuhe, oder die gröſſern Schuhe, die kleinere Zolle vorſtellen, nachdem es die Entfernung des Auges von der Tafel erfordert. Daß bey dieſer Eintheilung die ſchon eingetheilte Arithmetiſche Linie ihre Dienſte leiſten könne, wird man leicht wahrnehmen.

Eben dieſelbe eingetheilte Linie dient zugleich für jede Diſtanz des Auges, die gröſſer als 10 Fuß iſt. Wäre ſie z. E. 15 Fuß, und man zählt von B nach D noch 5 Fuß zur angenommenen Diſtanz von 10 Fuß zu, ſo iſt CD eben ſo eingetheilt für die Diſtanz von 15 Fuß, wie CB für die Diſtanz von 10 Fuß. (34. §.) Den bequemen Gebrauch einer auf ſolche Art eingetheilten Linie wird man in folgender Aufgabe kennen lernen.

42. §.

50 F. Von der graden Linie NR oder AP mit Hülfe des Proportional-Cirkels ein Stück von verlangter Länge, das in einem gegebenen Punct anfängt, abzuſchneiden: oder auch ein gegebenes Stück einer ſolchen Linie auf der Tafel auszumeſſen.

Aufl. I. Wenn die Linie wie NR in den Augenpunct läuft, und man ſoll von N angerechnet ein Stück, das z. E. 14 Fuß lang iſt abſchneiden, wenn der Abſtand des Auges 10 Fuß beträgt; ſo öfnet man den Proportional-Cirkel ſo weit bis der Abſtand von 10 bis 10 der ganzen Länge NR gleich iſt, faſſet den Abſtand von 24 bis 24 zwiſchen dem Handcirkel, und trägt ihn von R nach *f*, ſo iſt N*f* 14 Fuß lang. Betrüge der Abſtand des Auges 12 Fuß, ſo müſte man den Proportional-Cirkel ſo weit öfnen, daß der Abſtand von 12 bis 12 = NR würde, und alsdenn die Diſtanz von 26 bis 26 von R nach *f* auftragen. In allen Fällen dient die Zahl, welche die Diſtanz des Auges ausdrückt zur Richtſchnur, wie weit man das Inſtrument öfnen muß: und wenn die Zahl der abzuſchneidenden Fuſſe dazu addirt wird, ſo weis man, welche Diſtanz auf dem Proportional-Cirkel genommen werden muß, um R*f* abzuſchneiden.

II.) Sollte man die gegebene Linie N*f* meſſen: ſo müſte man wie vorhin NR auf den Proportional-Cirkel von 10 bis 10 oder von 12 bis 12 auftragen, um ihn gehörig zu öfnen; hiernächſt aber R*f* zwiſchen dem Hand-Cirkel faſſen, um zu ſehen, welche von den mit einerley Zahl bezeichneten Puncten das

Pro-

Proportional-Cirkel nun um den Abſtand R*f* von einander entfernt ſind: die dabey ſtehende Zahl zeigt die Länge von N*f* an.

III.) Wofern aber von einem Punct wie *f* angerechnet, ein Stück von gegebener Länge z. E. von 9 Fuß abgeſchnitten werden ſoll; ſo mißt man zuförderſt N*f* nach Num. II; und wenn man z. E. 14 Fuß findet, ſo zählt man noch 9 Fuß dazu, nimmt den Abſtand von 21 bis 23, und trägt ihn von R bis *g*, ſo iſt *fg* 21 Fuß lang. Sollte man dieſe 9 Fuß von *f* zurück gegen N zu tragen, ſo müſte man ſie von 14 Fuß abziehen, und den Abſtand von 5 bis 5 aus R gegen N nach *g'* tragen; ſo wäre auch *fg'* 9 Fuß lang.

IV.) Im Fall man aber *fg* meſſen ſoll, ſo mißt man N*f*, und N*g* nach Num. II. ſo iſt die Differenz die Länge von *fg*.

V.) Läuft die zu theilende oder zu meſſende Linie in einen andern Punct P der Horizontallinie, wie AP, ſo ſucht man vorher aus der bekannten Diſtanz des Auges von der Tafel den Abſtand deſſelben von P vermittelſt der Secanten-Linie nach dem 39 §. jene Diſtanz des Auges von der Tafel für den Halbmeſſer genommen. Dieſe Diſtanz des Auges von P dient nun dem Proportional-Cirkel die gehörige Oefnung zu geben, eben ſo, wie die ſenkrechte Diſtanz des Auges von der Tafel Num. I-IV. dazu diente, und das übrige Verfahren bleibt mit den ſchon beſchriebenen in allen Fällen einerley.

43 §.

Man wird bey dem bisherigen Vortrage ſchon

für ſich die Anmerkung gemacht haben, daß die ganze Perſpectiv, in wiefern ſie als eine Mathematiſche Wiſſenſchaft zu betrachten iſt, ein Theil der Geometrie ſey: indeſſen geht doch ihre Abſicht vornemlich dahin, aus Geometriſchen Gründen leichte und für die Ausübung bequeme Methoden herzuleiten, wie man ſich bey der Zeichnung des Bildes auf der Tafel verhalten könne, ohne ſich entweder in weitläuftige Rechnungen einzulaſſen, oder auch in die zeitraubende Arbeit, eine groſſe Menge überflüßiger Linien zu ziehen, die zu der Zeichnung ſelbſt eigentlich nicht gehören. Dieſerwegen weis ich nicht, woher es kommt, daß alle unſre neuere Lehrbücher, wenn ſie die Perſpectiv vortragen ſogar ſehr kurz ſind, indem ſie es gemeiniglich bey einer ganz magern Auflöſung der beyden Aufgaben des 10 und 12 §. bewenden laſſen, und höchſtens ein Paar Anwendungen auf die leichteſten beſondern Fälle nach der im 14 §. gewieſenen Methode beyfügen, die zu nichts weniger hinlänglich ſind, als daß man auch nur beurtheilen lerne, ob eine vorgelegte perſpectiviſche Zeichnung regelmäßig, oder fehlerhaft ſey. Es fehlet eben nicht an practiſchen Schriftſtellern, welche die Regeln ſelbſt oft weitläuftig genug, ohne beygefügte Beweiſe, abhandeln. Manche aber haben dabey nicht den kürzeſten Weg genommen, andern fehlt es an der Deutlichkeit des Vorzugs, welches der gewöhnliche Fehler ſolcher Schriftſteller iſt, die ſelbſt wenig, oder gar keine Theorie beſitzen. Liebhaber perſpectiviſcher Zeichnungen, die ſich vielleicht ſelbſt auch darin üben würden, werden durch die Weitläuftigkeit oder Dunkelheit des Vortrags practiſcher Schriftſteller abgeſchreckt, womit ſie doch bald

fer-

fertig werden könnten, wenn ſie durch eine vollſtändigere, und nicht durch eine zu kurze von der Ausübung noch zu ſehr entfernte Theorie dazu vorbereitet wären. Der geübte Geometer kann freylich aus einem einzigen allgemeinen Problem eine groſſe Menge beſondrer Anwendungen herleiten: allein der noch nicht ſo geübte Anfänger verlangt eine nähere Anleitung, wenn ihm eine Wiſſenſchaft angenehm werden ſoll.

44 §.

Weil die alten Griechen in der Mahlerey und Bildhauerkunſt ſchon groſſe Meiſter hatten, ſo iſt wohl kein Zweifel, daß ſie nicht gewiſſe Regeln der Kunſt, perſpectiviſche Zeichnungen zu entwerfen, gehabt haben: indeſſen fehlt es an Nachrichten, wie weit es die Alten in der Theorie der Perſpectiv gebracht haben, ſo ſehr, daß Montucla in der Hiſtoire des Mathematiques Part. III. Liv. V. num. III. pag. 634. Die neuern Mathematiker ſeit dem Ende des 15 Jahrhunderts als zweyte Erfinder betrachtet, nachdem er eine kurze Nachricht aus dem Vitruv (de Architectura Lib. VII. Cap. I.) von der Perſpectiv der Alten angeführt hat. Alb. Dürer, ein Deutſcher, in ſeinem Buch vom Cirkel und Richtſcheid, und Pietro del Borgo San-Stephano, haben zuerſt in den neuern Zeiten von der Perſpectiv geſchrieben, und zwar der letztere in dreyen Büchern, die Egratio Dante ſehr lobt. Nach der Zeit ſchrieb Daniel Barbaro davon eine Abhandlung im Jahr 1569, Balthaſar Peruzzi verbeſſerte die Erfindung des Pietro del Borgo, und führte den Gebrauch der Diſtanz-Puncte und Diſtanz-Linien (11 §.) ein: ihm

ihm folgte Vignole in ſeinem nützlichen Werk, welches hauptſächlich practiſch geſchrieben iſt. Egnatio Dante trägt zwar die Beweiſe vor, aber nach damahliger Art unnöthig weitläuftig. Alle bisher genannte Schriftſteller hat Guido Ubaldi übertroffen, und die Gründe der Perſpectiv zuerſt in gröſſerer Allgemeinheit vorgetragen. In ſeiner im Jahr 1600 davon herausgegebenen Schrift hat derſelbe zuerſt den oben im 17. §. bewieſenen Lehrſatz vorgetragen, und den Grund zum Gebrauch der Vereinigungspuncte (17. §.) (punctorum accidentalium) gelegt, da man bis dahin nur den ſchlechthin ſo genannten Augenpunct (5. §.) (punctum principale) gebraucht hatte. Sein Buch iſt zwar auch noch nach damahliger Art in manchen Stücken weitläuftiger als nöthig wäre, doch gehört er unſtreitig zu den beſten Schriftſtellern der damahligen Zeit, wovon ſeine übrigen Werke, und unter andern ſein Buch: de Cochlea, Libri quatuor, Venetiis 1615 zeuget. Dies letztere hätte ich im 502 §. Hydraul. mit angeführt, wenn ich es damahls ſchon ſelbſt gekannt hätte. Nun da ich es ſelbſt habe leſen können, iſt es mir ein ungemeines Vergnügen geweſen, daß ich alles darin ſchon gefunden habe, was vor H. Eulern von den a. a. O. angezeigten Schriftſtellern von der Waſſerſchraube iſt gelehrt worden. Beym Montucla findet man ein Verzeichniß der übrigen zur Perſpectiv gehörigen vornehmſten Schriftſteller, unter welchen ich jedoch den Girard Deſargues aus Lion und Abraham Boſſe aus der Stadt Tours vermiſſe. Beyde waren berühmte Kupferſtecher in der erſten Hälfte und um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, und Boſſe war ein Schüler vom Deſargues. Von

des

des letztern Schriften habe ich ſelbſt bisher keine kennen gelernt, vom Abrah. Boſſe aber ſind mir folgende bekannt: Maniere univerſelle de Mr. Deſargues pour pratiquer la Perſpective par petit-pied comme le Geometral par A. Boſſe. A Paris 1648. Moyen univerſel de pratiquer la Perſpective ſur les tableaux ou ſurfaces irreguliers par A. Boſſe. a Paris 1653. Traite des Pratiques Geometral & Perſpectives enſeignés dans l'Academie Royale de la Peinture & Sculpture par A. Boſſe. a Paris 1665. Zu den theoretiſchen Schriftſtellern, welche, wie Deſchales, die allgemeinen Gründe der Perſpectiv in gröſſern Werken von der Mathematik mit vorgetragen haben, gehört auch Taquet, von deſſen Operibus ich die zu Antwerpen 1669 in Fol. herausgekommene Ausgabe beſitze. Er trägt die allgemeine Theorie der Perſpectiv im zweyten Buch der Optik vor. Auch gehören hieher Franc. Aguilonii Opticorum Libri Sex, Antwerp. 1613. und zwar beſonders im VI. Buch. Uebrigens bemerke ich noch, daß des Deſchales Perſpectiv im II. Theil ſeines Mundi Mathematici, und ferner des s'Graveſande Eſſai de Perſpective 1711 mit Recht vom Montucla gerühmt werden. Tailors Perſpectiv findet nach ſeiner Verſicherung in Engelland vielen Beyfall: ſie iſt nach ſeinem Bericht ins franzöſiſche überſetzt, und mit des Patrice Murdoch Nouveaux Principes de Perſpective lineaire zu Lyon 1758 herausgegeben worden.

45 §.

Ob man gleich den lateiniſchen Elementis Matheſeos des Herrn von Wolff für die Zeit, als er ſie zuerſt aufſetzte, das Lob einer gewiſſen Vollſtän-

dig-

digkeit in den mehreſten Theilen der practiſchen Mathematik nicht abſprechen kann; ſo iſt doch die Perſpectiv im III. Theil am unvollſtändigſten geblieben. Sie enthält noch nicht einmahl die oben im I. Abſchnitt vorgetragenen erſten Gründe dieſer Wiſſenſchaft ſo vollſtändig, als nöthig wäre, einen Begrif vom Unterſcheid des perſpectiviſchen und geometriſchen Maaßes zu geben: von den übrigen im zweyten Abſchnitt aus dem ſchönen Lehrſatz des Guido Ubaldi (17. §.) hergeleiteten Lehren aber gar nichts. Der Vereinigungspunct der perſpectiviſchen Parallelen (punctorum accidentalium) wovon doch ſchon Deſchales im Mundo Mathematico Tom. II. im IV. Buch der Perſpectiv umſtändlich gehandelt hat, und wovon auch andre ältere Schriftſteller mehr oder weniger Gebrauch machen, wird nur einmahl in einer Anmerkung beyläufig im 80 §. erwehnt, ohne zu zeigen, was es damit eigentlich für eine Bewandniß habe. Im 96 und 97. §. kommt zwar der erwehnte Lehrſatz vor, jedoch ſehr ſpät, und ohne die rechte Anwendung davon für die Ausübung zu machen. Deſto angenehmer muß den Liebhabern dieſer Wiſſenſchaft das ſchöne Handbuch des Hn. **Lamberts** ſeyn, welches unter dem Titel: **Die freye Perſpectiv, oder Anweiſung, jeden Perſpectiviſchen Aufriß von freyen Stücken, und ohne Grundriß zu verfertigen**, zu Zürch 1759 herausgekommen iſt. In demſelben iſt alles, was ſeit dem Guido Ubaldi ſchönes, an ſich allgemeines, zur Erleichterung der Arbeit, und zur genauen Kenntniß und Beurtheilung perſpectiviſcher Gemählde am meiſten beytragendes, hinzu gekommen iſt, kurz, bündig und für die Ausübung ſehr brauchbar vorge-

tra-

tragen: auch iſt gewieſen, wie ſich der Proportional-Cirkel zum Gebrauch in der Perſpectiv bequem einrichten läſſet. Von dem Gebrauch des letztern hat Hr. Lambert in einer andern kleinen Abhandlung: Kurzgefaßte Regeln zu perſpectiviſchen Zeichnungen vermittelſt eines zu deren Ausübung, ſo wie auch zu geometriſchen Zeichnungen, eingerichteten Proportional-Cirkels, Augsburg 1768. eine beſondre Beſchreibung gegeben, und zugleich bekannt gemacht, daß Herr Brander in Augsburg ſeiner häufigen und wichtigern mechaniſchen Arbeiten ungeachtet ſich entſchloſſen habe, bemeldeten Proportional-Cirkel dergeſtalt auszufertigen, daß Liebhaber denſelben genau und richtig verfertiget erhalten können.

46. §.

Die Einrichtung dieſes Proportional-Cirkels iſt folgende. Auf der einen Seite deſſelben ſind fünf Linien auf jedem Schenkel gezeichnet, die Paarweiſe zuſammen gehören, und von ihrem Gebrauch perſpectiviſche Linien heiſſen. Eine jede davon iſt auf die Art eingetheilt, wie es dem im 41. §. ſchon vorgetragenen Geſetz gemäß iſt, und zwar dergeſtalt, daß bey Eintheilung derſelben für die erſte der Abſtand des Auges $= 2$, für die zweyte $= 4$, für die dritte $= 6$, für die vierte $= 8$, und für die fünfte $= 10$ angenommen iſt. Die Eintheilungen ſind nach den Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ u. ſ. f. $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$, u. ſ. f. aber auch für die dazwiſchen fallende $\frac{2}{2,1}$, $\frac{2}{2,2}$, $\frac{2}{2,3}$, u. ſ. f. gemacht. Wenn die Nenner um

De-

Decimaltheile wachſen, ſo können die Eintheilungen auch dienen, wenn der Abſtand des Auges 20, 40, 60, 80, 100 wäre; und wenn andre Zahlen dieſen Abſtand ausdrucken, z. E. 1, 5, 30, 50, u. ſ. f.; ſo verhält man ſich der aus dem 41. §. ſchon bekannten Regel gemäß. Ein Paar dieſer Linien könnte an ſich ſchon genügen: weil aber ihrer mehrere für verſchiedene Diſtanzen des Auges gezeichnet ſind, ſo entſteht daher die Bequemlichkeit, daß man beym Eintheilen und Ausmeſſen dasjenige Paar dieſer Linien wählen kann, welches der Gröſſe der jedesmahligen Zeichnung am meiſten angemeſſen iſt, und worauf die kleinern Abtheilungen am meiſten auseinander geſetzt ſind.

Auf der andern Seite, wenn man das Inſtrument umkehret, hat derſelbe Proportional-Cirkel ebenfalls fünf Paar eingetheilte Linien, wovon man ihrer vier ſchon an den Nahmen, der arithmetiſchen Linie, der Linie der Sinus, der Tangenten und Secanten aus dem 37 und 39 §. erkennen wird. Auſſerdem befindet ſich noch eine Linie zur Verzeichnung der Ellipſe darauf, von deren Gebrauch unten das weitere folgen wird.

Den Gebrauch der Arithmetiſchen Linien des Proportional-Cirkels bey Eintheilung und Ausmeſſung der perſpectiviſchen Linien, hat Deſargues ſchon gewieſen. Um eben die Zeit iſt man ſchon darauf verfallen, in ungleiche Theile getheilte Linien zum perſpectiviſchen Gebrauch darauf zu bringen, die aber des Deſargues Beyfall, nach ſeines Schülers Boſſe Bericht, nicht erhalten haben. M. ſ. die 148 Kupfertafel mit der dazu gehörigen Erklärung in der

der Maniere univerſelle de M. D. pour pratiquer la Perſpective par petit-pied comme le Geometral par A. Boſſe, die ich im 44 §. ſchon angeführt habe.

Der IV. Abſchnitt.

Die perſpectiviſch ichnographiſche Zeichnung ebener Figuren.

47 §.

Wer ſich die bisherigen Lehren recht bekannt und geläufig gemacht hat, wird mit ungemein leichter Mühe jede gradlinichte Figur auf der Tafel perſpectiviſch zeichnen, wenn alle ihre Seiten-Linien und Winkel gegeben ſind, und überdem die Lage eines ihrer Winkelpuncte gegen die Ebene des Auges und die Tafel, nebſt der Lage einer durch dieſen Punct laufenden Seitenlinie gegen die Tafel oder die Ebene des Auges bekannt iſt. Wer in der Geometrie geübt iſt, weis, daß jede gradlinichte Figur durch Diagonallinien in Dreyecke getheilt werden könne; daß aus den Seiten und Winkeln der Figur auch die Diagonal-Linien nebſt den Winkeln, welche die Diagonallinien unter ſich und mit den Seitenlinien der Figur einſchlieſſen, gefunden werden können; daß

hinwiederum jede gradlinichte Figur ſich aus Dreye-cken zuſammen ſetzen laſſe, mithin die ganze Figur, wenn nur eine Seitenlinie gegeben iſt, allein vermittelſt der Winkel gezeichnet werden könne, welche die Seitenlinien unter ſich und mit den Diagonal-Linien einſchlieſſen. Wenn demnach alle die erwähnten Winkel, nebſt der Länge einer Seitenlinie der Figur bekannt ſind, deren Gröſſe und Lage ebenfalls bekannt iſt: oder wenn man ſtatt deſſen alle Seiten und Winkel der Figur kennet; ſo läſt ſich das Bild der Figur auf der Tafel eben ſo leicht zeichnen, als wenn man den Geometriſchen Grundriß der Figur ſelbſt zeichnen ſollte.

48 §.

Nach der im 14 §. gelehrten Methode, (welches die einzige iſt, wozu Hr. von Wolf in ſeiner Perſpectiv Anleitung giebt, einige wenige Abkürzungen bey ein Paar der leichteſten Fälle ausgenommen, worin ihm auch alle neuere Schriftſteller, mit Ausnahme des eintzigen Hn. Lambert, folgen,) muß man zuförderſt den Grundriß in der gehörigen Entfernung und Lage unter der Fundamentallinie zeichnen, und den Abſtand der Winkelpuncte von der Tafel und der Ebene des Auges ſuchen, und hiernächſt das Bild eines jeden von den Winkelpuncten für ſich, und zwar durchgängig nach Vorſchrift des 10 §. zu ſuchen. Man wird aber aus dem bisherigen leicht beurtheilen, daß man dieſer Mühe, den Grundriß unter der Fundamentallinie in ſeiner gehörigen Lage und Gröſſe zu zeichnen, ganz überhoben ſeyn könne. Unter gewiſſen Umſtänden kann es vortheilhaft ſeyn, anfangs den Grundriß für ſich allein

auf

auf einen beſondern Blade zu zeichnen, wenn man ſich die Mühe nicht nehmen will, gewiſſe Linien oder Winkel, die bey Zeichnung des Bildes bekannt ſeyn müſſen, durch Rechnung zu ſuchen, falls ſie nicht ſonſt ſchon bekannt ſind. In Fällen der leztern Art iſt der Grundriß ganz entbehrlich: Geſetzt aber man will ihn zu der eben erwehnten Abſicht vorher zeichnen, ſo iſt nicht nöthig, daß man dabey denſelben Maaßſtab brauche, worauf ſich die Perſpectiviſche Zeichnung beziehen ſoll, wie es nach der Methode des 14 §. nöthig iſt. Man kann nach Bequemlichkeit bey Zeichnung des Grundriſſes einen gröſſern oder kleinern Maaßſtab brauchen, weil man ſich bey Zeichnung des Bildes hiernächſt ſo verhalten kann, daß gar nichts bey derſelben von der Gröſſe des beym Grundriß gebrauchten Maaßes abhängt.

49. §.

Guido Ubaldi hat fünf und zwanzig verſchiedene Arten angegeben, wie aus der gegebenen Lage eines Puncts in der Fundamental-Ebene das zugehörige Bild auf der Tafel gefunden werden könne: allein dergleichen Umſtändlichkeit iſt oft von geringen oder wohl gar keinem Nutzen. Daß vielerley Arten möglich ſind, wie man ſich bey Zeichnung des Bildes einer gradlinichten Figur verhalten könne, iſt aus dem ſchon geſagten leicht abzunehmen: ich werde mich hier aber nur auf die brauchbarſten und bequemſten Arten einſchränken, und ſo viel davon ſagen, als nöthig iſt, die practiſchen Schriftſteller zu verſtehen, und dasjenige leicht zu überſehen, was ſie oft mit vielen Umſtänden ſagen. Das vornehmſte und nützlichſte davon läſt ſich auf drey Hauptmethoden

zurück führen, und das ſind folgende. Die erſte ſetzt die Zeichnung des Grundriſſes unter der Fundamentallinie voraus, und dieſe iſt im 14 §. ſchon beſchrieben worden. Sie iſt in den meiſten Fällen die unbequemſte, deswegen werde ich ſie in der Folge weiter nicht brauchen. Die zweyte Methode ſetzt die Zeichnung des Perſpectiviſchen Maaßſtabes (33. §.) an einer bequemen Stelle ſeitwärts auf der Tafel voraus: die dritte Methode bedient ſich der Vereinigungspuncte der Perſpectiviſchen Parallelen, und wie Hr. Lambert gewieſen hat, auch mit Vortheil des gehörig zum Perſpectiviſchen Gebrauch eingerichteten Proportional-Cirkels.

50. §.

Das Bild einer gradlinichten Figur mit Hülfe des Perſpectiviſchen Maaßſtabes auf der Tafel zu zeichnen.

Aufl. Dieſe Methode gränzt am nächſten an die im vor. §. erwehnte erſte Methode, wobey der Grundriß unter der Fundamentallinie nöthig iſt: die Diſtanzen aller Winkelpuncte der Figur von der Tafel und Ebene des Auges müſſen bekannt ſeyn, und der Perſpectiviſche Maaßſtab dient hiernächſt, ihre Bilder bequemer als nach der erſten Methode auf der Tafel zu bringen. Um die Diſtanzen zu finden, zeichnet man gewöhnlich zuerſt den Grundriß: und ob dies gleich an ſich nicht nothwendig iſt, weil man dieſe Entfernungen aus den übrigen datis, die bekannt ſeyn müſſen, auch durch Rechnung finden kann; ſo werde ich doch annehmen, der Grundriß ſey gezeichnet; theils um deswillen, weil man auf ſolche Art gleich auf einmahl überſehen kann, worauf

auf dieſe Methode ankommt; theils weil in den meiſten Fällen die Rechnung mehr Zeit als die Zeichnung erfordern würde, und überhaupt hier keine groſſe Schärfe nöthig iſt. Dies vorausgeſetzt beobachte man folgende Regeln.

1.) Man zeichne den Grundriß der Figur ABCDEF für ſich beſonders in der gehörigen Entfernung und Lage gegen die Fundamental-Linie TV. 54 F.

2.) Von allen Winkelpuncten A, B, C, D, E, F, laſſe man auf die Fundamentallinie lothrechte Linien fallen. Weil nun auch bekannt ſeyn muß, wie weit die Figur auf der einen oder der andern Seite von der Ebene des Auges entfernt iſt, ſo weis man, wie weit F oder C davon entfernt ſey. Demnach ſchreibe man an der Fundamentallinie, da wo das Loth aus F oder C hinfällt, bey P oder X, die Zahl der Schuhe, um welche F oder C von der Ebene des Auges entfernt iſt, und trage alsdenn das bey Zeichnung der Figur gebrauchte Fuß-Maaß auf der Fundamentallinie von P oder X nach der Rechten oder Linken weiter fort. Iſt z. E. F von der Ebene des Auges gegen die Rechte zu 4 Fuß entfernt, ſo ſchreibe man bey P die Ziffer 4, und trage das Fußmaas von P gegen V auf; ſo ſiehet man gleich, wie weit alle übrige Winkelpuncte von der Ebene des Auges entfernt ſind.

3.) Aus einem willkührlichen Punct V richte man über der Fundamentallinie eine lothrechte Linie V*v* auf, und laſſe auch auf dieſe aus allen Winkelpuncten der Figur ſenkrechte Linien fallen. Von V nach *v* trage man das gebrauchte Fußmaaß, ſo ſiehet

het man, wie tief jeder Winkelpunct der Figur hinter der Tafel liegt.

4.) Auf der Tafel ſey nun die Grundlinie TZ gehörig eingetheilt, und der Perſpectiviſche Maaßſtab ZY nach Vorſchrift des 32. §. gehörig eingetheilt.

5.) Auf der Grundlinie TZ nehme man von T nach *p* ſo viele Schuhe an, als die Entfernung des Puncts F von der Ebene des Auges ausmachen, z. E. hier 4 Schuhe, und trage nach *p*, *q*, *t*, *s*, *x*, ſo viele Schuhe, als im Grundriß zwiſchen P, Q, T, S, X, liegen.

6.) Von allen den Puncten *p*, *q*, *t*, *s*, *x*, ziehe man Linien *p*R, *q*R, u. ſ. f. nach den Augenpunct, ſo müſſen die Bilder aller Winkelpuncte in dieſen Linien liegen.

7.) So viele Fuſſe nun zwiſchen V und L, L und M, M und N, u. ſ. f. auf der ſenkrechten Linie V*v* liegen, ſo viele vertiefte Fuſſe nehme man von Z nach *l* von *l* nach *m*, von *m* nach *n*, u. ſ. f. und ziehe $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, u. ſ. f. mit der Grundlinie parallel; ſo müſſen die Bilder der Winkelpuncte auch in dieſen Parallelen liegen, und die Durchſchnitte mit den vorigen in den Augenpunct laufenden Linien geben die Bilder der Winkelpuncte. Weil $l\lambda$ und *q*R die Bilder von LA und QA ſind, ſo iſt α das Bild von A; aus eben dem Grunde iſt β das Bild von B, γ das Bild von C, u. ſ. f.

8.) Demnach zieht man nun die Bilder der Winkelpuncte nach der Ordnung mit graden Linien zuſammen, ſo iſt das Bild der gegebenen Figur gezeichnet.

51. §.

51. §.

Wer in der Geometrie und Trigonometrie geübt iſt, wird leicht die Diſtanzen PQ, QT, TS, SX, auf der Grundlinie, ſo wie die in die Tiefe laufenden Diſtanzen VL, LM, MN, durch Rechnung finden können. In ſo fern iſt alſo dabey der Grundriß entbehrlich, und man kann, um ſich bey der Rechnung zu helfen, mit einem ohngefehren Brouillon fertig werden. Weil aber die Rechnung oft mehr Zeit als die Zeichnung erfordert, ſo iſt dies eben kein ſonderlicher Vortheil. In der 54 Figur iſt ein reguläres Sechseck zum Beyſpiel gewählt, wovon eine Seitenlinie AB mit der Grundlinie in der Entfernung von 2 Fuß parallel liegt: jede Seitenlinie iſt 2 Fuß lang angenommen, mithin iſt PQ = 1 Fuß, QS = 2 Fuß, SX = 1 Fuß, VL = 2 Fuß, $LM = BC \sin 60° = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$ beynahe $= 1\frac{3}{4}$ Fuß = MN.

Wenn man annehmen will, daß das Auge die Figur grade vor ſich habe, mithin die Ebene des Auges mitten durch die Figur gehe, ſo wird die Linie TG, welche durch den Fußpunct des Auges lothrecht auf der Grundlinie in die Tiefe läuft, die Seitenlinie AB halbiren, mithin werden TQ, QP, ſowohl, als auch TS, SX einen Fuß lang ſeyn. Nun ſetzt man bey T die 0, und zählt die Fuſſe ſowohl gegen die Rechte, als auch gegen die Linke zu, eben ſo wie ſie auf der Grundlinie der Tafel gezählt ſind: ſo ſiehet man gleich von welchen Puncten der Grundlinie man Linien nach den Augenpunct ziehen muß.

52 §.

Man hat aber in der That nicht einmahl nöthig, dieſe Linien nach den Augenpunct zu ziehen, weil auch die Parallelen mit der Grundlinie allein genügen können, ſobald der Perſpectiviſche Maaßſtab genau und richtig gezeichnet iſt. Auf letzteren hat man für jede Vertiefung auch die verkürzten Schuhe, demnach trage man im erſten Exempel des 51 §. von g nach α fünf, von g nach β ſieben verkürzte Schuhe, für die zugehörige Vertiefung Zl; eben ſo von g nach γ acht von g nach ζ vier verkürzte Schuhe für die Vertiefung Zm; endlich auch von g nach δ ſieben, und von g nach ε fünf verkürzte Schuhe für die Vertiefung Zn, ſo hat man ebenfalls die Bilder der Winkelpuncte. Im zweyten Exempel müſte man $ga = gb$, $= 1$ Fuß, $hf = hc = 2$ Fuß, $ie = id = 1$ Fuß nehmen, alles im gehörig verkürzten Maaß.

So wie dies die Entfernungen der Winkelpuncte von der Linie RT ſind, die durch den Fußpunkt ſenkrecht auf der Grundlinie in die Tiefe läuft; eben ſo kann man jener Puncte Entfernungen von jeder andern mit RT perſpectiviſch parallel laufenden Linie, wie z. E. Rx iſt, brauchen. Die Vergleichung mit dem Grundriß ergiebt, weil xR das Bild von XC und $m\mu$ das Bild von MF iſt, das γ des Puncts C Bild ſey. Man nehme ferner $\gamma\zeta = 4$ Fuß, ſo iſt ζ das Bild von F. Eben ſo nimmt man $\pi\beta = 1$ Fuß, $\beta\alpha = 2$ Fuß, $\varrho\delta = 1$ Fuß, $\delta\varepsilon = 2$ Fuß alles im gehörig verkürzten Maaß.

53 §.

53. §.

Wie man ſich verhalten müſſe, um das Bild einer krummen Linie auf der Tafel vermittelſt des Perſpectiviſchen Maaßſtabes zu zeichnen, wird man aus dem bisherigen leicht abnehmen. Man ſucht die Bilder ſo vieler Puncte, als man nöthig findet, um hiernächſt die Bogen zwiſchen dieſen Bildern aus freyer Hand zu ziehen. Iſt die Figur ein Kreis, ſo kann man in demſelben ein reguläres Polygon von ſo vielen Seiten, als man für gut findet verzeichnen, und die Bilder der Winkelpuncte ſuchen, welches alsdenn zugleich Bilder ſo vieler Puncte des Kreiſes ſind. Die gewöhnliche Vorſchrift der practiſchen Schriftſteller iſt: man ſoll den Kreis bey A, B, C, 55 F.
D, E, F, G, H in acht gleiche Theile theilen, ſo kann man wie im 50 §. die Bilder α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, der Winkelpuncte des im Kreiſe beſchriebenen regulären Achtecks ſuchen. Die Zeichnung ſtellet alles deutlich vor, und aus Vergleichung mit dem 50 §. nimmt man leicht wahr, wie die dortigen Regeln hier angewandt ſind. Zugleich hat man die Bilder $\beta\delta\zeta\vartheta$ und $\kappa\lambda\mu\nu$ der Quadrate BDFH und KLMN in und um den Kreis, die bey Zeichnung des Bildes vom Kreiſe durch die gefundenen acht Puncte als Hülfsmittel dienen, weil der Kreis ganz auſſerhalb des innern und ganz innerhalb des äuſſern liegt. Es iſt bey der Zeichnung angenommen, daß der Mittelpunct des Kreiſes 4 Fuß tief hinter der Tafel, und 6 Fuß weit gegen die Rechte zu von der Ebene des Auges entfernt liegt: alsdenn ſind $\eta\gamma$ und $\alpha\varepsilon$ Bilder des mit der Grundlinie parallelen, und auf ihr ſenkrechten Durchmeſſers.

Wenn das Auge grade vor dem Kreiſe ſteht, mithin die Ebene des Auges durch den Mittelpunct I geht, ſo wird *abcdefgh* das Bild des Kreiſes, *hbdf* das Bild des innern, und *klmn* das Bild des äuſſern Quadrats, *gc* das Bild des mit der Grundlinie parallelen und *ae* das Bild des darauf ſenkrechten Durchmeſſers, *i* das Bild des Mittelpuncts. Mehrere Beyſpiele davon, wie man vermittelſt des perſpectiviſchen Maaßſtabes gradlinichte und andre ebene Figuren perſpectiviſch abbilden kann, findet man beym Caſpar Philips Jacobsz, Kupferſtecher in Amſterdam in ſeinen Ausführlichen Unterricht in der Perſpectiv, Amſt. 1767. Die Anleitung dieſes Schriftſtellers iſt bloß practiſch ohne zum Grunde gelegte Theorie, die kurze Einleitung, welche einige allgemeine Gründe enthält, ausgenommen. Uebrigens iſt die Anweiſung ſelbſt ſehr deutlich, und die Kupfer ſind ſchön gezeichnet. Abrah. Boſſe, von deſſen hieher gehörigen Schriften ich im 44 §. Nachricht gegeben habe, gebraucht durchgängig den perſpectiviſchen Maaßſtab und ſchreibt die erſte Erfindung davon ſchlechthin ſeinem Lehrer Deſargues zu. Die Scale auf der Grundlinie, welche zugleich für die verkürzten Füſſe der Parallelen mit der Grundlinie dient, heiſſet bey ihm Echelle de Conduite de Front; die Scale der vertieften Fuſſe aber Echelle de Conduite fugante.

54. §.

Das Bild einer gradlinichten Figur vermittelſt der Vereinigungspuncte perſpectiviſcher Parallelen auf der Tafel zu zeichnen.

Aufl.

Aufl. Aus demjenigen, was im 47 §. ſchon vorläufig geſagt iſt, wird man ſchon ſo viel abnehmen, daß es nur darauf ankomme, das Bild einer Seitenlinie der Figur nach ihrer Lage und Gröſſe, den Vorſchriften des 18. und 25 §. gemäß zu finden. Hiernächſt kann man den anliegenden Winkel vermittelſt der Scale der Tangenten auf der Horizontallinie zeichnen, und auf dem gefundenen Schenkel die gehörige Länge entweder vermittelſt des Proportional-Cirkels, oder nach Vorſchrift des 31 §. abſchneiden. Den folgenden Winkel giebt wiederum die eingetheilte Horizontallinie, und die Länge des neuen Schenkels wird wie vorhin abgeſchnitten. Wenn man ſo mit jedem folgenden Winkel und jeder folgenden Seitenlinie verfährt, ſo wird ſich die Figur endlich gehörig ſchlieſſen, und man findet das Bild der Figur aus ihren bekannten Seiten und Winkeln.

Wofern die Winkel bekannt ſind, welche die Diagonal-Linien der Figur unter ſich und mit den Seitenlinien einſchlieſſen; ſo kann man der Mühe die gehörige Länge der Seitenlinien zu ſuchen überhoben ſeyn, weil ſich ihre Länge allein durch Zeichnung der Winkel von ſelbſt ergiebt. Weil dies ſehr bequem iſt, ſo wird es gewöhnlich am vortheilhafteſten ſeyn, dieſe Winkel zu ſuchen, wenn ſie nicht ſchon bekannt ſind. Weil hier aber keine groſſe Schärfe nöthig iſt, ſo würde es der Mühe eben nicht verlohnen, ſich deshalb in weitläuftige trigonometriſche Rechnungen einzulaſſen. Oft hat man ohnehin den Grundriß nöthig, und wenn das auch nicht wäre, ſo kann man ihn doch zuweilen wenigſtens in kürzerer Zeit zeichnen, als zur Berechnung der Winkel

nöthig wäre: alsdenn aber laſſen ſich die Winkel auf dem Grundriß ſo genau, als hier nöthig iſt, mit dem Transporteur meſſen.

54 F. Es ſey z. E. wie im 51 §. das reguläre Sechseck zu zeichnen. Man ziehe *t*R als das Bild von TG und trage von *t* nach *g* ſo viele vertiefte Schuhe, als die Länge TG ausmachen. Durch *g* ziehe man mit der Grundlinie eine parallele Linie, und trage von *g* nach α ſo wie von *g* nach β ſo viele verkürzte Schuhe, als GA=GB faſſen. Weil nun in dieſem Exempel BAF=120°, ABF=30°, ſo geben die Bilder $\beta\alpha\zeta$ und $\alpha\beta\zeta$ den Durchſchnittspunct ζ. Weiter iſt BFE=90°, FBE=30°, und die Bilder $\beta\zeta\varepsilon$, $\zeta\beta\varepsilon$, beſtimmen den Durchſchnittspunct ε. Eben ſo macht man $\alpha\varepsilon\delta=90°$, $\varepsilon\alpha\delta=30°$, ſo hat man δ; endlich wird $\alpha\delta\gamma=60°$, und $\delta\alpha\gamma=30°$ gemacht, ſo hat man auch γ.

Wenn die Seitenlinie AB von der Ebene des Auges ſenkrecht halbirt wird, ſo läſt ſich das Bild *abcdef* eben ſo zeichnen.

Ich finde nicht, daß Deſargues und Boſſe den ſo ſehr bequemen Gebrauch der Vereinigungspuncte gewieſen hätten, obgleich Guido Ubaldi, der ſie zuerſt in der Perſpectiv betrachtet hat, älter iſt. Von den Aufgaben: wie man mit einer Linie auf der Tafel eine perſpectiviſch-parallele ziehen, auch einen Winkel von verlangter Gröſſe zeichnen kann; giebt Boſſe in der ſchon verſchiedene mahl angeführten Maniere univerſelle de M. D. pour pratiquer la Perſpective &c. zwar ganz artige Auflöſungen, doch ſind ſie nicht ſo kurz und bequem, wie die oben im 28 und 29 §. gegebenen waren. (M. ſ. a. a. O. die

143.

143. 144. Kupfertafel mit ihren Erklärungen.) Beym Deſibales findet man die hier gelehrten Methoden im Mundo Mathem. Tom. II. im IV. Buch der Perſpectiv. Deſargues hat einen perſpectiviſchen Winkelmeſſer angegeben, deſſen Gebrauch Boſſe beſchreibt: (a. a. O. die 146. Kupfertafel) man wird aber der nach Anleitnng des 20 §. eingetheilten Horizontallinie ohne Bedenken den Vorzug laſſen. So viel ich habe finden können, iſt unter den deutſchen theoretiſchen Schriftſtellern Hr. Lambert der erſte welcher ſich derſelben zur Meſſung der perſpectiviſchen Winkel bedient hat, nachdem Hr. de la Caille in ſeinen Leçons Elementaires d'Optiques III Partie II. Chap. III. Methode. 369. u. f. f. §. §. eben dieſen Gebrauch der eingetheilten Horizontallinie gewieſen hatte.

55. §.

Weil der Kreis die Eigenſchaft hat, daß alle Winkel in einerley Abſchnitt gleich groß ſind, und halb ſo viele Grade faſſen, als der Bogen, worauf ſie ſtehen; ſo kann man vermittelſt der Vereinigungspuncte der perſpectiviſchen Parallelen ſehr leicht ſo viel Puncte des Bildes vom Kreiſe finden, als man nöthig findet, ſobald nur das Bild einer Sehne des Kreiſes gefunden iſt. In dem Beyſpiel des 53 §. iſt HB eine Sehne von 90° Graden, mithin jeder Winkel wie HFB, HEB, HDB $=45°$, ſo wie HAB $=135°$. Demnach beträgt die Summe der Winkel an der Grundlinie der über HB ſtehenden Dreyecke 135°. Wenn demnach das Bild $\vartheta\beta$ der Sehne HB gefunden iſt, und man ſetzt über $\vartheta\beta$ die Dreyecke $\vartheta\eta\beta$, $\vartheta\zeta\beta$, $\vartheta\varepsilon\beta$, $\vartheta\delta\beta$, $\vartheta\gamma\beta$, ſo daß

bey-

beyde Winkel an 9β zuſammen 135° machen, ſo liegen die Spitzen η, ζ, ε, δ, γ in der Peripherie des Bildes vom Kreiſe. Und wenn unter 9β Dreyecke wie $9\alpha\beta$ ſo gezeichnet werden, daß beyde Winkel an der Grundlinie zuſammen 45° machen; ſo liegen auch die Puncte α in der Peripherie des Bildes. Ueberhaupt wenn m die Zahl der Grade des Bogens HB iſt, ſo muß die Summe der an HB anliegenden Winkel auf der Seite von HB $\frac{1}{2}m$ Grade faſſen, auf der entgegen geſetzten Seite aber $180 - \frac{1}{2}m$ Grade.

Der V. Abſchnitt.

Analytiſche Theorie der Projectionen horizontal liegender krummer Linien auf der vertical ſtehenden Tafel, mit Anwendungen auf die Kreislinie.

56 §.

Die Natur einer in der horizontalen Grundfläche verzeichneten krummen Linie iſt vermittelſt einer Gleichung zwiſchen zweyen Coordinaten bekannt, deren Lage gegen die ver-

vertical ſtehende Tafel und die Verticalfläche des Auges gegeben iſt: man ſoll eine Gleichung für die Projection dieſer Linie finden.

Aufl. Wenn die Lage der Abſciſſen-Linie nebſt dem Coordinaten-Winkel für die gegebene krumme Linie bekannt iſt, ſo kann man die gegebene Gleichung, falls die Abſciſſenlinie auf der Tafel nicht ſenkrecht iſt, allemahl ſo verändern, daß die Abſciſſenlinie die Grundlinie der Tafel ſenkrecht ſchneidet, und die dazu gehörigen Applicaten mit der Grundlinie der Tafel parallel laufen, (90 §. Mech.) mithin die Abſciſſenlinie ſenkrecht ſchneiden. Alsdenn wird das Bild der Abſciſſenlinie in den Augenpunct laufen, und die Bilder der Applicaten werden mit der Grundlinie parallel ſeyn. Dieſemnach kann man das Bild der Abſciſſenlinie für die Abſciſſenlinie der Projection, annehmen, und die Bilder der beyden Coordinaten für die Coordinaten der Projection. Auf ſolche Art wird das Bild des Anfangspuncts der Abſciſſen auch für die Projection der Anfangspunct der Abſciſſen, und der Coordinatenwinkel für die Projection allemahl bekannt ſeyn. (18. 19. §.) Die bisher vorgetragenen Gründe der Perſpectiv geben nun allemahl zwo Gleichungen, wovon eine das Bild der Abſciſſen durch die Abſciſſe, die andre das Bild der dazu gehörigen Applicate durch die Applicate ausdrückt. Beyde Gleichungen ſind nur einfache, (10. 13. 24. 25. §.) und man kann ſie leicht ſo umkehren, daß die Abſciſſe der gegebenen krummen Linie, und die dazu gehörige Applicate, durch ihre Bilder ausgedrückt werden. Setzt man alsdenn dieſe Werthe der Abſciſſe und Applicate in die

gegebene Gleichung der krummen Linie; ſo giebt ſich die geſuchte Gleichung für die Projection.

55 F. Es ſey alſo ACEG die gegebene krumme Linie in der horizontalen Grundfläche, tE die auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht angenommene Abſciſſenlinie, tR ihre Projection auf der Tafel, ihre Entfernung von der Ebene des Auges T$t=f$, OB eine rechtwinklichte Applicate, und $\omega\beta$ ihr Bild, ſo wird der Coordinaten-Winkel der Projection $t\omega\beta = \mathrm{T}t\mathrm{R}$ $=\zeta$, (18. §.) und $\tang \zeta = \frac{a}{f}$. Weil es gleichgültig iſt, wo man in der Abſciſſenlinie tE den Anfangspunct der Abſciſſen annehmen will, ſo ſey A der Anfangspunct der Abſciſſen, und ſein Abſtand tA von der Grundlinie der Tafel $=c$. Ferner ſey die Abſciſſe AO$=t$, die Applicate OB$=u$; für die Projection aber ſey die Abſciſſe $\alpha\omega = x$, $\omega\beta = y$, der Abſtand des Auges von der Tafel bleibe wie bisher $=$D, die Höhe des Auges $=a$, und $t\mathrm{R} = \surd(a^2+f^2) = \mathrm{L}$. Was nun im 25 §. AF war, das iſt hier $t\mathrm{A}=c$, was dort fg und FG war, iſt hier $\alpha\omega$, und AO, und überdem iſt der dortige Winkel η hier $=90°$. Demnach erhält man $x = \frac{\mathrm{D}.t\mathrm{L}}{(\mathrm{D}+c+t)(\mathrm{D}+c)}$, und der 13 §. giebt $y = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}+c+t}.u$. Denn was daſelbſt δ war, iſt hier $t\mathrm{O}=c+t$. Die erſte Gleichung giebt $(\mathrm{D}+c)^2x+(\mathrm{D}+c)tx=\mathrm{D}.t.\mathrm{L}$, und daraus folgt $(\mathrm{D}.\mathrm{L}-(\mathrm{D}+c)x)t=(\mathrm{D}+c)^2x$, alſo erhält man $t = \frac{(\mathrm{D}+c)^2x}{\mathrm{D}.\mathrm{L}-(\mathrm{D}+c)x}$. Das giebt ferner

$\mathrm{D}+c+t=$

$D+c+t = \frac{(D+c)D.L}{D.L-(D+c)x}$, und weil ver-
möge der zweyten Gleichung $u = \frac{D+c+t}{D} \cdot y$
wird, ſo findet man $u = \frac{(D+c)L.y}{D.L-(D+c)x}$. Setzt
man dieſe gefundenen Werthe ſtatt t und u in die gegebene Gleichung zwiſchen den beyden Coordinaten t und u, ſo findet man eine Gleichung für die Projection zwiſchen x und y. Die Stelle des Anfangspuncts der Abſciſſen α wird übrigens durch die Gleichung $t\alpha = \frac{C.L}{D+c} = \frac{c\sqrt{(a^2+f^2)}}{D+c}$ (10. 24. §.) beſtimmt.

Will man den Durchſchnittspunct t der Abſciſſenlinie mit der Grundlinie der Tafel für den Anfangspunct der Abſciſſen annehmen; ſo hat man $t=o$, und es wird $t = \frac{D.x}{L-x}$, und
$u = \frac{L.y}{L-x}$. Die Rechnung ſetzt übrigens voraus, daß die poſitiven Abſciſſen von A oder t aus von der Tafel weg in die Tiefe fortlaufen. Will man aber den Anfangspunct der Abſciſſen irgendwo in E ſo annehmen, daß die poſitiven Abſciſſen von E aus gegen die Tafel zu laufen, und $tE = c$ behalten; ſo hat man $x = \frac{D.t.L}{(D+c)(D+c-t)}$, und
$y = \frac{D}{D+c-t} \cdot u$, da dann $EO = t$, $\varepsilon\omega = x$

 iſt.

iſt. Nun giebt die erſte Gleichung $(D+c)^2 x - (D+c)tx = D.t.L$, woraus man $(D.L+(D+c)x)t=(D+c)^2 x$, mithin $t = \frac{(D+c)^2 x}{D.L+(D+c)x}$ erhält. Ferner wird $D+c-t = \frac{(D+c)D.L}{D.L+(D+c)x}$, und $u = \frac{(D+c)L.y}{D.L+(D+c)x}$. Uebrigens bleibt für die Stelle ε des Anfangspuncts der Abſciſſen $t\varepsilon = \frac{c\sqrt{(a^2+f^2)}}{D+c}$.

57 §.

55 F. Die krumme Linie in der horizontalen Grundfläche ſey ein Kreis, und ſein Mittelpunct I ſey von der Tafel um den Abſtand $=\delta$, von der Verticalfläche des Auges um den Abſtand $=f$ entfernt: man ſoll eine Gleichung für die Projection des Kreiſes finden.

Aufl. Man nehme $EO=t$, $OB=u$, $\varepsilon\omega=x$, $\omega\vartheta=y$, und den Halbmeſſer des Kreiſes $=r$ an, ſo hat man für den Kreis die Gleichung $uu=(2r-t)t$. Weil nun in den Formuln des vor. §. $tE=c$ war, ſo hat man hier $c=\delta+r$, mithin $t = \frac{(D+\delta+r)^2 x}{D.L+(D+\delta+r)x}$, und $u = \frac{(D+\delta+r)L.y}{D.L+(D+\delta+r)x}$. Um die Formuln etwas abzukürzen, ſetze man $D+\delta=b$, ſo findet man

$2r-t=$

$$2r-t=\frac{2r\mathrm{D.L}+(2r(b+r)-(b+r)^2)x}{\mathrm{D.L}+(b+r)x};$$

da dann $2r(b+r)-(b+r)^2=2br+2rr-bb-2br-rr=r^2-b^2$, mithin $2r-t=\frac{2r\mathrm{D.L}-(b^2-r^2)x}{\mathrm{D.L}+(b+r)x}$ gefunden wird. Dieſer Werth nebſt den Werthen von t und u in die Gleichung für den Kreis geſetzt, giebt für die Projection folgende Gleichung: $(b+r)^2\mathrm{L}^2y^2=(b+r)^2(2r\mathrm{D.L}.x-(b^2-r^2)xx)$, oder $\frac{\mathrm{L}^2}{b^2-r^2}\cdot y^2$

$=\frac{2r\mathrm{D.L}}{b^2-r^2}x-xx$, oder auch $yy=\frac{b^2-r^2}{\mathrm{L}^2}$

$\left(\frac{2r\mathrm{D.L}}{b^2-r^2}-x\right)x.$

Der Coordinaten-Winkel $\varepsilon\omega\vartheta$ iſt $=\zeta$, und $\tang\zeta=\frac{a}{f}$, $\sec\zeta=\frac{\sqrt{(a^2+f^2)}}{f}$, mithin $\sqrt{(a^2+f^2)}=\mathrm{L}=f.\sec\zeta$. Auch hat man $\cot\zeta=\frac{f}{a}$, $\operatorname{coſec}\zeta=\frac{\sqrt{(a^2+f^2)}}{a}$, und $\sqrt{(a^2+f^2)}=\mathrm{L}=a\operatorname{coſec}\zeta$. Den Anfangspunct ε der Abſciſſen giebt übrigens die Gleichung $t\varepsilon=\frac{c.\mathrm{L}}{\mathrm{D}+c}$, oder $t\varepsilon=\frac{(\delta+r)\sqrt{(a^2+f^2)}}{\mathrm{D}+\delta+r}$.

Weil hier angenommen iſt, daß der ganze Kreis hinter der Tafel liege, ſo iſt $\delta>r$, mithin auch $\mathrm{D}+\delta=b>r$, und b^2-r^2 eine poſitive Gröſſe. Auf dieſen Fall ſchränke ich die jetzige Unterſuchung

chung noch ein, allgemeiner ſoll ſie unten angeſtellet werden. Dies alſo vorausgeſetzt, daß der ganze Kreis hinter der Tafel liege, iſt die Projection eine in ſich ſelbſt zurück laufende krumme Linie, die von ihrer Abſciſſenlinie zweymahl in ε und α geſchnitten wird, wie man ganz deutlich ſiehet, wenn man die 56 Figur vergleicht. Die Rechnung giebt eben daſſelbe. Denn $\varepsilon\alpha$ iſt die Projection des auf der Grundlinie ſenkrechten Durchmeſſers EA des Kreiſes, und man hat aus dem 25 §. $\varepsilon\alpha = \frac{2r.D.L}{(D+\delta-r)(D+\delta+r)}$, oder $\varepsilon\alpha = \frac{2r D.L}{b^2 - r^2}$. Nimmt man nun $y = 0$ an, ſo giebt die gefundene Gleichung einmahl $x = 0$, zweytens auch $x = \frac{2r D.L}{b^2 - r^2} = \varepsilon\alpha$; das heiſt die Axe der Abſciſſen wird von der Projection einmahl in ε das andre mahl in α geſchnitten. Setzt man nun die Linie $\varepsilon\alpha = h$, ſo hat man $yy = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$ $(h-x)x$. Für negative x iſt allemahl y unmöglich, imgleichen auch für poſitive x, die gröſſer als h ſind. Uebrigens gehören zu jeder Abſciſſe, die kleiner als h iſt, zwey gleiche und entgegen geſetzte Werthe von y, die anfangs mit x zunehmen bis auf eine gewiſſe Gränze, hiernächſt aber wieder abnehmen. Man ſiehet wohl, daß y den gröſten Werth haben müſſe, wenn das Product $(h-x)x$ am gröſten iſt, und aus dem 483 §. Geom. weis man, daß dies erfolge, wenn beyde Factoren gleich groß ſind, mithin $h-x = f$, oder $x = \frac{1}{2}h$ iſt.

Man halbire alſo $\varepsilon\alpha$ in ϱ und ziehe $\varphi\psi$ durch ϱ mit der Grundlinie der Tafel parallel, ſo iſt $\varphi\psi$ die gröſte unter den mit der Grundlinie parallel laufenden Sehnen der Projection. Setzt man in der gefundenen Gleichung $x = \frac{1}{2}h$, ſo erhält man

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - r^2}{L^2} \cdot \tfrac{1}{4}hh},$$ und dies iſt der Werth

der gröſten Applicate $\varrho\varphi$ oder $\varrho\psi$. Man ſetze nun $\varepsilon\varrho = \varrho\alpha = \frac{1}{2}h = p$, $\varrho\varphi = \varrho\psi = q$, ſo hat man

$$qq = \frac{b^2 - r^2}{L^2} \cdot pp, \text{ alſo } \frac{b^2 - r^2}{L^2} = \frac{qq}{pp},$$

und die Gleichung für die Projection verwandelt ſich

in folgende $yy = \frac{qq}{pp}(2p - x)x$. Uebrigens war

$$h = \frac{2r\,D.L}{b^2 - r^2}, \text{ alſo iſt } p = \frac{r\,D.L}{b^2 - r^3}, \text{ und die}$$

Gleichung $qq = \frac{b^2 - r^2}{L^2} \cdot pp$, giebt

$$q = \frac{\sqrt{(b^2 - r^2)}}{L} \cdot p, \text{ mithin } q = \frac{\sqrt{(b^2 - r^2)}}{L}$$

$$\cdot \frac{r\,D.L}{b^2 - r^2}, \text{ das iſt } q = \frac{r.D}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}.$$

Wenn die Verticalfläche des Auges durch des abzubildenden Kreiſes Mittelpunct gehet, ſo iſt

$Tt = f = 0$, und $\tang \zeta = \frac{a}{f}$ unendlich groß, mithin der Coordinaten-Winkel der Projection ein rechter Winkel; die Abſciſſenlinie fällt in TR, und

agec iſt alsdenn die Projection. Uebrigens iſt alsdenn L=*a*, und man hat $p = \frac{r.D.a}{b^2 - r^2}$, $q = \frac{r.D}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$.

58. §.

Wenn man eine Reihe Sehnen einer krummen Linie einander parallel ziehet, und die krumme Linie die Natur hat, daß man eine grade Linie ziehen kann, welche alle dieſe parallelen Sehnen halbirt; ſo heiſt dieſe grade Linie ein Durchmeſſer der krummen Linie, und die Sehnen, welche derſelbe halbirt, heiſſen die ihm zugeordneten Sehnen oder auch Ordinaten. Halbirt der Durchmeſſer alle dieſe parallelen Sehnen unter einem rechten Winkel, ſo heiſt er ein Haupt-Durchmeſſer, auch eine Hauptaxe.

Demnach iſt die Projection des auf der Fundamentallinie ſenkrechten Durchmeſſers eines Kreiſes auch ein Durchmeſſer der Projection, und die mit der Fundamentallinie parallelen Ordinaten (die Projectionen der mit der Fundamentallinie parallelen Sehnen des Kreiſes) ſind ihm zugeordnet: in dem beſondern Fall, wenn die Ebene des Auges durch den Mittelpunct des Kreiſes geht, iſt es ein Hauptdurchmeſſer. Eben dieſer Durchmeſſer iſt ſelbſt eine Sehne der Projection, und die Gröſſe dieſes Durchmeſſers, oder ſeiner Hälfte $\varrho\varepsilon = \varrho\alpha = p = \frac{r.D.L}{b^2 - r^2}$ iſt allemahl gegeben, ſo wie auch die gröſte der ihm zugehörigen Ordinaten $\varphi\psi$, oder ihre Hälfte $\varrho\varphi =$

$\varrho\varphi = \varrho\psi = q = \frac{rD}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$ allemahl gegeben iſt, nebſt der Stelle ε, wo der Durchmeſſer anfängt, vermittelſt der Gleichung $t\varepsilon = \frac{(\delta + r)L}{D + \delta + r}$. Hiernächſt laſſen ſich alſo alle übrige dem Durchmeſſer $\varepsilon\alpha$ zugehörige halbe Ordinaten vermittelſt der Gleichung $y = \pm \frac{q}{q} \sqrt{(2p - x)x}$ durch Rechnung finden.

59 §.

Jede Durchſchnittsfigur einer Ebene mit der krummen Oberfläche eines Kegels heiſt überhaupt ein Kegelſchnitt. Die Perſpectiviſche Tafel iſt allemahl eine Ebene, welche die optiſche Pyramide, oder den optiſchen Kegel ſchneidet, und die Durchſchnittsfigur iſt die Projection: da dann der letztere Fall allemahl eintritt, wenn die ebene Figur, deren Bild auf der Tafel geſucht wird, ein Kreis iſt. Demnach iſt die Projection des Kreiſes auf der Tafel allemahl ein Kegelſchnitt, die Geſtalt deſſelben wird aber von der Lage der Tafel gegen die Axe und Grundfläche des Kegels abhängen. Zwey hieher gehörige Fälle kennet man ſchon aus den erſten Anfangsgründen der Geometrie: man weis, daß jeder Schnitt durch die Axe des Kegels ein gradlinichtes Dreyeck, und jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt einen Kreis gebe, (365. 367. §. Geom.) deſſen Mittelpunct in der Axe des Kegels liegt. In den Anfangsgründen der Geometrie betrachtet man die Kegelfläche nur, in wiefern ſie mit der Grund-

fläche zuſammen einen Körper von beſtimmter Gröſſe einſchließt: hier aber muß man ſich die Sache in gröſſerer Allgemeinheit vorſtellen, weil man eigentlich durch einen Kegelſchnitt überhaupt die Durchſchnittsfigur einer Ebene mit einer ſolchen Kegelfläche verſteht, der man für ſich keine beſtimmte Gröſſe beylegt.

Man ſtelle ſich nemlich alle Seitenlinien des Kegels, die ſich von ſeiner Spitze bis nach Puncte im Umfang der Grundfläche erſtrecken, nach beyden Seiten ohne Ende verlängert vor; weil nun jede Seitenlinie des Kegels ganz in ſeiner Oberfläche liegen muß, (365 §. Geom.) ſo ſiehet man wohl, daß ſich die Kegelfläche nicht allein unterhalb der Grundfläche ohne Ende fort erſtrecke; ſondern daß auch je-
56 F. dem Kegel jenſeits ſeiner Spitze O ein andrer grade entgegen geſetzt ſey, deſſen Oberfläche jenſeits dieſer Spitze ſich gleichfalls ins unendliche hinaus erſtreckt. Demnach giebt der Schnitt durch die Axe eigentlich zwey einander entgegen geſetzte Vertical-Winkel, deren Schenkel ſich zu beyden Seiten ins unendliche hinaus erſtrecken: oder mit andern Worten, zwey grade Linien von unbeſtimmter Länge, die ſich in der Spitze O ſchneiden. Eben ſo iſt der Schnitt allemahl beſchaffen, wenn er durch die Spitze und einen Punct innerhalb der Gränzen des körperlichen Raums geführt wird, den die Kegelfläche umſchließt.

60 §.

Schneidet man nun den Kegel auf ſolche Art mit einer Ebene, daß alle Seitenlinien des Kegels, keine ausgenommen von derſelben Durchſchnitten werden, ſo kann der Schnitt den entgegen geſetzten Ke-

Kegel nicht treffen, weil ſonſt einige Seitenlinien des Kegels die Durchſchnittslinie zweymahl treffen müſten, welches nicht ſeyn kann. (298. §. Geom.) Alsdenn wird die Durchſchnittsfigur eine krumme Linie, die ein Stück der ſchneidenden Ebene von allen Seiten umſchließt, und dieſe Durchſchnittsfigur heißt eine **Ellipſe**. Der Kreis iſt eine beſondre Art derſelben, denn die Figur wird nicht allein alsdenn ein Kreis, wenn die Durchſchnittsebene mit der Grundfläche parallel liegt, ſondern auch noch in einigen andern Fällen, wovon ſogleich einer bemerkt werden ſoll.

Dieſemnach iſt die Projection des horizontal liegenden Kreiſes, wenn derſelbe ganz hinter der vertical ſtehenden Tafel liegt, allemahl eine Ellipſe, die Projection des auf der Fundamentallinie ſenkrechten Durchmeſſers des Kreiſes iſt ein Durchmeſſer dieſer Ellipſe, und die Tangente des Coordinaten-Winkels iſt $= \frac{a}{f}$.

In dem beſondern Fall, wenn $f = 0$ iſt, mithin die Ebene des Auges durch des Kreiſes Mittelpunct gehet, kann dieſe Projection ein Kreis werden. Alsdenn iſt, wie ſchon bekannt iſt, $\zeta = 90°$. Wenn nun in eben dieſem Fall $p = q$ wäre, ſo verwandelte ſich die Gleichung für die Projection (57. §.) in folgende $y^2 = 2px - xx$, die weil $\zeta = 90°$ iſt, für den Kreis gehört. Dieſe Vorausſetzung erfordert, daß $\frac{q}{p} = 1$ ſey, mithin $\frac{\surd(b^2 - r^2)}{a} = 1$, weil $L = a$ wird, alſo $a = \surd(b^2 - r^2)$. Alsdenn

denn hat man $p = \frac{r.D}{\sqrt{(b^2 - r^2)}} = q$, und das iſt der Halbmeſſer des kreisförmigen Bildes. Dieſer Fall wird demnach eintreten, wenn die Höhe des Auges a zwiſchen $D + \delta + r$ und $D + \delta - r$, d. i. zwiſchen GE und GA (55 Fig.) die mittlere Proportionallie iſt.

Geht die Ebene des Auges nicht durch den Mittelpunct, ſo iſt allemahl $\tang \zeta = \frac{a}{f}$ endlich, ſo lange a und f endlich bleiben. Geſetzt alſo es fände ſich auch $p = q$, oder $L = \sqrt{(b^2 - r^2)}$, ſo würde demnach die Projection kein Kreis ſeyn, weil ein Durchmeſſer des Kreiſes die Sehnen deſſelben nie anders als ſenkrecht halbiren kann.

61. §.

Jede zwey dem Durchmeſſer $\epsilon\alpha$ zugehörige Ordinaten ſind gleich groß, wenn ſie von der groſſen Ordinate $\varphi\psi$ auf beyden Seiten gleich weit entfernt ſind.

Beweis. Man ändre die Gleichung für die Projection ſo, daß die Mitte des Durchmeſſers der Anfangspunct der Abſciſſen werde. In ſolcher Abſicht ſetze man $\varrho\omega = t$, ſo iſt $\epsilon\omega = x = p + t$, und man erhält $2p - x = p - t$, mithin verwandelt ſich die Gleichung zwiſchen x und y (57 §.) in eine andre zwiſchen t und y: es wird nemlich $y^2 = \frac{q^2}{p^2}$ $(p-t)(p+t)$ oder $y^2 = \frac{q^2}{p^2}(p^2 - t^2)$. Dieſe

Gleichung ergiebt, daß für gleiche und entgegen geſetzte Werthe von t auch y einerley Werth habe. Nimmt man $\varrho\tau = \varrho\upsilon$, ſo iſt $\upsilon\zeta = \tau\xi$.

62 §.

Die gröſte Ordinate $\varphi\psi$ unter denjenigen, welche dem Durchmeſſer $\varepsilon\alpha$ zugeordnet ſind, iſt gleichfalls ein Durchmeſſer für alle Sehnen, die mit $\varepsilon\alpha$ parallel ſind.

Beweis. Die Sehne $\zeta\xi$ ſey mit $\varepsilon\alpha$ parallel, und ſchneide $\varphi\psi$ in π; übrigens nehme man $\zeta\upsilon$ und $\xi\tau$ mit $\varphi\psi$ parallel an. Setzt man alsdenn $\varrho\tau = t$, $\tau\xi = \varphi$, ſo hat man $y^2 = \frac{q^2}{p^2}(p^2 - t^2)$. Nun ſey $\varrho\pi = v$, $\pi\xi = w$, ſo iſt $y = v$, $t = w$, mithin wird $vv = \frac{q^2}{p^2}(p^2 - w^2)$, und daraus folgt $p^2 - w^2 = \frac{p^2}{q^2} \cdot v^2$, folglich $w^2 = p^2 - \frac{p^2}{q^2} \cdot v^2$, oder $w^2 = \frac{p^2}{q^2}(q^2 - v^2)$. Das giebt $w = \pm \frac{p}{q}\sqrt{(q^2 - v^2)}$, alſo ſind $\pi\zeta$, $\pi\xi$, gleich groß.

63. §.

Weil w den gröſten Werth hat, wenn $v = 0$ iſt, wie aus der Gleichung zwiſchen v und w unmittelbar erhellet, ſo iſt $\varepsilon\alpha$ die gröſte dem Durchmeſſer $\varphi\psi$ zugehörige Ordinate. Ein Paar ſolche Durchmeſſer, davon jeder die mit dem andern parallel ge-

zogene Ordinaten insgeſamt halbirt, heiſſen einander zugeordnete Durchmeſſer, und wenn der Coordinatenwinkel ein rechter Winkel iſt; ſo heiſſen ſie Hauptdurchmeſſer, auch Haupt-Axe. Der gröſſere Hauptdurchmeſſer heiſt auch die Zwergaxe. der kleinere die zugeordnete Axe.

64. §.

Die Kegelfläche kann von einer graden Linie nur in zweenen, nicht in mehrern Puncten geſchnitten werden.

Beweis. Wenn durch zweene dieſer Durchſchnittspuncte und die Spitze des Kegels eine Ebene gelegt wird, ſo beſteht die Durchſchnittsfigur aus zwoen graden Linien, die ſich in der Spitze des Kegels ſchneiden. In jeder dieſer Linien liegt einer von den erwehnten Durchſchnittspuncten, und die grade Linie durch dieſe Puncte kann keine von den beyden graden Linien durch die Spitze weiter ſchneiden. (14. §. Geom.) Jene Linie aber liegt ganz in der Ebene durch die Spitze: gäbe es demnach einen dritten Durchſchnittspunct, ſo müſte er in der Ebene durch die Spitze, und in der Kegelfläche zugleich, folglich in einer von den beyden graden Linien durch die Spitze liegen, welches nicht ſeyn kann.

Demnach kann auch eine grade Linie, die in der Ebene eines Kegelſchnitts liegt, den Umfang deſſelben nur in zweenen, nicht in mehrern Puncten ſchneiden.

65. §.

Wenn ϱ der Durchſchnittspunct zweyer einander zugeordneter Durchmeſſer $\varepsilon\alpha$, $\varphi\psi$ eines

eines Kegelſchnitts iſt, dem die Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(pp - tt)$ zugehört, die Abſciſſen t auf einem Durchmeſſer vom Durchſchnittspunct ϱ angerechnet, die Applicaten y aber mit dem andern Durchmeſſer parallel genommen; ſo halbiren alle Sehnen einander, die durch den Durchſchnittspunct ϱ beyder Durchmeſſer laufen.

Beweis. Es ſey $\delta\xi$ eine ſolche Sehne, die den Kegelſchnitt in δ und ξ trift, und durch ϱ läuft. Man ziehe $\delta\upsilon$ mit $\varphi\psi$ parallel, ſetze $\varrho\upsilon = t$, $\upsilon\delta = y$, $\varrho\varepsilon = \varrho\alpha = q$, $\varrho\varphi = \varrho\psi = q$, ſo iſt $yy = qq - \frac{qqtt}{pp}$. Ferner ſey der Winkel $\varepsilon\varrho\delta = \gamma$, der Coordinatenwinkel $\varrho\upsilon\delta = \alpha\varrho\psi = \zeta$, und $\varrho\delta = z$; ſo hat man im Dreyeck $\varrho\upsilon\delta$ die Seite $\upsilon\delta = y = \frac{z \sin\gamma}{\sin\zeta}$, und $\varrho\upsilon = t = \frac{z \sin(\zeta + \gamma)}{\sin\zeta}$. Dieſe Werthe in die Gleichung zwiſchen t und y geſetzt geben $\frac{z^2 \sin\gamma^2}{\sin\zeta^2} = q^2 - \frac{q^2 z^2 \sin(\zeta+\gamma)^2}{pp \sin\zeta^2}$, und man erhält

$$\left(\frac{\sin\gamma^2}{\sin\zeta^2} + \frac{q^2 \sin(\zeta+\gamma)^2}{p^2 \sin\zeta^2}\right) \cdot z^2 = q^2,$$

oder $z^2 = \frac{p^2 q^2 \sin\zeta^2}{p^2 \sin\gamma^2 + q^2 \sin(\zeta+\gamma)^2}$. Für jeden Winkel γ giebt dieſe Gleichung ein Paar mögliche für ſich gleich groſſe einander entgegengeſetzte

Wer-

Werthe von z, davon der eine $\varrho\delta$, der andre entgegengeſetzte $\varrho\xi$ iſt, demnach iſt allemahl $\varrho\delta = \varrho\xi$.

66 §.

Ein Punct in der Ebene einer krummen Linie, der die Eigenſchaft hat, daß alle durch denſelben laufende Sehnen einander halbiren, heiſt **der Mittelpunct der krummen Linie.**

Wenn demnach die Ebene einer Ellipſe auf der Grundfläche des Kegels ſenkrecht ſteht, wie die Projection eines hinter der vertical ſtehenden Tafel horizontal liegenden Kreiſes, ſo hat ſie einen Mittelpunct, und das iſt der Durchſchnittspunct beyder Durchmeſſer, die einander ſelbſt in dieſem Punct halbiren.

Ob dies allgemeine Eigenſchaften aller Ellipſen, ja vielleicht aller Kegelſchnitte ſind? bedarf noch einer nähern Prüfung, die weiter unten angeſtellet werden ſoll. Hier genügt es, ſich aus dem bisher vorgetragenen davon zu überzeugen, daß es Eigenſchaften der Projection des horizontalliegenden Kreiſes auf der vertical ſtehenden Tafel wenigſtens alsdenn ſind, wenn der Kreis ganz hinter der Tafel liegt, oder $\delta < r$ iſt. Die im 57 §. gefundene Gleichung ändert auch ihre Natur noch nicht, wenn gleich $\delta < r$, aber doch $D + \delta > r$ iſt, mithin ſiehet man wohl, daß auch in dem Fall, wenn der Kreis nicht ganz hinter der Tafel liegt, die Projection noch eben die Eigenſchaft haben könne.

Uebrigens iſt aber noch wohl zu bemerken, daß der Mittelpunct der Projection mit dem Bilde des Mittelpuncts des abgebildeten Kreiſes nicht einerley ſey.

ſey. Man überſiehet ſchon aus der Natur der Sache ſelbſt, daß das Bild des Halbmeſſers IE kleiner ſeyn müſſe, als das Bild des Halbmeſſers IA: (11. 25. §.) wenn alſo ι das Bild des Mittelpuncts I iſt, ſo muß $\iota\varepsilon < \iota\alpha$ ſeyn, mithin ι über ϱ hinaus liegen. Aus dem 24. §. hat man für die Stelle des Bildes ι die Gleichung $t\iota = \frac{\delta}{D+\delta} . L.$ Dagegen iſt $t\alpha = \frac{\delta = r}{D+\delta-r} . L$, und $t\varepsilon = \frac{\delta+r}{D+\delta+r} . L$, mithin $t\varrho = \frac{1}{2}(t\alpha + t\varepsilon) = \left(\frac{\delta-r}{D+\delta-r} + \frac{\delta+r}{D+\delta+r}\right) . \frac{1}{2} L.$ Weil nun $\frac{\delta-r}{D+\delta-r} + \frac{\delta+r}{D+\delta+r} = \frac{2(D\delta+\delta^2-r^2)}{(D+\delta)^2-r^2}$ gefunden wird, ſo erhält man $t\varrho = \frac{\delta.(D+\delta)-r^2}{(D+\delta)^2-r^2} . L.$ Geht alſo die Ebene des Auges durch den Mittelpunct des abzubildenden Kreiſes, ſo hat man $Ti = \frac{\delta . a}{D+\delta}$, und $Tr = \frac{\delta(D+\delta)-r^2}{(D+\delta)^2-r^2} . a.$

67. §.

Um die Geſtalt eines Kegelſchnitts überhaupt 56 F.
zu finden, kann man zur Erleichterung der Vorſtellung die Ebene des Schnitts XY allemahl als eine perſpectiviſche Tafel betrachten, und ihre Durchſchnittslinie TX mit der Grundfläche ADEB des Kegels OADEB als die Fundamentallinie der Tafel,

die hier die Fundamentallinie des Schnitts heiſſen kann. Wenn nun die Abmeſſungen des Kegels gegeben ſind, ſo kennt man ſeine Axe OC, ihren Neigungswinkel OCB gegen die Grundfläche, und die Höhe des Kegels OS = OC ſin OCB. Die Durchſchnittslinie CS der Ebene des Neigungswinkels OCB mit der Ebene der Grundfläche heiſſe die Fundamentallinie der Axe des Kegels, ſo iſt auch dieſe bekannt, weil CS = OC . coſ OCB wird. Man nehme an, daß die Fundamentallinie TX des Schnitts, und CS der Axe des Kegels einander in W ſchneiden; ſo iſt die Lage der Ebene des Schnitts im Kegel völlig beſtimmt, wenn CW, der Winkel CWF beyder Fundamentallinien, nebſt dem Neigungswinkel der Ebene des Schnitts gegen die Grundfläche gegeben ſind.

Staat CW und CWF kann auch der ſenkrechte Abſtand CF der Fundamentallinie des Schnitts vom Mittelpunct C der Grundfläche nebſt dem Winkel WCF gegeben ſeyn. Ich werde zwar dieſe Unterſuchung hier noch nicht weiter treiben, weil ich mich bisher noch auf die Projectionen horizontal liegender Figuren und die vertical ſtehende Tafel eingeſchränkt habe: indeſſen wird es eine ſehr nützliche Vorbereitung zu den folgenden allgemeinen Unterſuchungen ſeyn, wenn man noch folgende Vergleichung der Ellipſe, als Kegelſchnitt betrachtet und zugleich als Projection des Kreiſes betrachtet, anſtellen will.

68. §.

Um die Projection des Kreiſes auf der perſpectiviſchen Tafel zu zeichnen, müſſen a, f, r, D, δ, mithin $b = D + \delta$ gegeben ſeyn: alsdenn iſt die

Hälfte

Hälfte des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers $p = \frac{r.D.L}{b^2 - r^2}$, und die Hälfte des mit der Grundlinie der Tafel parallel laufenden Durchmeſſers $q = \frac{r.D}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$, tang $\zeta = \frac{a}{f}$, $L = f.\text{ſec}\,\zeta = a\,\text{coſec}\,\zeta$. Wird überdem noch $t\varrho = k$ geſetzt, ſo hat man auch $k = \frac{b.\delta - r^2}{b^2 - r^2}.L$. (66. §.)

Um die Geſtalt des Kegelſchnitts zu finden, 56 F.
und denſelben auf der Ebene des Schnitts gehörig zu zeichnen, müſſen folgende Stücken gegeben ſeyn: die Axe des Kegels $CO = c$, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche $OCB = \beta$, der Halbmeſſer der Grundfläche $= r$, der Winkel $CWF = \eta$ der Grundlinie des Schnitts mit der Grundlinie der Axe des Kegels, der Abſtand $CW = e$ des Durchſchnittspuncts beyder Grundlinien vom Mittelpunct der Grundflächen, und der Neigungswinkel ψ der Ebene des Schnitts gegen die Grundfläche. Statt e und η könnten auch $CF = \delta$, und $WCF = \alpha = 90° - \eta$ gegeben ſeyn.

Durch S in der horizontalen Grundfläche ſey SG mit der Grundlinie der Tafel TX parallel gezogen, und ſchneide die verlängerte CF in G, ſo iſt $GF = OR = D$, und $CG = D + \delta = b$. Nun laſſen ſich die Werthe C, β, e, η, für den Kegelſchnitt mit den Werthen a, f, D, δ, für die Projection des Kreiſes leicht vergleichen, und zwar hier noch in der Vorausſetzung, daß $\psi = 90°$ ſey. Man erhält nemlich $OS = a = c\,\text{ſin}\,\beta$, $TF = SG = f$

$= c . \cos\beta \cos\eta$, $CG = b = c . \cos\beta \sin\eta$, $\delta = e \sin\eta$, mithin $D = b - \delta = (c . \cos\beta - e) \sin\eta$. Ferner wird

$$\tan\zeta = \frac{a}{f} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta \cos\eta} = \tan\beta \sec\eta,$$

$L = f \sec\zeta = c . \cos\beta \cos\eta \surd (1 + \tan\beta^2 \sec\eta^2) = c \surd (\sin\beta^2 + \cos\beta^2 \cos\eta^2)$, oder auch $L = a \operatorname{cosec}\zeta = c \sin\beta \surd (1 + \cot\beta^2 \cos\eta^2) = c \surd (\sin\beta^2 + \cos\beta^2 \cos\eta^2)$ wie vorhin.

Die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt ſowohl, als auch für die Projection des Kreiſes iſt nun $y^2 = \frac{q^2}{p^2} (2p - x) x$ für den Coordinaten-Winkel ζ, vorausgeſetzt, daß die Tafel vertical ſtehe, oder die Ebene des Schnitts auf der Grundfläche des Kegels ſenkrecht ſey; man hat auch allemahl

$$p = \frac{r(b-\delta) L}{b^2 - r^2}, \quad q = \frac{r(b-\delta)}{\surd (b^2 - r^2)}, \quad \frac{qq}{pp} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}, \text{ und } k = \frac{b\delta - r^2}{b^2 - r^2} . L.$$

Uebrigens aber hat man

für die Projection des Kreiſes	für den Kegel-Schnitt
$\tan\zeta = \frac{a}{f}$	$\tan\zeta = \tan\beta \sec\eta$
$L = \surd (a^2 + f^2)$	$L = c \surd (\sin\beta^2 + \cos\beta^2 \cos\eta^2)$
$= f . \sec\zeta$	$= c . \cos\beta \cos\eta \sec\zeta$
$= a . \operatorname{cosec}\zeta$	$= c . \sin\beta \operatorname{cosec}\zeta$
$b = D + \delta$	$b = c . \cos\beta \sin\eta$

Für den Kegelſchnitt hat man überdem noch $\delta = e \sin\eta$, und wenn α und δ ſtatt e und η gegeben ſind, ſo hat man $\eta = 90° - \alpha$.

Wenn

Wenn man auf dem mit der Grundlinie der Tafel parallelen Durchmeſſer $\varphi\psi$ die Abſciſſe $\varrho\pi = v$, und $\pi\zeta = \pi\xi = w$ annimmt, ſo hat man die Gleichung $w^2 = \frac{p^2}{q^2}(q^2 - v^2)$. (62 §.) Man kann auch hier den Anfangspunct der Abſciſſen nach ψ verrücken, und $\psi\pi = s$ annehmen, ſo hat man $s = q + v$, und $v = s - q$. Dieſer Werth in jene Gleichung geſetzt, giebt $w^2 = \frac{p^2}{q^2}(q^2 - (q-s)^2)$, alſo $w^2 = \frac{p^2}{q^2}(2q - s)s$, und die Gleichung bleibt der im 57 §. gefundenen ganz ähnlich, wo die Abſciſſen auf dem in den Augenpunct laufenden Durchmeſſer genommen wurden. Daß unter gewiſſen Umſtänden $p = q$ gefunden werden könne, iſt oben im 60 §. bereits bemerkt, und zugleich erinnert worden, daß in eben dem Fall die Projection ein Kreis werde, wenn zugleich $\zeta = 90°$ iſt, und der Mittelpunct des abzubildenden Kreiſes in der Ebene des Auges liegt. In dieſem beſondern Fall hat es alſo mit der Verzeichnung der Projection weiter keine Schwierigkeit, weil ſich die Stelle des Mittelpuncts vermittelſt der Gleichung $k = \frac{b\delta - r^2}{b^2 - r^2} \cdot L$ (68. §.) giebt, und der Halbmeſſer $= \frac{rD}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$ wird. (60 §.) Weil in eben dieſem Fall $L = a$ iſt, und $a = \sqrt{(b^2 - r^2)}$ ſo ergiebt ſich $k = \frac{b\delta - r^2}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$.

In andern Fällen wird der in den Augenpunct laufende Durchmeſſer den mit der Grundlinie der Tafel parallel laufenden übertreffen, wenn $L > \sqrt{(b^2 - r^2)}$ iſt: und jener wird in dem Fall $L < \sqrt{(b^2 - r^2)}$ kleiner als dieſer ſeyn. Für den Fall $f = 0$, und $\zeta = 90°$ iſt alſo yz die Zwergaxe, und ae die zugeordnete Axe der Projection, wenn $a < \sqrt{(b^2 - r^2)}$ iſt: in dem Fall $a > \sqrt{(b^2 - r^2)}$ wird ae die Zwergaxe, und yz die zugeordnete Axe ſeyn.

69. §.

57 F. Nun ſey AB derjenige Durchmeſſer, den man für die Abſciſſenlinie annehmen will, C der Mittelpunct, und AC, CB $= p$. Durch C ziehe man CD unter dem erforderlichen Conjugations-Winkel ζ, und mache CD $= q$ als dem halben zugeordneten Durchmeſſer. Die Abſciſſen AB $= x$ rechne man vom Anfangspunct A des Durchmeſſers AB, ſo hat man $PM^2 = y^2 = \frac{q^2}{p^2}(2p - x)\,x$, mithin $y = q\sqrt{\frac{(2p - x)\,x}{p^2}}$. Weil es aber gleichviel iſt, ob man A oder B für den Anfangspunct der Abſciſſen nehmen will, ſo kann man auch $Bp = x$, $pm = y$ ſetzen, und man hat für y dieſelbe Gleichung. Wird demnach $Bp = AP$ genommen, ſo hat man $pm = PM$, wie auch ſchon daraus folgt, weil nun $Cp = CP$ iſt. (61 §.) Es wird vorausgeſetzt, daß PM und pm mit CD parallel laufen, demnach wird die Sehne Mm mit AB parallel, und CE $=$ PM $= pm$ ſeyn, wenn Mm und CD einander in E ſchneiden. Dar-

Daraus fließt umgekehrt: wenn $AP = Bp = x$, und $CE = q\sqrt{\frac{(2p-x)x}{p}}$ genommen iſt, hierauf aber durch E mit AB, durch P und p mit CD parallele Linien gezogen werden, daß die Durchſchnitte M und m in der Ellipſe liegen. Das giebt nun folgende Regel, die Ellipſe zu zeichnen.

Man theile AC und BC bey P, Q, p, q, u. ſ. f. in gleiche Fuſſe, Zolle, wie man will, ab, und ziehe durch alle Theilungspuncte mit CD parallele Linien: hierauf mache man $CE = y$ für $x = 1$, $CF = y$ für $x = 2$, u. ſ. f. Da dann bey der Rechnung ſelbſt AC und CD durch ſolche Zahlen ausgedruckt werden, wovon $AP = Bp$ die Einheit iſt. Auf ſolche Art erhält man in CD ſo viele Theilungspuncte, als in AC und BC, die man nach der Reihe von C nach D, Verwirrung zu vermeiden, mit den Ziffern 1, 2, 3, u. ſ. f. eben ſo wie die Theilungspuncte von A bis C und von B bis C bezeichnen kann. Endlich ziehe man durch alle Theilungspuncte in CD mit AB parallele Linien; ſo liegen die äuſſern Durchſchnittspuncte M, m, N, n, der zuſammengehörigen Parallelen, die durch Puncte laufen, welche mit einerley Ziffer bezeichnet ſind, in der Ellipſe.

70 §.

Wenn für eine andre Ellipſe der halbe Durchmeſſer, worauf man die Abſciſſen nimmt, $p' = n\,AC$ wäre, und man theilte p' in eben ſo viele gleiche Theile, wie $AC = p$, ſo würde der erſte Theil $= n\,AP$, und jede Abſciſſe x, die ſo viele Theile von p' enthielte, als AQ von $AC = p$ enthält, würde $= n \,.\, AQ$

 ſeyn.

ſeyn. Für dieſe andre Ellipſe iſt nun $y = q\sqrt{\frac{(2p' - x)x}{(p')^2}}$; und wenn AQ eine unbeſtimmte Abſciſſe auf AC bezeichnet, x aber die damit übereinſtimmige Abſciſſe der andern Ellipſe; ſo hat man für letztere $y = q\sqrt{\frac{(2n.AC - n.AQ)nAQ}{n^2.AC^2}}$, alſo $y = q\sqrt{\frac{(2AC - AQ)AQ}{AC^2}}$. Mithin würden CE, CF, u. ſ. f. einerley bleiben, wenn $q = CD$ einerley bliebe: für einen andern halben Durchmeſſer q' aber würden ſich CE, CF, u. ſ. f. wie q' verhalten.

Dieſemnach kann man ein fur allemahl eine gewiſſe Linie für $CD = q$ annehmen, und ſelbige für $AC = 10$, oder $AC = 100$, wie man will eintheilen. Für jeden andern halben Durchmeſſer p', der in eben ſo viele gleiche Theile, wie $p = AC$ getheilt iſt, hat man alsdenn die Abtheilungen CE, CF, u. ſ. f. des zugehörigen halben Durchmeſſers q' nach einer ſimplen Regel Detri. Wenn nemlich jede dieſer Abtheilungen, die mit CE übereinſtimmt, unbeſtimmt mit y bezeichnet wird, ſo hat man $y = \frac{q'}{q} . CE$ für den halben Durchmeſſer q'.

Dieſe Schlüſſe ergeben, daß der Proportional-Cirkel auch bey Verzeichnung der Ellipſen ſeine Dienſte leiſten könne. Man ziehe nemlich auf den Schenkeln deſſelben ein Paar zuſammen gehörige Linien, und theile ſie ſo ein, wie $q = CD$ getheilt werden muß, in der Vorausſetzung, daß $p = AC = 100$ ſey;

ſey; ſo hat man zugleich auf jeder derſelben die gehörigen Abtheilungen in der Vorausſetzung, daß $p=50$ ſey, oder $p=25$, oder $p=10$, $p=5$, u. ſ. f. Die 53 Fig. ſtellt einen Schenkel des Proportionalcirkels vor, worauf AC ſo eingetheilt iſt. Soll nun zum halben Durchmeſſer AC, (57 Fig.) und dem zugeordneten halben Durchmeſſer CD die Ellipſe gezeichnet werden, ſo theile man AC in 100 gleiche Theile, faſſe CD zwiſchen dem Hand-Cirkel, und öfne den Proportional-Cirkel ſo weit, daß die mit der Zahl 100 bezeichneten Puncte um die Diſtanz CD von einander entfernt werden. Alsdenn faſſe man die Diſtanzen zwiſchen 1 und 1, zwiſchen 2 und 2, u. ſ. f. trage ſie auf CD gehörig nach E, F, u. ſ. f. auf, und verfahre übrigens dem 69 §. gemäß. Wenn AC nur klein iſt, ſo kann man zwar mit 5, 10, 20, gleichen Theilen, ſo viel man nöthig findet, auskommen, man ſchreibt aber bey den Theilungspuncten doch allemahl die Zahlen ſo bey, als wenn AC in 100 gleiche Theile getheilt wäre. Hat man nemlich nur 5 gleiche Theile, ſo ſchreibt man die Zahlen 20, 40, 60, 80, 100, an die Theilungspuncte, und faſſet alsdenn auch auf den Proportional-Cirkel die Diſtanzen 20—20, 40—40, 60—60, 80—80, weil allemahl die Diſtanz 100—100 mit CD einerley ſeyn muß; ſo erhält man die zugehörigen fünf Abtheilungen auf CD.

In der 57 Figur iſt der Coordinatenwinkel $=90°$ angenommen, und CD $<$ CA: das Verfahren bleibt aber mit dem gewieſenen völlig einerley, wenn gleich der Coordinatenwinkel ſchief iſt, und wenn auch CD $>$ CA erfordert wird. Man kann die Sache ſo betrachten, daß AB der in den Augen-

punct laufende Durchmeſſer ſey, und CD die Hälfte des mit der Grundlinie parallelen Durchmeſſers. In der 55 Fig. würde man alſo *ae*, *αε*, wie hier AB in gleiche Theile, *ry*, *rz*, aber, und *ϱφ*, *ϱψ*, wie hier CD vermittelſt des Proportionalcirkels theilen.

71. §.

Wenn der Coordinaten-Winkel = 90° und CD = AC angenommen wird, ſo liegen alle Durchſchnittspuncte M, N, *m*, *n*, in der Peripherie eines Kreiſes, und man bringt durch eben die Verzeichnung einen Kreis zuwege. Dieſe Betrachtung leitet noch auf eine andre Art, das Bild des Kreiſes auf der perſpectiviſchen Tafel zu zeichnen, wobey man ſich der perſpectiviſchen Parallelen ſtatt der geometriſchen Parallelen bedient.

Es ſey nemlich in der 55 Fig. der Punct *i* das Bild vom Mittelpunct des abzubildenden Kreiſes, ſo iſt *cg* das Bild ſeines mit der Grundlinie der Tafel parallel laufenden Durchmeſſers; mithin *cg* ſo viele verkürzte Fuſſe lang, als der Durchmeſſer des Kreiſes geometriſche Fuſſe faſſet. Nun ſtelle man ſich vor, der Kreis ACEG ſey nach Vorſchrift des vor. §. gezeichnet, es ſey AI und EI in 100, oder wie viele man ſonſt will, gleiche Theile getheilt worden, auf IG aber habe man die damit übereinſtimmige Theilungspuncte, vermittelſt des Proportionalcirkels, oder ſonſt auf andre Art, aufgetragen, um vermittelſt der in die Tiefe laufenden Parallelen, wie HF, die Puncte H, F, im Umfang des Kreiſes zu finden. Man ſetze, V ſey einer von dieſen Theilungspuncten, und *v* ſein Bild, ſo iſt *iv* ſo viele ver-

verkürzte Fuſſe lang, als IV geometriſche Fuſſe faſſet, und es iſt *ig* : *iv* = IG : IV. Durch *v* ziehe man *hf* in den Augenpunct, und ſetze, dieſe Linie ſchneide das Bild des Kreiſes in *h* und *f*, ſo iſt *hf* das Bild der Sehne HF, *fw* das Bild von FW, *ho* das Bild von HO, mithin *iw*, *io*, perſpectiviſch gleich groß, ſo wie auch *ew* und *ao*, imgleichen *wf*, *iv*, und *oh*.

Will man dieſe Schlüſſe auf die Ellipſe $\alpha\phi\varepsilon\psi$ anwenden, worin die in den Augenpunct laufende Sehne $\vartheta\zeta$ das Bild von HF iſt, $\eta\gamma$ das Bild von GC, $\iota\sigma$ das Bild von IV, ſo ſiehet man wohl, daß auch hier allemahl $\iota\eta : \iota\sigma$ = IG : IV ſey, und daß $\upsilon\zeta$, $\iota\sigma$, $\tau\xi$, Bilder gleich groſſer halber Ordinaten des Kreiſes ſeyn, ſo wie $\varepsilon\upsilon$, $\alpha\tau$, imgleichen $\iota\upsilon$, $\iota\omega$, Bilder gleich groſſer Abſciſſen. Die Bilder *ig*, $i\eta$, werden demnach allemahl in demſelben Verhältniß getheilt ſeyn, wie IG getheilt iſt, und man gründet auf dieſe Schlüſſe leicht folgende Methode, die Ellipſe, als das Bild des Kreiſes, auf der perſpectiviſchen Tafel zu zeichnen.

Man ſuche zuerſt das Bild *i* des Mittelpuncts I, und hiernächſt die Bilder *a* und *e* der Endpuncte A und E des in die Tiefe laufenden Durchmeſſers AE. (10. 24. §.) Durch *i* ziehe man *cg* mit der Grundlinie parallel, und mache *ig* = *ic* ſo viele verkürzte Fuſſe lang, als der Halbmeſſer des abzubilden Kreiſes geometriſche Fuſſe faſſet. (13 §. 35 §.) Ferner theile man *ie* ſowohl, als auch *ia* perſpectiviſch in 100 gleiche Theile, (oder auch wenigere mit Beobachtung der im vor. §. ſchon angeführten Maxime) durch alle Theilungspuncte aber ziehe man mit der Fundamentallinie Parallelen. Endlich

 theile

theile man *ig* und *ic* vermittelſt des Proportionalcirkels in die mit den vorigen übereinſtimmigen Theile, im Verhältniß der Theile der Elliptiſchen Linie deſſelben, und ziehe durch dieſe Theilungspuncte Linien in den Augenpunct; ſo geben die Durchſchnitte mit den dazu gehörigen durch die Theilungspuncte in *ae* laufenden Parallellinien ſo viele Puncte in der Ellipſe. Man ſiehet leicht, ohne weiteres Erinnern, daß die Ellipſe $\omega\varphi\varepsilon\psi$ eben ſo gezeichnet werden könne.

Der VI. Abſchnitt.

Die Regeln der Scenographie für ſolche körperliche Ausdehnungen, die wenigſtens einige ebene auf der Tafel oder dem Horizont ſenkrechte, oder damit parallele Seitenflächen haben.

72 §.

Bey der bisherigen Betrachtung der Bilder ſolcher Linien und Winkel, die in einerley horizontalen Ebene liegen, ſo wie ſie ſich auf der vertical ſtehen-
den

den Tafel entwerfen, ſind die Fundamentallinie, und die durch den Augenpunct gezogene Horizontallinie die Gränzen geweſen, zwiſchen welchen die Bilder aller der ebenen Figuren liegen müſſen, die in einerley horizontalen Ebene liegen. Eigentlich iſt der auf beyden Seiten unbegränzte Raum zwiſchen der Fundamentallinie und der Horizontallinie des Auges das Bild der unbegränzten horizontalen Ebene, welche in der Fundamentallinie anfängt, und hinter der Tafel ſich nach allen Seiten ins unendliche hinaus erſtreckt, in dieſem Betracht, kann man die durchs Auge laufende Horizontallinie füglich die Perſpectiviſche Gränzlinie des Horizonts, die Fundamentallinie die Grundlinie des Horizonts, nennen. Zwiſchen dieſen beyden Gränzen iſt alsdenn alles enthalten, was ſich von Figuren dieſer Horizontalfläche auf der Tafel entwerfen läſt.

73 §.

Die Vorausſetzung, daß die Ebene, worauf die abgebildeten Figuren befindlich ſind, horizontal ſeyn ſolle, iſt bloß deswegen angenommen worden, um den Vortrag der erſten Gründe dieſer Wiſſenſchaft zu erleichtern: an ſich aber liegt nichts bey den bisherigen Schlüſſen zum Grunde, was die Sache darauf einſchränkt, daß die Ebene der abzubildenden Figuren horizontal ſeyn müſſe: alles kommt auf den Umſtand an, daß die Ebene der abzubildenden Figuren auf der Tafel ſenkrecht angenommen iſt. Es 58 F.
ſey nemlich R der Augenpunct, RH die Gränzlinie des Horizonts und TA die Grundlinie des Horizonts: Eine andre auf der Tafel ſenkrechte Ebene ſchneide letztere in der graden Linie BC, und durch den Augen-

genpunct R ſey FG mit BC parallel gezogen; ſo wird alles, was auf dieſer Ebene abzubilden vorkommt, zwiſchen den Parallelen BC und FG enthalten ſeyn; demnach kann BC ihre Grundlinie, FG ihre Gränzlinie heiſſen. Die Bilder zweyer horizontalen Ebenen, davon die eine höher, als die andre liegt, haben demnach einerley Gränzlinie RH: und die Bilder aller verticalen Ebenen, die zugleich auf der Tafel ſenkrecht, alſo mit der Ebene des Auges parallel ſind, haben ebenfalls einerley Gränzlinie RT.

74 §.

Wenn RV auf BC ſenkrecht ſteht, ſo iſt RV die Höhe des Auges für die Ebene, welche die Tafel in BC ſenkrecht ſchneidet, und zugleich die Projection einer Ebene, die durchs Auge geht, und auf jener ſenkrecht ſteht: mithin iſt RV für die erwehnte Ebene durch BC, was die Verticallinie des Auges RT für die Horizontalfläche durch TA iſt. Wenn demnach durch die Puncte α, β, γ, δ ſolche Parallellinien laufen, die in der auf der Tafel durch BC ſenkrechten Ebene liegen, und auf BC, mithin auf der Tafel, ſenkrecht ſind; ſo ſind αR, βR, γR, δR, Bilder dieſer Parallelen. (8 §.)

Hieraus folgt, daß die Bilder aller auf der Tafel ſenkrechten Parallelen im Augenpunct R zuſammen laufen. Denn eine Ebene durch zwey derſelben iſt auf der Tafel ſenkrecht, und die Bilder aller derjenigen die in derſelben Ebene liegen, laufen auf den Augenpunct zu. Weil nun dies für jede Reihe ſolcher auf der Tafel ſenkrechten Parallellinien wahr iſt, die in einerley Ebene liegen, ſo iſt es für alle wahr.

75 §.

75. §.

Man kann die Gränzlinie FG der durch den Raum zwiſchen BC und FG abgebildeten Ebene eben ſo nach dem Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer D eintheilen, wie die Gränzlinie des Horizonts (20 §.) und auf der Ebene BCGF die Lage des Bildes einer jeden Linie, wie im 20 §. finden, wenn ſie die Grundlinie BC in einem gegebenen Punct, unter einem gegebenen Winkel ſchneidet. Alle Parallel-Linien, welche die Grundlinie BC unter einerley Winkel ſchneiden, haben alsdenn einerley Vereinigungspunct P. Und weil dies von jeder Ebene gilt, die mit der durch BCGF abgebildeten parallel iſt, ſo haben die Bilder aller Parallel-Linien, welche die Tafel unter einerley Winkel ſchneiden, einerley Vereinigungspunct P. Denn die Ebene des Neigungswinkels einer jeden iſt auf der Tafel ſenkrecht, und dieſe iſt zugleich die Ebene des Neigungswinkels aller übrigen, die mit der erſten in einerley Ebene liegen.

76 §.

Das Bild einer ebenen Figur die mit der Tafel parallel liegt, iſt der Figur ſelbſt ähnlich, und jede Seite oder Diagonale der Figur verhält ſich zur gleichnahmigen Seite oder Diagonale des Bildes, wie $D+\delta$ zu D. (352. 367. §. Geom.)

Alle vertical ſtehende Linien ſind mit der Tafel parallel, alſo verhält ſich ihre wahre Höhe zur perſpectiviſchen, wie $D+\delta:D$, welches auch ſchon aus dem 12 §. bekannt iſt.

Dem.

Demnach hat es mit der Ausmeſſung und Eintheilung der Bilder nicht allein der Verticallinien, ſondern auch aller übrigen mit der Tafel paralleler Linien, nicht die geringſte Schwierigkeit. Alle perſpectiviſche Ruthen, Fuſſe, Zolle u. ſ. f. ſind auf den Bildern ſolcher Linien gleich groß, und der Maaßſtab zu dieſen Linien iſt der Maaßſtab des Grundriſſes in dem Verhältniß $D+\delta:D$ verjüngt. Er iſt einerley mit fL im 35 §. d. i. mit der in dem Verhältniß $D+\delta:D$ verjüngten Höhe des Auges, wenn dieſe verkürzte Höhe in eben ſo viele gleiche Theile getheilt wird, als geometriſche Schuhe der Grundlinie die wahre Höhe des Auges ausmachen.

In der 59 Fig. ſtellet AFHC ein vertical ſtehendes Rechteck vor, welches zugleich die Tafel ſenkrecht ſchneidet, die Seitenlinien AC, FH, ſtehen vertical, und AF, CH laufen in den Augenpunct. Demnach ſind AC, FH gleich viele Fuſſe hoch, und jede verticale Linie zwiſchen AF und CH faſſet eben ſo viele Fuſſe. Wenn nun die Horizontallinie von AC in r, von FH in s geſchnitten wird, und das Auge 5 Fuß hoch über dem Horizont durch AF ſteht; ſo iſt Ar in 5 gleiche Fuſſe getheilt, der Maaßſtab für AC, und Fs in 5 gleiche Fuſſe getheilt der Maaßſtab für FH, zugleich iſt Fs der Maaßſtab für alle Linien auf der Ebene GFHI, welche in der Vertiefung AF hinter der Tafel mit letzterer parallel iſt.

77. §.

Dieſen Gründen gemäß iſt es leicht, jeden Körper perſpectiviſch zu zeichnen, der in die Claſſe rechtwinklichter Parallelepipeden gehört, wenn eine Seitenfläche mit der Tafel parallel iſt: wobey die

zwey

zwey Fälle vorzukommen pflegen, daß man entweder annimmt, das Auge betrachte den Körper von auſſen, oder es befinde ſich in dem innern hohlen Raum deſſelben, und betrachte die Seitenflächen, die ihn von allen Seiten umgeben, wie wenn der innere Raum eines Zimmers perſpectiviſch abgebildet werden ſollte. Uebrigens iſt dabey die Maxime zu beobachten, daß man nur diejenigen Seitenflächen in die Zeichnung bringt, welche das Auge auf einmahl überſehen kann. Betrachtet das Auge den Körper von auſſen, ſo zeichnet man nur die dem Auge zugekehrten Seitenflächen, es wäre denn, daß man den Körper als durchſichtig vorſtellen wollte. In der 58 Fig. ſtellet *abcdefg* ein rechtwinklichtes Parallelepipedum vor, wovon die Seitenfläche *abcd* in der Ebene der Tafel liegt, demnach iſt *bcfe* auf der Tafel ſenkrecht, eben ſo wie die Seitenlinien *be*, *cf*, *dg*, die mithin in den Augenpunct laufen müſſen, ſo wie *ef* mit *bc* und *ad*, *fg* aber mit *ab* und *cd* parallel ſeyn muß.

Betrachtet das Auge den innern Raum eines Zimmers ſo wäre es unnatürlich mehr in die Zeichnung zu bringen, als das Auge mit einmahl grade vor ſich überſehen kann. Man ſtellet alsdenn die Sache ſo vor, als wenn eine von den vier Wänden des Zimmers weggenommen wäre, damit das Auge von auſſen hinein ſehen, und auf ſolche Art die drey übrigen Wände, den Fußboden und die Decke des Zimmers betrachten könne.

78. §.

Die 59 Fig. ſtellet ein ſolches Zimmer perſpectiviſch vor. Die Breite der vordern weggenommenen 59 F.

nen Wand beträgt 20 Fuß, die Tiefe des Zimmers 30 Fuß, und die Höhe deſſelben 10 Fuß 2 Zoll. Die mittlere Höhe des Auges eines erwachſenen Menſchen beträgt etwa 5 Fuß, und ſo groß iſt hier die Höhe des Auges über der Ebene des Bodens angenommen. Weiter iſt vorausgeſetzt, daß die Ebene des Auges mitten durch das Zimmer gehe, und das Auge von der Tafel 20 Fuß weit entfernt ſey. Die beyden Seitenwände rechter und linker Hand nebſt dem Fußboden ſtoſſen unmittelbar an die Tafel, mithin iſt die hintere Wand 30 Fuß weit von der Tafel entfernt.

Man ziehe demnach die Grundlinie AB von 20 Fuß, richte aus ihrer Mitte T die lothrechte Linie TR von 5 Fuß auf, ſo iſt R der Augenpunct: aus A und B aber richte man ſenkrechte Linien AC, BD von 10 Fuß 2 Zoll auf, und ziehe CD, ſo iſt ABDC der Umfang der weggenommenen vordern Wand des Zimmers, die zugleich in der Tafel liegt. Von den vier Winkelpuncten A, B, C, D, ziehe man Linien nach den Augenpunct R, ſo ſind die vier Dreyecke ARB, ARC, BRD, CRD, Bilder der beyden Seiten-Wände der Decke und des Fußbodens, deren Tiefe ſich ins unendliche hinaus erſtreckt. Weil nun das Zimmer ſelbſt 30 Fuß tief ſeyn ſoll,

ſo nehme man $RE = \frac{D}{D+\delta} \cdot RT = \frac{20}{50} \cdot RT,$

ſo iſt TE die ganze Tiefe des Zimmers. Durch E ziehe man FG mit AC parallel, ſo iſt AFGB das Bild des Fußbodens: und wenn FH, GI lothrecht aufgerichtet werden, ſo iſt FHIG das Bild der hintern Wand, ACHF, BGID, ſind die Seitenwände,

und CDIH iſt die Decke des Zimmers. Auf jeder von den vier Ebenen der beyden Seitenwände des Fußbodens, und der Decke des Zimmers kann nun, was man nöthig findet, nach den Regeln der perſpectiviſchen Ichnographie gezeichnet werden; die Grundlinien ſind, AC, BD, AB, CD, und die Gränzlinien laufen damit durch den Augenpunct parallel. Wenn demnach der Fusboden getäfelt wäre, ſo lieſſe ſich alles dahin gehörige auf den Fußboden AFGB perſpectiviſch bringen. Alles aber, was auf der hintern Wand FHIG abzubilden vorkommt, wird gezeichnet, als wenn es ein Geometriſcher Grundriß wäre, nach einem Maaßſtab, wovon die Abtheilungen $\frac{2}{5}$ der gleichnahmigen Abtheilungen der Grundlinie AB betragen.

Bey den Zeichnungen, welche auf die Seitenwände des Zimmers zu bringen ſind, verfällt man leicht von ſelbſt auf allerley Vortheile, wenn man die bisher vorgetragenen Gründe dieſer Wiſſenſchaft ſich recht geläufig gemacht hat, und es iſt eben nicht nöthig, die Ebene einer jeden Wand für ſich, als eine beſondre Tafel zu betrachten. Ein Beyſpiel, wie man ſich verhalten könnte, die Fenſter-Oefnungen in der einen Wand ACHF zu zeichnen, kann zur Probe dienen. Als eine Vorbereitung, um auf jede von den Seitenwänden hiernächſt das nöthige abzubilden, kann man TE gehörig in 30 vertiefte Fuſſe eintheilen, und durch alle Theilungspuncte Parallelen ziehen, ſo ſind zugleich AF und BG gehörig eingetheilt: Nun ſey in der Wand ACHF 4 Fuß tief hinter der Tafel eine 4½ Fuß breite, und 6 Fuß hohe rechteckigte Fenſter-Oefnung zu zeichnen, und die Brüſtung ſey 2½ Fuß hoch. Man nehme die Puncte

K und L 4 Fuß und $8\frac{1}{2}$ Fuß tief hinter der Tafel an, und richte aus ihnen lothrechte Linien auf. Ferner nehme man $AM = 2\frac{1}{2}$ Fuß, $AN = 8\frac{1}{2}$ Fuß hoch, und ziehe von M und N Linien nach dem Augenpunct R, welche die über K und L lothrecht ſtehenden Linien ſchneiden, ſo giebt ſich das Bild des Umfangs der Fenſter-Oefnung auf der innern Fläche der Wand. Damit aber alles deſto natürlicher erſcheine, muß man die Dicke der Wand oder Mauer in der Zeichnung mit ausdrucken; weil die Fenſter-Oefnung ſich dem Auge ſo darſtellet, als wenn ein körperliches Stück, das die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi, oder wenigſtens eines andern eckigten Körpers hat, aus der Wand heraus geſchnitten wäre.

Demnach nehme man AP und BS der Dicke der Mauer gleich, ſo ſind die Rechtecke, APQC, BDVS Durchſchnitte der Tafel mit der Mauer. Wenn ferner $PX = AM = 2\frac{1}{2}$ Fuß genommen wird, und man MR, XR ziehet, ſo iſt MXR das Bild der Durchſchnittsfigur der Wand mit einer horizontalen Ebene in der Höhe der Fenſter-Brüſtung, und K*a*, L*c* ſind Höhen von $2\frac{1}{2}$ Fuß. Eben ſo nimmt man $PY = AN = 8\frac{1}{2}$ Fuß und ziehet NR, YR, ſo iſt NYR das Bild eines horizontalen Schnitts in der Höhe von $8\frac{1}{2}$ Fuß, *ab*, *cd*, ſind Höhen von 6 Fuß. Wenn nun *ce* und *ak* horizontal gezogen werden, ſo wird das Viereck *acek* das Bild der höchſten Fläche der Brüſtung, wovon aber dem Auge ein Theil durch die hervorragende Ecke *ab* der Wand entzogen wird. Wird alsdenn nach *df* horizonl gezogen, ſo bleibt das ganze Rechteck *ecdf* als ein Schnitt der Wand dem Auge ſichtbar, von dem obern horizon-

talen Schnitt *bdfl* wird ebenfalls dem Auge ein Theil entzogen.

In Mauern, die bloß von Steinen aufgeführt ſind, hat die Fenſter-Brüſtung gewöhnlich nicht die Dicke der übrigen Mauer: alsdenn nimmt man XZ der Dicke der Brüſtung gleich, ziehet ZR, welche *ce* in *g* ſchneidet, und läſt *gh* lothrecht herab fallen, ſo iſt K*agh* das Bild der Brüſtung, ſo weit ſie dem Auge ſichtbar bleibt. Auf eben dieſe Art ſind die zwey übrigen Fenſter-Oefnungen gezeichnet, jede iſt $4\frac{1}{2}$ Fuß breit, 6 Fuß hoch, und von der vorhergehenden 4 Fuß entfernt. Die Brüſtungen ſind alle $2\frac{1}{2}$ Fuß hoch.

79 §.

Dies Beyſpiel eben ſo, wie das im 77. §. vorgekommene, gehört bis dahin in die Claſſe ſolcher Fälle, wo keine andere Flächen in die Zeichnung kommen, als ſolche, die entweder auf der Tafel ſenkrecht, oder damit parallel ſind: auch in Anſehung des Horizonts hat keine von den Seitenflächen eine andre, als die darauf ſenkrechte, oder die damit parallele Lage. Wenn eine Ebene wie KLOM den Horizont zwar ſchief ſchneidet, aber doch auf der Tafel ſenkrecht iſt, ſo iſt ihre Durchſchnittslinie mit dem Horizont ebenfalls auf der Tafel ſenkrecht, und das Bild derſelben KM muß in den Augenpunct laufen. Wenn ferner KL die Durchſchnittslinie dieſer gegen den Horizont geneigten Ebene mit der Tafel, oder vermöge des im 73 §. feſtgeſetzten Redegebrauchs, die Grundlinie der geneigten Ebene, K aber ihr Durchſchnittspunct mit der Grundlinie KT des Horizonts iſt; ſo iſt TKL der ſchiefen Ebene Neigungs- 58 F.

winkel gegen den Horizont. Eine dergleichen Ebene ſtellet auch TLON vor, deren Neigungswinkel gegen den Horizont KTL iſt. Ziehet man demnach KM, LO, TN, in den Augenpunct, OM mit KL, ON, mit LT parallel, ſo ſtellet die Figur KLTMON ein grades auf der Seitenfläche TKMN liegendes dreyſeitiges Prisma vor, wovon die Grundfläche TKL in der Tafel liegt. Sollte man auf dieſen geneigten Ebenen Figuren zeichnen, ſo würde nur erfordert, daß man durch den Augenpunct ihre Gränzlinien mit KL und TL parallel ziehen müſte, (73 §.) übrigens könnte man ſich eben ſo verhalten, als wenn man Figuren im Horizont zu zeichnen hat. Kommen unter dieſen Figuren keine andre vor, als ſolche, wovon die Seitenlinien auf der Tafel ſenkrecht ſind, oder damit parallel laufen, ſo hat man
68 F. die Gränzlinien nicht einmahl nöthig. In der 68. Fig. ſtellet ABC *abcd* ein Haus vor, wovon die Giebelwand in der Ebene der Tafel liegt, die Wand B*bc*C aber auf der Tafel ſenkrecht iſt: bis ans Dach iſt daſſelbe ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, wie *abcdefg* in der 58 Fig. war, und wird eben ſo gezeichnet, die Dachfläche *abcd* iſt eine geneigte Ebene, wie KLOM, TLON, in der 58 Fig. waren, ſie ſchneidet die Tafel in *ab* ſenkrecht. Was auf der Giebelwand AB*ba* zu zeichnen vorkommt, hat mit der Perſpectiv nichts zu thun, und wird wie ein geometriſcher Grundriß gezeichnet. Die Seitenlinien der viereckten Fenſter-Oefnungen ſind zum Theil vertical, und die übrigen mit dem Horizont parallel, letztere aber zugleich auf der Tafel ſenkrecht, deswegen laufen ſie in den Augenpunct. Die Oefnungen für die Schorſteine, auch zum Theil die Oefnungen

für

für die Dachfenſter auf der Dachfläche, haben Seitenlinien, die mit der Tafel parallel, und darauf ſenkrecht ſind, jene werden alſo mit *ab* parallel gezeichnet, und dieſe, wie $\alpha\delta$, $\varphi\chi$, laufen in den Augenpunct. Man kann ſchon aus Betrachtung der Figur leicht abnehmen, wie ſich die Stellen der Winkelpuncte, aller dieſer Oefnungen in den Wänden und der Dachfläche, ſo weit ſie viereckt ſind, aus den bekannten Abmeſſungen des Hauſes finden laſſen, hier kann indeſſen vorläufig dieſe allgemeine Betrachtung genügen, weiter unten (125 u. f. §.) ſoll dieſe 68 Fig. umſtändlicher erläutert werden.

80. §.

Wenn eine verticale Ebene, wie AXYS in der 58 F.
58 Fig. die Tafel in AS ſchief ſchneidet, ſo iſt AS die Grundlinie dieſer gegen die Tafel geneigten verticalen Ebene, (73 §.) und weil auch die Tafel noch auf dem Horizont ſenkrecht angenommen wird, ſo iſt AS auf dem Horizont, (319 §. Geom.) mithin auf der Grundlinie AS des Horizonts AT ſenkrecht. Wenn ferner AX das Bild der Durchſchnittslinie der gegen die Tafel geneigten Ebene mit dem Horizont iſt, ſo iſt auch SAX ein rechter Winkel, und TAX das Bild des Neigungswinkels der Ebene AXYS gegen die Tafel, deſſen Maaß die Horizontallinie RH anzeigt, wenn man AX bis an dieſelbe in *p* verlängert. Die Bilder aller im Horizont mit AX parallel laufender Linien haben ihren Vereinigungspunct in *p*. Weil nun die Bilder aller Linien, die mit AX parallel laufen, auf der Tafel einerley Vereinigungspunct haben, (75 §.) ſo müſſen auch die Bilder aller in der Ebene AXYS mit AX parallel laufender Linien

in p zuſammen laufen. Die Bilder aller mit AS paralleler Linien ſind auf AT ſenkrecht: mithin kann man auch leicht in ſolchen verticalen Ebenen, welche die Tafel ſchief ſchneiden, Figuren perſpectiviſch entwerfen, wovon die Seitenlinien keine andre als die auf dem Horizont ſenkrechte, oder die damit parallele Lage haben.

Hieraus fließt eine leichte Art, auch in dem Fall ein rechtwinklichtes Parallelepipedum perſpectiviſch zu zeichnen, wenn die Grundfläche zwar im Horizont liegt, eine Seitenfläche aber die Tafel unter einem gegebenen Winkel ſchneiden ſoll. In der 58 Fig. iſt das Parallelepipedum AXYSWUZ ſo gezeichnet, daß die Seitenlinie AS in der Tafel liegt, die Seitenfläche AXYS aber die Tafel unter einem Winkel von 50° ſchneidet. Man ziehet nemlich AX in den 40ſten Grad der Horizontallinie, und AS vertical, giebt der Linie AS die vorgeſchriebene Höhe des Körpers, und der Linie AX die vorgeſchriebene Länge in vertieften Füſſen. Weiter zählt man von p nach q 90 Grade, und zieht AW in q, macht auch AW in vertieften Fuſſen ſo lang, als die Abmeſſungen des Körpers erfordern, hiernächſt ziehet man SY in p, SU in q, XY und WV vertical, und endlich YZ in q, VZ in p, ſo iſt das Bild des Parallelepipedi gezeichnet.

In der 68 Fig. iſt das Haus GEF*gefh*, welches bis an die Dachfläche ein rechtwinklichtes Parallelepipedum iſt, bis dahin eben ſo gezeichnet. Die eine Wand EG*ge* iſt gegen die Tafel unter einem Winkel von 60 Grad geneigt. Die viereckten Fenſteröfnungen auf dieſer Wand haben keine andre,

als

als verticale und horizontale Seitenlinien, und letztere laufen in dem 30ſten Grad der Horizontallinie. Mit der Giebelwand E*ef*F hat es eben die Bewandniß, EF läuft auf der andern Seite des Augenpuncts in den 60ſten Grad der Horizontallinie, und in eben dem Punct müſſen auch die horizontalen Seitenlinien der Fenſteröfnungen auf dieſer Wand zuſammen laufen. Die Dachfläche *efhg* iſt zwar ſchon beydes gegen den Horizont und die Tafel unter einem ſchiefen Winkel geneigt. Weil indeſſen *fh* mit *eg* parallel iſt, ſo muß auch *fh* in einerley Vereinigungspunct mit *eg* und EG zuſammen laufen. (75 §.). Die parallelen Seitenlinien *ef*, *gh*, des Dachs haben auch einen Vereinigungspunct; wie derſelbe aber gefunden werden könne, wird unten gewieſen werden.

Ein andres Beyſpiel der perſpectiviſchen Zeichnung einer gegen die Tafel geneigten verticalen Ebene findet man in der 69ſten Figur. Daſelbſt ſtellet $\alpha\gamma\delta\beta$ eine 5 Fuß breite und 8 Fuß hohe Thüröfnung, in der Mitte der hintern mit der Tafel parallelen Wand, mit zweyen ſo weit geöfneten Thürflügeln vor, daß ſie mit der Wand mithin auch mit der Tafel einen Winkel von 60°, alſo mit der Ebene des Auges einen Winkel von 30° einſchlieſſen. Bey der Zeichnung derſelben kann man ſich ſo verhalten. Man nimmt, $E\alpha = E\beta = 2\frac{1}{2}$ Fuß, und in ſolcher Abſicht darf man nur R*m* und R*n* ziehen, welche auf FG die Puncte α und β beſtimmen, ſo wird $\alpha\beta$ fünf gehörig verkürzte Fuß lang. Ferner richtet man $\alpha\gamma = \beta\delta = 8$ Fuß lothrecht auf und zieht $\gamma\delta$, ſo iſt das Rechteck $\alpha\beta\delta\gamma$ das Bild des Umfangs der Thür-Oefnung auf der innern Ebene der Wand.

Aus dem 35 §. mit dem 76 §. verglichen wird man ſich erinnern, daß für alle Linien auf der innern Fläche dieſer Wand ein Maaßſtab diene, nach welchem $F s$ fünf Fuſſe lang iſt. Von den vier Winkelpuncten α, β, γ, δ, läſt man hiernächſt Linien in den Augenpunct laufen, und macht $\alpha\varepsilon$, $\beta\eta$ ſo viele vertiefte Fuſſe oder Zolle lang, als die hintere Mauer dick iſt, ziehet $\varepsilon\zeta$, $\eta\vartheta$, lothrecht, ſo wird $\varepsilon\zeta\vartheta\eta$ das Bild des Umfangs der Thür-Oefnung auf der äuſſern Fläche der Mauer. Um ferner die Thürflügel zu zeichnen, ziehe man $\beta\mu$ auf der einen Seite $\alpha\varrho$ auf der andern Seite des Augenpuncts in den 30ſten Grad der Horizontallinie, mache jede dieſer Linien $2\frac{1}{2}$ gehörig vertiefte Fuß lang, und dies entweder nach Anleitung des 35. und 41 §., oder man bediene ſich auch hier des folgenden Hülfsmittels. Wenn aus dem Punct μ auf βG die grade Linie $\mu\lambda$ ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt $\beta\lambda = \beta\mu . \cos 30^\circ$. Auf der perſpectiviſchen Tafel wird $\mu\lambda$ in den Augenpunct laufen, und von der Grundlinie ein Stück $n\nu = \beta\mu . \cos 60^\circ$ abſchneiden, welches hier $1\frac{1}{4}$ Fuß ausmacht, weil $\beta\mu = 2\frac{1}{2}$ Fuß ſeyn muß, und $\cos . 60^\circ = \frac{1}{2}$ iſt. Man mache alſo $n\nu = 1\frac{1}{4}$ Fuß, und ziehe νR, ſo hat man den Punct μ und es iſt $\beta\mu = 2\frac{1}{2}$ vertiefte Fuß, da dann $\mu\xi$ lothrecht aufgerichtet, und $\delta\xi$ ebenfalls in den 30ſten Grad der Horizontallinie gezogen wird, wenn die Thüre ein Rechteck iſt. Der zweyte Thürflügel $\alpha\varrho\sigma\gamma$ iſt eben ſo gezeichnet.

81. §.

Ein Rechteck zu zeichnen, das die horizontale Grundfläche unter einem gegebenen Win-

Winkel in einer graden Linie ſchneidet, die mit der Grundlinie der Tafel parallel läuft.

Aufl. Es ſey RS die Horizontallinie und 69 F. TC die Grundlinie der Tafel, AC eine grade Linie in Horizont mit TC parallel. Man ziehe RA bis an die Grundlinie in G, richte GL ſenkrecht auf und ziehe RL, ſo iſt GAL das Bild einer durch GR auf dem Horizont und der Tafel ſenkrecht geſetzten Ebene, deren Grundlinie GL und Gränzlinie RT iſt. (73 §. am Ende.) Man theile demnach RT für den Abſtand des Auges R*o* gehörig in Grade: wird alsdenn in der Ebene RGL eine grade Linie AM gezogen, und bis an die Gränzlinie in *m* verlängert, ſo kann man von R bis *m* die Grade des Winkels RAM zählen. Weil nun AC auf AR und AM ſenkrecht iſt, ſo iſt RAM der Ebene MAC Neigungswinkel gegen den Horizont. Nun kann man den Seitenlinien AI in verkürzten und AM in vertieften Fuſſen die verlangte Länge geben, und hiernächſt IN in *m* ziehen, MN aber mit AI parallel, ſo giebt ſich ein Rechteck, das gegen die Tafel unter dem Winkel RAM geneigt iſt. Dieſer Winkel kann demnach von verlangter Gröſſe gemacht werden, wenn man von R nach *m* die Anzahl ſeiner Grade zählt, A*m* zieht, und übrigens, wie vorhin verfährt. Der Punct *m* iſt hier nemlich um deswillen der Vereinigungspunct der Parallelen AM und IN, weil er für diejenigen Linien, die in der Ebene RGL mit AM parallel laufen, der Vereinigungspunct iſt: alle Parallelen mit AM aber einerley Vereinigungspunct haben. (75 §.) Die Figur nimmt an, daß der Winkel RAM ſpitz, und ſeine hohle Seite vom Auge abgewandt ſey. Wäre er ſtumpf, ſo müſte man

ſeinen Unterſcheid von 180° von R nach μ zählen, und Am' ziehen: alsdenn iſt ſein dem Auge zugekehrter Nebenwinkel GAm' ſpitz. Wenn demnach die Oefnung des Winkels dem Auge zugekehrt ſeyn ſoll, ſo zählt man von R nach μ die Zahl ſeiner Grade, und zieht Am' in μ; und wenn in eben dieſem Fall der Winkel ſtumpf iſt, ſo zählt man von R nach m ſeine Ergänzuug zu 180° und zieht AM in m.

Wenn in einer Ebene, wie AMNI Figuren zu zeichnen vorkommen, die keine andre, als horizontale, und mit AM parallele Seitenlinien haben; ſo kann man dergleichen Figuren ohne weitere Schwierigkeit zeichnen: übrigens aber iſt dies ſchon einer von den Fällen, wo die Ebene der Figur beydes der Horizont und die Tafel ſchief ſchneidet.

82 §.

Wer in der Geometrie geübt iſt, und die bisher vorgetragenen Gründe der Perſpectiv wohl inne hat, bedarf nun eigentlich keiner weitern Regeln, allerley Prismen und Pyramiden zu zeichnen, die auf horizontalen Grundflächen ſtehen. Beym graden Prisma giebt jede Seitenlinie die Höhe ab, und beym ſchiefen Prisma läßt man aus der Spitze eines Winkels der obern Grundfläche auf die untere ein Perpendicul fallen um die Lage der Ebene des Neigungswinkels einer Seitenlinie gegen die Grundfläche, und zugleich im Horizont die Lage des Puncts zu finden, wo das Perpendicul die Ebene der untern Grundfläche trift. Aus den Abmeſſungen des Prisma, und der Lage einer Seitenlinie oder Diagonale der Grundfläche im Horizont findet man zuförderſt

das

das Bild der Grundfläche ABCD im Horizont. (50. 60 F. 54 §.) Um hier ein leichtes Beyſpiel zu haben, iſt in der 60ſten Fig. angenommen, daß die Grundfläche ein Rechteck ſey, deſſen Diagonale AC auf der Grundlinie ſenkrecht ſteht, und daß die lothrechte Linie FE die verlängerte Diagonale AC in E treffe; ſo iſt die Ebene der Parallelen AG, CF zugleich die Ebene des Neigungswinkels FCR $= \alpha$. In allen Fällen kann aus den Abmeſſungen des Prisma der Winkel BCE nebſt ECF $= \alpha$ gefunden werden: denn der Flächen-Winkel an BC ſey $= \varphi$, ſo iſt $1 : \sin BCF = \sin \varphi : \sin \alpha$ (523 §. Geom.) und $1 : \cos \varphi = \cot BCF : \cot BCF$. (534. §. Geom.) $= tg. BCF : tg. BCE$. Weil nun CE $=$ CF. $\cos \alpha$, ſo hat man E, und kann EF $=$ CF $\sin \alpha$ lothrecht aufrichten. Nun wird RF gezogen, ſo liegt RF in der Ebene der obern Grundfläche, worin man nun ihr Bild zeichnen, und hiernächſt die zuſammengehörigen Puncte beyder Grundflächen mit den graden Linien AG, BI, DH u. ſ. f. zuſammen ziehen kann. Es treffe nemlich RE verlängert die Grundlinie des untern Horizonts in L, über L ſey eine ſenkrechte Linie aufgerichtet, welche RF verlängert in K trift. Durch K ſey KM mit LT parallel gezogen, ſo iſt KM die Grundlinie der horizontalen Ebene, worin die obere Grundfläche liegt: und man kann das Bild der obern Grunfläche auf mancherley Art zeichnen.

1.) Hier dient am bequemſten die Diagonallinie FG, die man von ſo vielen Füſſen oder Zollen, als AC hält, gehörig aufträgt. Nächſtdem werden nur FH, Gi ſo gezogen, daß ſie auf P zu laufen, FI, GH aber ſo, daß ſie gegen Q zu laufen, weil die Winkel mit der Diagonallinie 45° faſſen.

2.)

2.) In jedem andern Fall könnte man, nachdem F gefunden iſt, das Bild der obern Grundfläche ſo zeichnen. Man erwäge, daß jede Seitenlinie FH mit derjenigen Seitenlinie CD der untern Grundfläche parallel ſey, die mit jener zu einerley Seitenfläche gehört. Alſo ziehe man FH in P, und mache FH von ſo viel vertieften Füſſen für den Horizont durch KM als CD faſſet, hiernächſt ziehe man DH und CF, ſo haben dieſe Linien einen Vereinigungspunct. In eben dieſen Vereinigungspunct ziehe man durch alle Winkelpuncte der untern Grundfläche grade Linien AG, Bϑ u. ſ. f. ſo ſind ſelbige perſpectiviſch parallel. Endlich ziehe man HG mit DA, GI mit AB, u. ſ. f. perſpectiviſch parallel, ſo giebt ſich von ſelbſt das Bild des ganzen Priſma.

Auf der andern Seite der Ebene des Auges ſtellet die Zeichnung eine Pyramide *abcdf* vor. Ihre Grundfläche *abcd* ſey, welche ſie wolle, ſo läſt ſie ſich in der Horizontalfläche, deren Grundlinie TN und Gränzlinie RP iſt, nach den Regeln der perſpectiviſchen Ichnographie zeichnen. Und wenn ein Loth *fe* aus der Spitze *f* die Grundfläche in *e* trift, ſo findet man *dce* nebſt *ce* eben ſo, wie vorhin dieſe Stücke beym Priſma gefunden wurden. Iſt der Winkel an $cd = \varphi$ geſetzt, ſo hat man $1 : \sin dcf = \sin \varphi : \sin ecf$ mithin $ce = cf . \cos . ecf$; hiernächſt aber auch $1 : \cos \varphi = \cot . ecd : \cot . dcf = \mathrm{tang} . dcf : \mathrm{tang} . ecd$. So findet man den Punct *e* und richtet aus *e* die lothrechte Linie $ef = cf . \sin ecf$ auf; ziehet endlich von *f* als der Spitze der Pyramide nach alle Winkelpuncte der Grundfläche grade Linien, ſo giebt ſich das Bild der Pyramide.

83. §.

83. §.

Cylinder und Kegel unterſcheiden ſich von Priſmen und Pyramiden nur dadurch, daß ihre Grundflächen Kreiſe ſind. Wer alſo aus dem 55. u. f. §. §. gelernt hat, die Projection des Kreiſes zu zeichnen, wird nun auch leicht mit der Perſpectiviſchen Abbildung der Cylinder und Kegel fertig werden, dieſe Körper mögen in die Claſſe grader oder ſchiefer Cylinder und Kegel gehören. Die 61ſte Figur giebt 61 F. auch hievon eine Probe. Linker Hand der Ebene des Auges iſt ein grader Cylinder gezeichnet, der Mittelpunct ſeiner Grundfläche iſt 15 Fuß von der Tafel und 40 Fuß von der Ebene des Auges entfernt, ſeine Höhe beträgt 36 Fuß. Nachdem die Projection der Grundfläche den ſchon bekannten Regeln gemäß iſt gezeichnet worden, richtet man aus der Projection des Mittelpuncts G (die von dem Mittelpunct der Projection als Ellipſe betrachtet verſchieden iſt 66. §.) eine lothrechte Linie GF auf, ſo hoch, als der Cylinder ſeyn ſoll. Man kann in ſolcher Abſicht RG bis an die Grundlinie in L verlängern, und die lothrechte Linie LK nach dem Maaßſtab der Grundlinie ſo groß nehmen, als die Höhe des Cylinders ſeyn ſoll: ſo liegt RK in der horizontalen Ebene der obern Grundfläche, und KN horizontal gezogen iſt die Grundlinie dieſer Ebene. Wird hiernächſt GF lothrecht aufgerichtet, ſo iſt GF die vertical ſtehende Axe des Cylinders, und F die Projection des Mittelpuncts der obern Grundfläche: der wenn richtig gezeichnet iſt, um eben ſo viele vertiefte Fuſſe des bey N gezeichneten Maasſtabes von K entfernt ſeyn wird, als G von L nach dem bey Z

ge-

gezeichneten Maaßſtabe entfernt iſt, demnach kann man die Projection der obern Ellipſe nun eben ſo, wie die Projection der untern zeichnen, und hiernächſt die zuſammen gehörigen Puncte des Umfangs beyder Grundflächen mit graden Linien zuſammen ziehen.

Wenn der Cylinder ſchief wäre, ſo müſte der Winkel bekannt ſeyn, unter welchem die Neigungs-Ebene ſeiner Axe gegen die Grundfläche die Tafel ſchneidet; eine lothrechte Linie aus dem Mittelpunct F der obern Grundfläche, würde nun die Ebene der untern in einem Punct treffen, wie E in der 60ſten Figur war, und hier rechter Hand der Ebene des Auges bey der Zeichnung des Kegels wahrzunehmen iſt; wo aus der Spitze F des Kegels auf die Grundfläche die lothrechte Linie FE fällt. Der Winkel der Linie GE mit der Grundlinie iſt der eben erwehnte, unter welchem die Ebene FGE die Tafel ſchneidet. Weil nun FG und der Winkel FGE bekannt ſeyn müſſen, ſo hat man $GE = FG \cos FGE$. Bey Zeichnung des Kegels iſt die Ebene FGE mit der Tafel parallel angenommen. Aus E richtet man nun wie vorhin die lothrechte Linie EF auf, ſo groß als die Höhe des Cylinders oder des Kegels ſeyn ſoll, ſo iſt F die Spitze des Kegels und jede grade Linie, wie FA, FB, u. ſ. f. iſt die Projection einer Seitenlinie deſſelben. Soll die Zeichnung aber einen Cylinder vorſtellen, ſo iſt F die Projection des Mittelpuncts der obern Grundfläche, und man zeichnet ihre Projection wie vorhin.

Im letztern Fall, wenn das Bild eines ſchiefen Cylinders zu zeichnen iſt, bemerkt man leicht

von

von ſelbſt, daß die Entfernungen des Mittelpuncts F der obern Grundfläche von der Ebene des Auges und der Tafel nicht einerley ſeyn werden mit den Entfernungen des Mittelpuncts G der untern Grundfläche von den beyden genannten Ebenen. Aus der Lage der Linie GE und ihrer Gröſſe läſt ſich leicht finden, wie weit E von beyden Ebenen entfernt ſey; und ſo weit iſt auch F von beyden Ebenen entfernt. Letzteres giebt aber auch die Zeichnung von ſelbſt zu erkennen, wenn man RF bis an die Grundlinie KN in *k* verlängert: alsdenn wird *k*F ſo viele vertiefte Schuhe des Maaßſtabes bey N faſſen, als *l*E von den Schuhen des Maaßſtabes bey Z faſſet, und *tk* wird anzeigen, wie weit F von der Ebene des Auges entfernt ſey. Wenn man ſich bey Zeichnung der Projectionen beyder Grundflächen des Grundriſſes $\alpha\beta\gamma\delta$ als eines Hülfsmittels wie im 53. §. bedienen wollte, ſo würde man dieſer Anmerkung gemäß, an die Theilungspuncte des rechten Winkels TVW bey Zeichnung der obern Grundfläche andre Zahlen ſetzen müſſen, und die Entfernungen des Mittelpuncts der obern Grundfläche von der Ebene des Auges und der Tafel würden diejenigen beſtimmen, die man an T und W ſetzen muß, da ſich denn die übrigen von ſelbſt ergeben.

84. §.

Bey Perſpectiviſcher Zeichnung der Priſmen und Pyramiden (81 §.) kommen nun ſchon die Fälle vor, daß Figuren, wie die Seitenflächen dieſer Körper, abzubilden ſind, deren Ebene beydes den Horizont und die Tafel ſchief ſchneidet. Ob nun gleich eben dieſe Beyſpiele auf verſchiedene beſondre Maxi-

ximen leiten, wie man ſich bey Zeichnung körperlicher Ausdehnungen auch ſchiefliegender Ebenen helfen kann, ohne ſich in die Weitläuftigkeit der gemeinen Methode (14. 15. §.) einzulaſſen; ſo verdienen doch dergleichen Fälle eine allgemeinere und umſtändlichere Erwägung. Die Wiſſenſchaft verliert einen groſſen Theil ihrer Schönheit, wenn man dergleichen allgemeine Unterſuchungen nach dem Beyſpiel der neüern deutſchen Schriftſteller von der Perſpectiv, den einzigen Hn. **Lambert** ausgenommen, beyſeit ſetzt: und der Liebhaber allgemeiner Theorien verliert viele Hülfsmittel, die ihm nicht allein bey Zeichnungen in verwickelten Fällen, ſondern auch bey der Beurtheilung Perſpectiviſcher Zeichnungen erwünſchte Dienſte leiſten können. Bevor ich mich zu dieſen allgemeinen Unterſuchungen wende, finde ich nöthig, noch folgende Anmerkung beyzufügen.

Einige Schriftſteller ſetzen zwiſchen der perſpectiviſchen **Ichnographie** und **Scenographie** noch eine ſo genannte Perſpectiviſche **Orthographie**. Dahin gehört unter den theoretiſchen Schriftſtellern Hr. **Hennert** im Curſu Matheſ. Applicatae P. III. pag. 37; unter den Practiſchen Schriftſtellern **Jacobs** in ſeinem oben (53. §.) ſchon angeführten **Ausführlichen Unterricht in der Perſpectiv**, im 22 §. der Einleitung. Beyde handeln auch beſondre Abſchnitte unter dem Nahmen der Perſpectiviſchen Orthographie ab, und es ſcheint, daß nach dem Sinn dieſer Schriftſteller die Perſpectiviſche Orthographie den Inbegrif der Regeln ausmachen ſoll, nach welchen die Bilder ſolcher grader Linien und Ebenen, die wenigſtens auf einer von beyden Ebenen der Tafel oder des Horizonts ſenkrecht ſind,

ge-

gezeichnet werden können; wiewohl bey ihnen auch der im 81 §. betrachtete Fall dahin gerechnet wird, der ſchon zu ſolchen gehört, wo die abzubildende Ebene zugleich gegen die Tafel und den Horizont geneigt iſt. Ihre Auflöſungen ſind indeſſen von den hieſigen verſchieden, und meiſtentheils weitläuftiger, weil die Schriftſteller nichts von den Vereinigungspuncten perſpectiviſcher Parallelen wiſſen, und bey ſchiefliegenden Ebenen und körperlichen Ausdehnungen allemahl die perſpectiviſchen Höhen gebrauchen, wie dazu im 15 §. die allgemeine Anleitung iſt gegeben worden. Hr. Hennert rechnet zur Orthographie alle Fälle, wo die Ebene der abzubildenden Figur gegen den Horizont geneigt iſt. Ich habe aber Bedenken getragen die Orthographie in dieſem Sinn genommen von der Scenographie abzuſondern, weil man ſonſt durch Orthographiſche Projectionen ſo gezeichnete Bilder verſteht, wie ſie dem Auge erſcheinen würden, wenn ſeine Entfernung von der Tafel in Vergleichung mit den Abmeſſungen des Bildes unendlich groß wäre. (2 §.) Hievon wird unten beſonders gehandelt werden, und deswegen laſſe ich es hier bey der vorläufigen Erinnerung bewenden.

Der VII. Abſchnitt.

Allgemeine Theorie der Projectionen ſowohl gradlinichter Figuren, als auch krummer Linien, die in Ebenen liegen, welche die Tafel ſchief ſchneiden.

85. §.

Die Lage einer Ebene AB gegen die horizontale Grundfläche YZ iſt gegeben, man ſucht ihre Lage gegen die vertical ſtehende Tafel.

62 F. Aufl. Die Ebene AB ſchneide die Grundfläche in AF, die Grundlinie TW der Tafel in C, ſo liegt C in der graden Linie AF; nun ſey der Winkel TCA $= \eta$, der Flächenwinkel an CF $= \vartheta$, ſo iſt die Lage der Ebene AB gegen die horizontale Grundfläche YZ durch TC und die beyden Winkel η, ϑ, beſtimmt. Weil nun die Ebene AB durch C gehet, ſo ſey CD ihre Durchſchnittslinie mit der Tafel, der Winkel TCD $= \varphi$, der Flächenwinkel an CD $= \psi$, ſo iſt die Lage der Ebene AB gegen die Tafel, durch TC und die beyden Winkel φ und ψ beſtimmt. Im körperlichen Dreyeck, deſſen Spitze C iſt, hat man nun an CW einen rechten Winkel, nebſt einer Perpendiculär-Seite, η und dem anliegenden Win-

kel

kel ϑ: demnach erhält man $\tang \varphi = \tang \vartheta \sin \eta$, (527. §. Geom.) und $\cos \psi = \sin \vartheta \cos \eta$. (530 §. Geom.)

Wenn $\eta = 90°$ iſt, ſo wird $\tang \varphi = \tang \vartheta$, und $\cos \psi = o$, alſo $\varphi = \vartheta$, und $\psi = 90°$. Dieſer Fall gehört demnach zu denjenigen, die im VI. Abſchnitt ſchon ſind betrachtet worden. Denn weil bey der Vorausſetzung $\eta = 90°$ die Linie CF auf der Tafel ſenkrecht iſt (318 §. Geom.) ſo iſt die Ebene AB ſelbſt auf der Tafel ſenkrecht (315 §. Geom.) und die Tafel iſt die Ebene des Neigungs-Winkels der Ebene AB gegen den Horizont YZ mithin $TCD = \varphi = \vartheta$. (M. ſ. den 79. §.)

In dem Fall $\eta = o$ hat man $\tang \varphi = o$, $\cos \psi = \sin \vartheta$, alſo $\varphi = o$, und $\psi = 90° - \vartheta$. Die Durchſchnittslinien TC, CA und CD ſind nun parallel, und TC unendlich groß, alſo wird zur Beſtimmung der Lage der Ebene AB gegen den Horizont und die Tafel noch erfordert, daß aus der Entfernung der Durchſchnittslinie AF von CT die Entfernung der Durchſchnittslinien CD von CT gefunden werde. Wenn jene $= \delta$ dieſe $= d$ iſt; ſo hat man $d = \delta \tang \vartheta = \delta \cot \psi$. Man vergleiche den 81 §.

Uebrigens wird angenommen, daß ϑ ſpitz ſey, und es wird der Flächen-Winkel zwiſchen AB und AZ durch ϑ verſtanden. Wird dieſer $= 90°$, ſo wird auch $\varphi = 90°$, und $\psi = \eta$. (M. ſ. den 80. §.) Iſt $\vartheta > 90°$, ſo wird $\tang \varphi$ negativ, mithin fällt CD alsdenn oberhalb CT. Wäre $\vartheta = o$, ſo wäre AB mit dem Horizont YZ parallel, und ſtatt η müſte nun die Entfernung beyder horizontalen Ebenen von einander gegeben ſeyn.

Wenn in dem Fall $\eta = 0$, zugleich $\vartheta = 90°$ iſt, ſo wird $\psi = 0$, und die Ebene AB iſt mit der Tafel in der Entfernung δ parallel: weil überdem $d = \delta \tang \vartheta = \infty$ wird, ſo giebt es, wie der Natur der Sache gemäß iſt, gar keine Durſchnittslinie wie CD.

Wenn umgekehrt aus der bekannten Lage der Ebene AB gegen die Tafel ihre Lage gegen die horizontale Grundfläche geſucht werden ſollte: ſo wären ϕ und ψ gegeben, und man müſte η und ϑ ſuchen; da dann $\tang \eta = \tang \psi \sin \phi$, und $\cos \vartheta = \sin \psi \cos \phi$ gefunden wird.

86. §.

Aus dem Auge O ſey nun OR auf die Tafel, und OG auf die Ebene AB ſenkrecht gezogen, ſo iſt die Ebene GOR die Ebene des Neigungswinkels ψ, weil ſie auf der Tafel und der Ebene AB zugleich ſenkrecht iſt. (315. §. Geom.) Wenn alſo CD von der Ebene GOR in t geſchnitten wird, ſo ſind tR Gt der letztern Ebene Durchſchnitte mit der Tafel und mit der Ebene AB, und Gt nach H verlängert giebt den Winkel RtH $= \psi =$ GOR.

Dieſe Ebene GOR heiſſe hier die **Ebene des Auges**: ſie iſt dieſelbe Ebene, welche im 6 §. dieſen Nahmen führte, wenn $\psi = 90°$ iſt, OR iſt der **Abſtand des Auges von der Tafel** und R der **Augenpunct**, für alle auf der Tafel ſenkrechte Ebenen, OG aber der Abſtand des Auges von der Ebene AB, oder ſeine Höhe über AB. Um alles deſto deutlicher zu überſehen, iſt in der 64 Fig. die Ebene AB, welche die Tafel CX unter dem Winkel

ψ

ψ ſchneidet, für ſich allein gezeichnet, die man alſo mit der 62 Fig. vergleichen kann.

87 §.

Die Lage der Ebene CDB gegen den Horizont YZ durch CT iſt gegeben, und die Höhe des Auges O über dieſen Horizont: man ſucht die Höhe des Auges über die geneigte Ebene CDB.

Aufl. Wenn auſſer $TC = h$ die Winkel η und ϑ gegeben ſind, ſo ſuche man die Winkel $TCD = \varphi$ und den Neigungswinkel ψ dem 85 §. gemäß. Nun ſey OG auf der Ebene CDB, OR aber auf der Tafel ſenkrecht, ſo iſt $ORtG$ die Ebene des Auges, worin man Or mit Gt und Os mit Rt parallel ziehen kann. Man ſetze $OG = a$, und OR wie bisher $= D$, ſo iſt $a = Os . \sin\psi$, oder $a = rt . \sin\psi$. Man laſſe RT auf CT ſenkrecht fallen, ſo iſt RT die Höhe des Auges über dem Horizont YZ, und dieſe ſey $= \alpha$. Weil nun auch Rt auf CD ſenkrecht iſt, ſo wird $tRV = TCV = \varphi$, und es iſt $TV = h \operatorname{tang}\psi$, alſo $RV = RT + TV = \alpha + h \operatorname{tang}\varphi$. Ferner wird $tR = RV \cos\varphi$, weil auch Rt auf CD ſenkrecht iſt, mithin $tR = \alpha \cos\varphi + h \sin\varphi$. Weil endlich $OrR = \psi$ iſt, ſo wird $Rr = D \cot\psi$, und das giebt $rt = tR + Rr = \alpha \cos\varphi + h \sin\varphi + D \cot\psi$, folglich $a = rt . \sin\psi = (\alpha \cos\varphi + h \sin\varphi) \sin\psi + D \cos\psi$.

88 §.

Das Bild h eines jeden Puncts H der graden Linie tH liegt in tR, und th wächſt mit tH. Wenn ſich H von t nach I über alle Gränzen entfernt, ſo 62 64 F.

wird OH mit *t*H parallel, und das Bild *h* fällt in *r*, da wo die durchs Auge O mit *t*H parallel gezogene Linie O*r* die Tafel trift. Es ſey EF eine andre auf CD ſenkrechte grade Linie in der Ebene AB, die von der Ebene des Auges um den Abſtand $tE = \Delta$ entfernt iſt, ſo iſt EF mit *t*I und O*r* parallel: und wenn OF die Tafel in *f* durchbort, ſo liegen E, *f*, *r*, in grader Linie, weil alle drey Puncte in der Tafel und in der Ebene der Parallelen O*r*, EF, mithin in beyder Ebenen Durchſchnitt liegen. Der Punct *f* iſt das Bild von F, und wenn EF unendlich groß wird, ſo fällt auch *f* in *r*.

Demnach iſt *r* der Vereinigungspunct der Bilder aller der Parallel-Linien in der Ebene AB, welche CD ſenkrecht ſchneiden, und dieſer Punct kann der zur Ebene AB gehörige Augenpunct heiſſen. Im 6 §. hies er ſchlechthin der Augenpunct, wo $\psi = 90°$ war, und fiel mit R zuſammen. Um beyde Augenpuncte deſto beſſer zu unterſcheiden, ſoll R, welcher allen auf der Tafel ſenkrechten Ebenen zugehört, der Hauptaugenpunct heiſſen.

Beyde Augenpuncte R und *r* liegen in der Ebene des Auges GOR, und in der Tafel, mithin in beyder Durchſchnittslinie R*t*, die auf der Durchſchnittslinie der Ebene CDB mit der Tafel ſenkrecht iſt. Und weil $OrR = \psi$ iſt, ſo iſt die Entfernung beyder Augenpuncte $Rr = D \cot \psi$.

89. §.

Eine andre grade Linie CH ſchneide CD unter dem Winkel $DCH = \varepsilon$, und *t*H bey H unter dem Winkel γ, ſo iſt $\gamma = 90° - \varepsilon$ die Abweichung dieſer

ſer Linie von der Ebene des Auges. Durch O ſey Op mit CH parallel gezogen, und p der Punct, wo dieſe Parallele die Tafel trift; ſo iſt die Ebene pOr mit der Ebene AB parallel, (324 §. G.) und der Winkel rOp = tHC = γ, (311 §. G.) mithin auch rp mit CD parallel. (323 §. G.) Wenn nun h das Bild von H iſt, ſo liegen c, h, p, in grader Linie, weil alle drey Puncte in der Tafel und in der Ebene der Parallelen CH, Op liegen; und wenn H in der Linie CH unendlich weit hinaus rückt, ſo fällt h in p.

Wenn KL mit CH parallel, und l das Bild von L iſt, ſo liegen auch Klp in grader Linie und l fällt in p, wenn L unendlich weit hinaus rückt. Demnach iſt p der Vereinigungspunct aller Parallelen, welche CD unter einerley Winkel ε ſchneiden, oder gegen die Ebene des Auges unter einerley Winkel γ geneigt ſind.

Dieſer Vereinigungspunct liegt allemahl in der graden Linie, welche durch den Augenpunct r der Ebene AB mit derjenigen graden Linie parallel gezogen wird, worin AB die Tafel ſchneidet. Es war aber rOp = tHC = γ = 90° − ε, mithin hat man rp = Or . tang γ = D coſec ψ tang γ, oder rp = D coſec ψ cot ε. Uebrigens iſt Op = D coſec ψ ſec γ = D coſec ψ coſec . ε die Entfernung des Auges von dieſem Vereinigungspunct.

90 §.

Die Bilder aller ebenen Figuren, welche in der Ebene AB jenſeits der Tafel liegen, müſſen auf der Tafel zwiſchen den Parallelen CD und rp liegen,

und der auf beyden Seiten unbegränzte Raum zwiſchen dieſen Parallelen CD und *rp* iſt das Bild der unbegränzten Ebene CBD ſo weit ſie in Anſehung des Auges hinter der Tafel liegt. Demnach kann CD die Grundlinie und *rp* die Gränzlinie des Bildes der Ebene CDB heiſſen, welche die Tafel in der Linie CD unter dem Winkel ψ ſchneidet.

Wenn die Tafel vertical ſteht, und CT eine in der Tafel gezogene Horizontallinie iſt, ſo iſt CT die Grundlinie des Bildes dieſer Horizontalfläche, und eine Horizontallinie RZ durch R iſt ihre Gränzlinie. (72 §.) Läſt man RT auf CT ſenkrecht fallen, ſo iſt RT $= \alpha$ die Höhe des Auges über dem Horizont CT. Beyde Grundlinien ſchneiden einander unter dem Winkel TCD, der im 85 §. $= \varphi$ geſetzt iſt, und derſelbe kann der Abweichungswinkel der Grundlinie der Ebene AB von der Grundlinie des Horizonts heiſſen.

Beyde Augenpuncte R und *r* liegen allemahl in einer graden Linie *rt*, die auf der Grundlinie CD der Ebene CDB ſenkrecht iſt, (88 §.) und wenn vom Hauptaugenpunct R auf die Gränzlinie der Ebene CDB eine ſenkrechte Linie R*r* gezogen wird, ſo iſt *r* der zur Ebene CDB gehörige Augenpunct.

Die Linie *rt* iſt die Durchſchnittslinie der Tafel mit derjenigen Neigungsebene der Tafel gegen die abzubildende Ebene, welche durchs Auge gehet. Sie ſoll für die gegen die Tafel geneigte Ebene die Linie des Auges heiſſen.

91 §.

91. §.

Der Hauptaugenpunct R auf der vertical ſtehenden Tafel, und die Grundlinie CT des Horizonts YZ, mithin auch die Verticallinie RT $=\alpha$ des Auges ſind nebſt dem Abſtand D des Auges gegeben; überdem iſt die Lage einer andern Ebene AB gegen den Horizont durch die Winkel η, ϑ, nebſt dem Abſtand CT $=h$ (85 §.) bekannt: man ſoll die Lage ihrer Grundlinie, und der dazu gehörigen Linie des Auges, wie auch den Abſtand ihrer Gränzlinie von der Grundlinie finden.

Aufl. Aus η und ϑ hat man dem 85 §. gemäß φ und ψ, mithin kann man den Winkel TCD $=\varphi$ machen, ſo hat man die Grundlinie CD. Weiter iſt vermöge des 87 §. die Entfernung Rt des Hauptaugenpuncts R von der Grundlinie CD $=\alpha\cos\varphi+h\sin\varphi$, und die Entfernung der Gränzlinie von der Grundlinie, $rt=\alpha\cos\varphi+h\sin\varphi+D\cot\psi$. Ueberdem hat man CV $=h\sec\varphi$, und Vt $=$ Rt $.\tang\varphi=\alpha\sin\varphi+h\sin\varphi\tang\varphi$, mithin findet man C$t$ $=$ CV $-$ Vt $=h\sec\varphi-\alpha\sin\varphi-h\sin\varphi\tang\varphi$, oder C$t$ $=h(1-\sin\varphi^2)\sec\varphi-\alpha\sin\varphi=h\cos\varphi-\alpha\sin\varphi$. Weil nun C ein bekannter Punct in der Grundlinie iſt, ſo wird durch Ct $=h\cos\varphi-\alpha\sin\varphi$ der Punct der Grundlinie beſtimmt, worin ſie von der Linie des Auges ſenkrecht geſchnitten wird, und $tr=h\sin\varphi+\alpha\cos\varphi+D\cot\psi$ giebt den Abſtand des Augenpuncts r, und der Gränzlinie von der Grundlinie.

Verlangt man die Lage des Hauptaugenpuncts gegen die Grundlinie CD der gegen die Tafel geneig-

ten Ebene; ſo wird ſelbige durch $Ct = h\cos\varphi - \alpha\sin\varphi$ und $tR = h\sin\varphi + \alpha\cos\varphi$ beſtimmt.

92 §.

63 F. Die Lage der Grundlinie CD auf der Tafel, und der Hauptaugenpunct R, nebſt dem Abſtand D ſind gegeben; man ſoll den Augenpunct r und die Gränzlinie für die Ebene CDB, welche gegen die Tafel unter dem bekannten Winkel ψ geneigt iſt, wie auch die Höhe des Auges über dieſer Ebene durch Zeichnung finden.

Aufl. Aus dem Hauptaugenpunct läſt man Rt auf CD ſenkrecht fallen, ziehet RO mit CD parallel, nimmt $RO = D$, und macht den Winkel $ROr = 90° - \psi$, ſo iſt der Durchſchnittspunct r mit Rt der geſuchte Augenpunct. (88 §.) Ferner zieht man ru mit CD parallel, ſo hat man die Gränzlinie, und tg auf Or ſenkrecht gezogen iſt die Höhe des Auges über der Ebene CDB.

Parallele Ebenen ſchneiden die Tafel unter einerley Winkel ψ und ihre Grundlinien ſind parallel: mithin haben ſie einerley Augenpunct und Gränzlinie.

Ebenen die mit der Tafel parallel ſind, haben ſo wenig eine Grundlinie, als eine Gränzlinie: ihr Augenpunct iſt vom Hauptaugenpunct unendlich weit entfernt.

93 §.

64 F. Die Lage der graden Linie KL in der Ebe-

Ebene CDB iſt gegeben, man ſucht die Lage ihres Bildes auf der Tafel.

Aufl. Wenn die Entfernung $tK = f$ desjenigen Puncts K von der Ebene des Auges bekannt iſt, worin KL die Grundlinie ſchneidet, und der Winkel $tKL = \varepsilon$, ſo iſt die Lage der Linie KL bekannt. Ihr Abweichungswinkel von der Grundlinie iſt nun eben dieſer Winkel ε, und ihr Abweichungswinkel von der Ebene des Auges iſt $= 90° - \varepsilon$. Nun haben alle mit KL parallel laufende Linien ihren Vereinigungspunct p in der Gränzlinie (89. 90 §.) und es iſt $rp = D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{tang} (90° - \varepsilon)$. (89 §.) Weil nun der Punct K gegeben iſt, ſo nehme man auf der Gränzlinie $rp = D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{tang}. (90° - \varepsilon)$, und ziehe K$p$, ſo iſt die Lage des Bildes gefunden.

Wenn $\varepsilon = 90°$ iſt, mithin die gegebene Linie, wie CL auf CD ſenkrecht iſt, ſo wird $rp = o$, p — fällt in r, und das Bild Cr läuft in den Augenpunct. Wäre $\varepsilon > 90°$, ſo fiele p auf die andre Seite von r, weil nun rp negativ wird.

Eine lothrechte Linie von p auf CD herabgelaſſen iſt $= rt = \frac{a}{\operatorname{ſin} \psi} = a \operatorname{coſec} \psi$. (87 §.) Wenn alſo $tKp = \zeta$ geſetzt wird, ſo hat man $\operatorname{tang} \zeta = \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f + D \operatorname{coſec} \psi \cot. \varepsilon}$; und für $\varepsilon = 90°$, wenn eine ſolche Linie, wie CL auf CD ſenkrecht iſt, wird $\operatorname{tang} \zeta = \operatorname{tang} tCr = \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f}$.

Für

Für $\varepsilon = 0$ iſt rp unendlich groß, und tang ζ wird $= 0$. Demnach ſind die Bilder aller mit CD paralleler Linien auch auf der Tafel mit CD parallel. Wie nun aus der bekannten Entfernung einer ſolchen Parallele von CD die Entfernung ihres Bildes von CD auf der Tafel gefunden werden könne, läſt ſich leicht ſo überſehen. Jede Parallele mit CD in der Ebene CDB geht durch einen Punct H in der verlängerten Gt, und wenn h das Bild von H iſt, ſo geht das Bild der durch H mit CD parallelen Linie durch h. Es iſt aber $Or : tH = rh : th$, mithin $Or + tH : tH = rt : th$; wenn demnach $tH = \delta$ geſetzt wird, ſo iſt $th = \frac{\delta}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta} . a \operatorname{coſec} \psi$.

94. §.

65 F. Um die Lage des Bildes auf der Tafel durch eine leichte und bequeme Zeichnung zu finden, kann man die Gränzlinie np zu beyden Seiten des Puncts r in dem Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer $Or = D \operatorname{coſec} \psi$ eben ſo eintheilen, wie im 20 §. die Gränzlinie des Horizonts eingetheilet ward; ſo leiſtet ſie bey Zeichnung der Bilder aller Linien in CDB, deren Lage gegen CD bekannt iſt, eben die Dienſte, wie die eingetheilte Gränzlinie des Horizonts bey Zeichnung der Bilder ſolcher Linien, die horizontal liegen, auf der vertical ſtehenden Tafel. Dieſe Eintheilung kann bequem vermittelſt der Tangenten-Linie des Proportional-Cirkels (39 §.) geſchehen. Man zählt alsdenn von r nach p nur ſo viele Grade ab, als der Abweichungswinkel von der Ebene des Auges enthält, ſo hat man p, und wenn die Linie in K an die Tafel ſtößt, ſo iſt Kp ihr Bild.

Um

Um die Entfernung des Bildes einer mit CD parallelen Linie von CD auf der Tafel durch Zeichnung zu finden, deren Entfernung δ von CD gegeben iſt, nimmt man $r\omega = r\mathrm{O} = \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi$, und $t\mathrm{H} = \delta$, ziehet $\omega\mathrm{H}$, ſo iſt der Durchſchnittspunct k derjenige, durch welchen das Bild mit CD parallel gezogen wird.

95. §.

Die ganze Länge des Bildes einer gra- 64 F.
den Linie zu finden, die in der Ebene CDB von K aus ohne Ende fortläuft, und gegen CD unter dem gegebenen Winkel ε geneigt iſt.

Aufl. Wenn der Winkel $t\mathrm{K}p = \zeta$ geſetzt wird, deſſen Tangente $= -\dfrac{a \operatorname{coſec} \psi}{f + \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon}$, ſchon gefunden iſt, ſo hat man $\mathrm{K}p = (f + \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon) \sec \zeta$, $t\mathrm{K} = f$ geſetzt; oder auch $\mathrm{K}p = a \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \zeta$. Aus $\tan \zeta$ findet man auch $\sec. \zeta = \dfrac{\sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + (f + \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon)^2)}}{f + \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon}$, alſo $\mathrm{K}p = \sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + (f + \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon)^2)}$: und weil $\operatorname{coſec} \zeta = \dfrac{\sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + (f + \mathrm{D} \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon)^2)}}{a \operatorname{coſec} \psi}$; ſo giebt der Ausdruck $\mathrm{K}p = a \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \zeta$ denſelben Werth für $\mathrm{K}p$.

Wenn dieſe Linie $= \mathrm{L}$ geſetzt wird, ſo iſt ſelbige nun als eine bekannte Linie anzuſehen, ſobald D, a und ψ bekannt ſind, wenn überdem die Lage der hiedurch abgebildeten Linie durch f und ε gegeben iſt. Für alle auf CD ſenkrechte Linien wird $\varepsilon = 90°$,

mithin $L = \sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + f^2)}$, und ſec $\zeta = \frac{\sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + f^2)}}{f}$, coſec $\zeta = \frac{\sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + f^2)}}{a \operatorname{coſec} \psi}$.

96. §.

64 F. Wenn CL die ſenkrechte Entfernung des Puncts L von der Grundlinie CD iſt, ſo iſt Cl die Perſpectiviſche Entfernung des Bildes l von der Grundlinie, oder die ſenkrechte Vertiefung des Bildes l. Und wenn KL die ſchräge Entfernung des Puncts L von CD unter dem Winkel ε iſt, ſo iſt Kl die ſchräge Vertiefung des Bildes.

97 §.

Aus dem bekannten ſenkrechten oder ſchrägen Abſtande des Puncts L von der Grundlinie die dazu gehörige Vertiefung des Bildes zu finden.

Aufl. Weil KL und Op parallel ſind, ſo hat man $Op : KL = pl : Kl$, und $Op + KL : KL = Kp : Kl$. (189 §. Geom.) Wenn demnach $KL = \lambda$ $Kp = L$ geſetzt wird, ſo erhält man $D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + \lambda : \lambda = L : Kl$, und es wird $Kl = \frac{\lambda . L}{D \operatorname{coſec} . \psi \operatorname{coſec} . \varepsilon + \lambda}$. Für die ſenkrechte Vertiefung Cl, wenn $CL = \delta$, und $tCL = \varepsilon = 90°$ iſt, hat man alſo $Cl = \frac{\delta . L}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta}$.

Weil

Weil $pl = pK - Kl$ iſt, ſo wird $pl = L - \frac{\lambda . L}{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + \lambda}$, oder $pl = \frac{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon}{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + \lambda} . L$, und eben ſo findet man $rl = \frac{D \operatorname{coſec} \psi}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta} . L$.

Wenn man dieſe Formuln mit denjenigen vergleicht, aus welcher im 32 u. f. §. §. für den Fall der verticalſtehenden Tafel, worauf die Bilder horizontal liegender Linien zu entwerfen ſind, die Regeln hergeleitet wurden, wie man dieſe Bilder perſpectiviſch in Ruthen, Fuſſe, Zolle, u. ſ. f. eintheilet; ſo wird man eine ſo groſſe Uebereinſtimmung wahrnehmen, daß es überflüßig ſeyn würde, dieſelben Regeln hier nochmahl vorzutragen. Was dorten D und $D \operatorname{coſec} \eta = D \sec \vartheta$ war, daß iſt hier $D \operatorname{coſec} \psi$ und $D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon = D \operatorname{coſec} \psi \sec (90° - \varepsilon)$. Man kann demnach auch hier wie im 26 §. die Grundlinie der gegen die Tafel unter dem Winkel ψ geneigten Ebene in gleiche Ruthen, Fuſſe, Zolle, in eben dem Maaß eintheilen, worin die ſenkrechte Entfernung des Auges von der Tafel angenommen wird; ſo dient dieſe eingetheilte Grundlinie, 64
von dem Bilde Kp der von k aus unter jedem Winkel 65 F.
ε ins unendliche fortlaufenden Linie KL ſo viele Ruthen, Fuſſe, Zolle, wie man will abzuſchneiden, mithin für jeden ſenkrechten, oder ſchrägen Abſtand des Puncts L von der Grundlinie die dazu gehörige Vertiefung durch Zeichnung auf der Tafel zu finden. Man macht auf der Gränzlinie $p\Pi = D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon$,

(um

(um dies zu bewerkſtelligen, kann man rO aus r in ϱ tragen, ſo iſt $\varrho p = \mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\varphi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$, mithin trägt man ϱp aus p in Π) und nimmt auf der Grundlinie von K nach P ſo viele Ruthen, Fuſſe, ꝛc. als KL lang iſt, ziehet ΠP, welche Kp in l ſchneidet, ſo iſt KL im perſpectiviſchen Maaß ſo lang, als KL im Geometriſchen.

98. §.

64
65 F. Wenn Pl das Bild von PL, und $tPL = \xi > 90°$ iſt, ſo ſchneidet Pl verlängert die Gränzlinie in Π auf der Seite die rp entgegengeſetzt iſt, weil $r\Pi = \mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\cot\xi$ nun negativ wird. (93 §.) Auf der Tafel iſt nun PlK das Bild des Dreyecks PLK, worin $KPL = 180° - \xi$ iſt. In dem Fall, wenn $KP = KL$ mithin das Dreyeck gleichſchenklicht iſt, hat man $KPL = 90° - \frac{1}{2}\varepsilon$, $PKL = \varepsilon$ geſetzt, alſo tPL oder $\xi = 180° - KPL = 90° + \frac{1}{2}\varepsilon$, und $\cot\xi = -\tang\frac{1}{2}\varepsilon$. Mithin wird $r\Pi = -\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\tang.\frac{1}{2}\varepsilon$, und $p\Pi = \mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,(\cot\varepsilon + \tang.\frac{1}{2}\varepsilon)$, oder $p\Pi = \mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$. (458 §. G.) Hieraus folgt eben dieſelbe Regel, die Vertiefung Kl durch Zeichuung auf der Tafel zu finden, welche im vor. §. aus der allgemeinen Formul hergeleitet iſt, welches auch im 31 §. bereits für den Fall iſt angemerkt worden, wenn die Tafel auf der abzubildenden Ebene ſenkrecht ſteht.

Man kann demnach für jede gegen die Tafel geneigte Ebene eben ſo einen perſpectiviſchen Maasſtab zeichnen, wie derſelbe im 33. u. f. §. §. für die horizontale Ebene und verticale Tafel gezeichnet ward. Auch dienen auf dem Proportional-Cirkel eben die Perſpectiviſchen Linien, davon im 41. u. f.

f. §. §. die Rede war, zur bequemen Eintheilung und Ausmeſſung der Bilder aller Linien auf der gegen die Tafel geneigten Ebene, wenn man vorher die ſenkrechte Diſtanz des Auges D in dem Verhältniß 1 : coſec ψ coſec ε vergrößert hat. Das letztere kann alsdenn mit Hülfe der Secanten-Linie nach Anleitung des 39 §. bewerkſtelliget werden: man vergrößert zuerſt D in dem Verhältniß 1 : ſec ($90° - \psi$), ſo hat man D coſec ψ, und dieſe Linie wird hierauf wiederum in dem Verhältniß 1 : ſec ($90° - \varepsilon$) vergrößert.

99. §.

Das Bild des gradlinichten Winkels FLM iſt auf der Tafel der Winkel $pl\Pi$, und die Art, wie dieſes Bild gezeichnet werden kann, wenn die Gränzlinie gefunden, und auf beyden Seiten des Puncts r gehörig eingetheilt iſt, richtet ſich völlig nach den im 24 §. ſchon vorgetragenen Regeln. Die Lage der Spitze des Winkels FLM in der Ebene BDC kann durch tC und CL, tCL $= 90°$ angenommen, oder durch tK, und KL, tKL $= \varepsilon$ geſetzt, gegeben ſeyn, da dann im letzten Fall zugleich die Lage eines Schenkels LF bekannt iſt. In beyden Fällen findet man leicht das Bild l der Spitze L nach Vorſchrift des 97. oder 98 §. Und wenn der Winkel ſelbſt $= \lambda$ geſetzt wird, ſo hat man tPL $= \lambda + \varepsilon$. Weil aber Pl das Bild von PL, und Kl das Bild von KL iſt, und dieſe Bilder die Gränzlinie in Π und p treffen, ſo hat man auf der Gränzlinie von Π gegen die Linke ins unendliche fortgezählt ſo viele Grade, als der Winkel $\lambda + \varepsilon$ faſſet; und von p gegen die Linke eben ſo fortgezählt ſo viele Grade, als ε faſſet. In allen

Fällen liegen alſo auf der eingetheilten Gränzlinie zwiſchen p und Π ſo viele Grade, als der Winkel λ faſſet. Demnach zeichnet man nur den 93 §. gemäß das Bild Kp des Schenkels KLF deſſen Lage bekannt iſt, und nachdem in demſelben auch das Bild l der Spitze L auf eine oder die andre Art gefunden iſt, zählt man von p nach Π ſo viele Grade, als der Winkel FLM$=\lambda$ faſſen ſoll, und ziehet $l\Pi$, ſo iſt das verlangte Bild gezeichnet. Die Vergleichung mit dem 24. und 25 §. wird dies alles völlig ins Licht ſetzen.

100. §.

64 F. Die Lage und Länge der graden Linie LF in der Ebene CDB iſt gegeben: man ſucht die Länge des zugehörigen Bildes auf der Tafel.

Aufl.

1.) Es iſt $pL = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KL} \cdot L,$

und $pf = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KF} \cdot L.$ (97. §.);

mithin wird $lf = pl - pf = \left(\frac{1}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KL} - \frac{1}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KF}\right) L \,.\, D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon,$

od. $lf = \frac{L \,.\, D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon}{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KL)\,(D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KF)}$. LF.

65 F. Durch Zeichnung auf der Tafel findet man lf eben ſo, wie man nach dem 23 §. zeichnen müſte,

wenn

wenn LF horizontal, und die Tafel vertical wäre. Man nimmt $rp = D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\cot\varepsilon$, ziehet Kp, nimmt ferner $r\Pi = D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon$, oder welches einerley iſt $p\Pi = D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$, (98 §.), $KP = KL$, und ziehet $P\Pi$, ſo iſt l das Bild von L. Hiernächſt wird $PQ = LF$ genommen, und ΠQ gezogen, ſo iſt f das Bild von F, und lf das Bild von LF.

Das Bild lf iſt im Perſpectiviſchen Maaß ſo lang, als LF, oder PQ im Geometriſchen Maaß: demnach läſt ſich auf dieſe Art jede Linie auf der Tafel perſpectiviſch ausmeſſen, oder eintheilen; auch kann man dabey von den perſpectiviſchen Linien des Proportional-Cirkels eben den Gebrauch machen, der im 41. und 42 §. bey Ausmeſſung und Eintheilung ſolcher Bilder horizontaler Linien auf der verticalſtehenden Tafel umſtändlich iſt beſchrieben worden.

II.) In dem beſondern Fall, wenn $\varepsilon = 90°$ iſt; hat man $rp = 0$, und $r\Pi$ wird $= p\Pi = D\,\mathrm{coſec}\,\psi$; das Bild lf läuft auf den Augenpunct r zu, und es wird $L = \surd(a^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2 + f^2)$, (95 §.) alſo $lf =$

$$\frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\surd(a^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2 + f^2)}{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + KL)\,(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + KF)}.$$

Der ſenkrechte Abſtand der Puncte L und F von CD ſey δ und δ', ſo iſt $KL = \delta\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$, $KF = \delta'\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$, und $LF = (\delta' - \delta).\mathrm{coſec}\,\varepsilon$. Subſtituirt man dieſe Werthe in dem allgemeinen Ausdruck für lf, ſo wird $lf = \dfrac{L.D\,\mathrm{coſec}\,\psi.(\delta' - \delta)}{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta)(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta')}$, und $\delta' - \delta$ iſt $= LF\,\sin\varepsilon$, mithin auch

 $lf =$

$$lf = \frac{L.D.LF.\text{coſec}\,\psi\,\sin\varepsilon}{(D\,\text{coſec}\,\psi+\delta)(D\,\text{coſec}\,\psi+\delta')}.$$ Weil nun $L=\sqrt{(a^2\,\text{coſec}\,\psi^2+(f+D\,\text{coſec}\,\psi\cot\varepsilon)^2)}$ war, (95 §.) ſo iſt $(L\sin\varepsilon=\sqrt{(a^2\,\text{coſec}\,\psi^2\sin\varepsilon^2+(f\sin\varepsilon+D\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\varepsilon)^2)}$. Wird alſo $\varepsilon=0$, mithin LF mit CD parallel angenommen, ſo wird nicht allein $\delta=\delta'$, ſondern auch $f\sin\varepsilon=\delta$, $\cos\varepsilon=1$, und man erhält $L\sin\varepsilon=D\,\text{coſec}\,\psi+\delta$, mithin

$$lf=\frac{D\,\text{coſec}\,\psi}{D\,\text{coſec}\,\psi+\delta}.LF.$$

Bey der Zeichnung auf der Tafel verhält man ſich in dieſem beſondern Fall $\varepsilon=0$ ebenfalls ſo, wie ſchon im 19 §. n. II. für eben dieſen Fall, wo zugleich $\psi=90°$ war, iſt gewieſen worden. Es wird nun rp unendlich groß, $r\Pi=0$, und Π fällt in r.

Hier drückt der Bruch $\frac{D\,\text{coſec}\,\psi}{D\,\text{coſec}\,\psi+\delta}$, die der ſenkrechten Vertiefung $CL=\delta$ zugehörige Verkürzung aus, ſo wie $\frac{D\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\varepsilon}{D\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\varepsilon+KL}$ die der ſchrägen Vertiefung KL zugehörige Verkürzung. Wenn lm mit der Grundlinie parallel iſt, und man ziehet durch l und m Linien in den Augenpunct r, oder auch ſonſt einen andern Punct Π der Gränzlinie; ſo ſchneiden Πl und Πm bis an die Grundlinie in P und Q verlängert ein Stück PQ von ſo vielen Geometriſchen Schuhen ab, als lm verkürzte Schuhe faſſet. (Man vergleiche den 33. §.)

III.) Man ſetze wie im 97. §. $KL=\Lambda$, und $LF=\lambda$, ſo iſt $KF=\Lambda+\lambda$, und man hat

$lf=$

$$lf = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon\,.\,L\,.\,\lambda}{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + \Lambda)(D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + \Lambda + .\,\lambda}:$$

im 97 §. war $lp = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon\,.\,L}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + \Lambda}$, mithin wird auch $lf = \frac{lp\,.\,\lambda}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + \Lambda + \lambda}$.

Weiter iſt $\Lambda = \delta\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$ (97. §.) mithin $lf = \frac{lp\,.\,\lambda}{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + \lambda}$, und man hat auch $lp = \sqrt{(a^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2 + (f + (D\,\mathrm{coſec}\,\psi - \delta)\,\cot\varepsilon)^2)}$. Man multiplicire im Zähler und Nenner mit $\frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta}$, und nehme dieſen Bruch $= n$, ſo wie $lp = l$ an; ſo findet man $lf = \frac{n\lambda\,.\,l}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + n\lambda}$. Wenn man hiemit den 25. und 35 §. vergleicht, ſo erhellet, daß auch die Linie $lm = n\lambda$ dienen könne, jede andre wie fl zu meſſen und einzutheilen.

Verlängert man lm bis an die Linie des Auges rt in B, ſo iſt $\frac{rB}{rt} = \frac{rl}{rC} = \frac{lp}{Kl}$

$$= \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + \Lambda} = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta};$$

wird demnach $rB = a$ geſetzt, ſo hat man $\frac{rB}{rt}$

$= \frac{\alpha}{a\,\mathrm{coſec}\,\psi} = \frac{D\,\mathrm{coſec}\,\psi}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta}$, und der

 Bruch

Bruch $\frac{\alpha}{a \operatorname{coſec} \psi} = n$ drückt für jede Vertiefung die dazu gehörige Verkürzung aus. Um alſo eine Linie lf zu meſſen und einzutheilen, ziehe man lA auf die Gränzlinie ſenkrecht, ſo iſt $lA = Br = \alpha$. Man theile lA in ſo viele gleiche Theile, als die Linie des Auges $rt = a \operatorname{coſec} \psi$ geometriſche Fuſſe faſſet, ſo hat man den Maaßſtab zur Linie lm, die mit der Grundlinie parallel läuft. Nach dieſem Maaßſtab theile man alſo lm ein, und ziehe durch alle Theilungspuncte Linien in Π, ſo iſt auch lf in vertiefte Fuſſe getheilt.

101. §.

Nun wird es kaum weiter nöthig ſeyn, noch zu erinnern, daß alle die Regeln für die ichnographiſch-perſpectiviſche Zeichnung, Ausmeſſung und Eintheilung der Bilder horizontal liegender grader Linien und Winkel auf der vertical ſtehenden Tafel, welche im III. Abſchnitt vorgetragen ſind, hier ebenfalls ihre Anwendung finden, ſo bald die Grundlinie und Gränzlinie nebſt der Linie des Auges auf der Tafel verzeichnet ſind. Was dorten D war, iſt hier D coſec ψ, und was dort a war, iſt hier a coſec ψ: das iſt die ganze Aenderung, worauf man Rückſicht nehmen muß. Alle dort gewieſenen Vortheile des perſpectiviſchen Maaßſtabes, und der perſpectiviſchen Linien auf dem Proportionalcirkel finden hier ohne weitere Aenderung ihre Anwendung, nur daß man vorher den Abſtand des Auges in dem Verhältniß 1 : coſec ψ vergröſſern muß, welches wenn man nicht rechnen will, auch nach dem 39 §. vermittelſt des Proportional-Cirkels geſchehen kann.

Dem-

Demnach ſind auch keine neue Regeln für die ichnographiſch-perſpectiviſche Zeichnung der Bilder ebener Figuren auf der gegen die Ebene der Figur geneigten Tafel nöthig: alle Regeln des IV. Abſchnitts für den Fall der auf der Ebene der Figur ſenkrechten Tafel finden hier ebenfalls nur mit der einzigen ſchon angezeigten Veränderung ihre Anwendung. Jetzt allererſt iſt man recht im Stande, die Schönheit und Allgemeinheit der oben vorgetragenen Gründe der perſpectiviſchen Zeichenkunſt zu überſehen, wovon unſre neuern deutſchen Schriftſteller ein tiefes Stillſchweigen beobachten, wenn nur der ſchon oft mit Ruhm erwehnte Herr **Lambert** ausgenommen wird; der dem Herrn Clemm vermuthlich damahls noch nicht bekannt geweſen iſt, als er in ſeinem zu Stuttgard 1764 herausgegebenen Mathematiſchen Lehrbuch im 427 §. von den zur Perſpectiv gehörigen Schriften eines der neueſten vorzüglich empfehlen wollte. Man darf, wenn man mit den bisherigen Lehren, und den im folgenden Abſchnitt noch zu erklärenden allgemeinen Gründen der Scenographie, ſich recht bekannt gemacht hat, noch ſo ſehr verwickelt ſcheinende Fälle nicht ſcheuen, bey denen freylich die gemeine Art, wo man ſich einzig und allein durch die herabgeloffenen Perpendicullinien hilft, (15 §.) und bey Zeichnung der Ichnographie den Grundriß unter der Fundamentallinie legt, (14 §.) den geduldigſten leicht verdrießlich machen kann. Man iſt dabey genöthiget den Entwurf der Zeichnung mit ſo vielen überflüßigen Linien zu überziehen, daß man zuletzt faſt gar nicht mehr heraus zu finden weis, und man kann Hn. Meiſters Klagen hierüber in ſeiner zu Göttingen 1753 gehaltenen Inau-

gural-Diſputation: Inſtrumentum Scenographicum, cujus ope datis objecti ichnographia & orthographia invenire ſcenographiam exponit, im VIII. und IX. §. leſen; auch zugleich, auſſer dem von ihm ſelbſt beſchriebenen Inſtrument, aus dieſer Schrift verſchiedene andre practiſche Schriftſteller kennen lernen, die ebenfalls durch dergleichen Inſtrumente die Mühe der Zeichnung haben erleichtern wollen. Bey der hier gelehrten und noch weiter zu erklärenden Methode wird man mit allen übrigen dergleichen Inſtrumenten auch das Meiſterſche gern entbehren, da man ſelbſt beym Gebrauch des leztern genöthiget iſt, die Ichnographie und Orthographie des Objects gemeiniglich mit mehrerer Mühe und Zeitverluſt zu ſuchen, als nach der hier gelehrten Methode nöthig iſt, die ganze Scenographie zu zeichnen.

Wegen der Kürze, worauf ich mich einſchränken muß, kann ich zwar nicht von neuen in vielen Beyſpielen zeigen, wie man die bisher gelehrten Methoden bey perſpectiviſcher Entwerfung von allerley Arten ebener Figuren, deren Ebene die Tafel ſchief ſchneidet, anzuwenden habe: indeſſen verdient der Fall, wenn die abzubildende Figur ein Kreis iſt, ſo wie auch die allgemeine Aufgabe: wie die Projection einer jeden krummen Linie gefunden werden könne, wenn ſie in einer die Tafel ſchief ſchneidenden Ebene liegt? noch vorzüglich eine nähere Erwägung. Neue Regeln ſind nicht nöthig, wie man durch Zeichnung ſo viele Puncte der Projection einer krummen Linie in der gegen die Tafel geneigten Ebene auf die Tafel bringen kann, als die jedesmahligen Umſtände erfordern: man geht dabey in allen Stücken ſo zu Werke, wie es im 53 §. beſon-

ſonders in der Anwendung auf den Kreis umſtändlich iſt gewieſen worden. Es iſt aber in vielen Fällen intereſſant, eine Gleichung für die Projection der krummen Linie zu haben, deswegen muß nunmehro die Auflöſung der Aufgabe des 56 §. in ihrer ganzen Allgemeinheit geſucht werden.

102 §.

Die Natur einer in der Ebene TCFEZ verzeichneten krummen Linie AMEN iſt vermittelſt einer Gleichung zwiſchen zweyen Coordinaten bekannt, deren Lage gegen die Durchſchnittslinie TV dieſer Ebene mit der Tafel TVXY gegeben iſt; letztere ſchneidet die Ebene der Linie AMEN unter den gegebenen Winkel ψ, auch ſind diejenigen Stücke gegeben, welche die Lage des Auges gegen die Tafel und die Ebene der abzubildenden Linie beſtimmen: man ſoll eine Gleichung für die Projection dieſer Linie finden. 102 F.

1. Auflöſung. Wenn die Coordinaten der krummen Linie, für welche die Gleichung gegeben iſt, nicht auf der Grundlinie TV der Tafel ſenkrecht, und damit parallel ſind, ſo ſuche man aus der gegebenen Gleichung eine andre, zwiſchen ein Paar Coordinaten, welche dieſe Eigenſchaft haben. Man nehme die Abſciſſenlinie FE auf TV ſenkrecht, und die Applicaten PM damit parallel, ſo wird das Bild der Abſciſſenlinie in den Augenpunct *r* der abzubildenden Ebene laufen, und die Bilder *pm* der Applicaten PM werden mit TV parallel ſeyn. Aus Betrachtung der Figur wird man ſchon abnehmen, daß

nach den bisherigen Bezeichnungen $OR = D$, $OS = a$, $rTZ = \psi$, $Tr = a \operatorname{coſec} \psi$, $TFr = \zeta$ ſey, und $TF = f$ der Abſtand der Abſciſſenlinie von der Ebene des Auges. Weil ſich nun auch hier die Bilder der Abſciſſe und Applicate der krummen Linie auf ähnliche Art wie im 56 §. durch die Abſciſſe und Applicate der Linie AMEN ausdrücken laſſen, ſo ſiehet man wohl, daß die daſelbſt ſchon vorgeſchriebenen allgemeinen Maximen auch hier ihre Anwendung finden.

Es ſey alſo A der Anfangspunct der Abſciſſen, $AP = t$, $PM = u$, für die Projection aber ſey $ap = x$, $pm = y$; ſo iſt ap das Bild von AP, und pm das Bild von PM. Weiter ſetze man $FA = c$, ſo iſt hier $FA = c$, und $AP = t$ das, was im 97. und 100 §. num. III. Α und λ war, und das dortige ε iſt hier $= 90°$. Dieſemnach erhält man $x = \dfrac{D \operatorname{coſec} \psi . L . t}{(D \operatorname{coſec} \psi + c)(D \operatorname{coſec} \psi + c + t)}$, und es iſt $L = \sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + f^2)}$, (95 §.); aus dem num. II. des 100 §. aber findet man $y = \dfrac{D \operatorname{coſec} \psi}{D \operatorname{coſec} \psi + c + t} . u$. Aus der erſten Gleichung wird $(D \operatorname{coſec} \psi + c)^2 x + (D \operatorname{coſec} \psi + t) tx = D \operatorname{coſec} \psi . L . t$, mithin $(D \operatorname{coſec} \psi . L - (D \operatorname{coſec} \psi + c) x) t = (D \operatorname{coſec} \psi + c)^2 x$, und man findet $t = \dfrac{(D \operatorname{coſec} \psi + c)^2 x}{D \operatorname{coſec} \psi . L - (D \operatorname{coſec} \psi + c) x}$. Das giebt ferner $D \operatorname{coſec} \psi + c + t = \dfrac{(D \operatorname{coſec} \psi + c) D \operatorname{coſec} \psi . L}{(D \operatorname{coſec} \psi . L - (D \operatorname{coſec} \psi + c) x}$, und weil vermöge der zweyten Gleichung

$u =$

$u = \frac{D \operatorname{coſec} \psi + c + t}{D \operatorname{coſec} \psi} \cdot y$ iſt; ſo erhält man $u = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + c) L . y}{D \operatorname{coſec} \psi . L - (D \operatorname{coſec} \psi + c) x}$. Uebrigens iſt für die Projection der Coordinaten-Winkel $= \zeta$, und $\tang \zeta = \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{F}$; (95 §.) die Stelle des Anfangspuncts der Abſciſſen aber giebt $Fa = \frac{c . L}{D \operatorname{coſec} \psi + c}$.

Man ſiehet hieraus zur Genüge, daß die geſammten Formuln des 56 §. ihre allgemeine Anwendung finden, wenn man nur allenthalben $D \operatorname{coſec} \psi$ ſtatt D, und $a \operatorname{coſec} \psi$ ſtatt a ſchreibt. Dieſemnach wird in allen Fällen aus der gegebenen Gleichung zwiſchen t und u die Gleichung für die Projection zwiſchen x und y gefunden, wenn man in derſelben

$$t = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + c)^2 x}{D \operatorname{coſec} \psi . L - (D \operatorname{coſec} \psi + c) x},$$

$$u = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + c) L . y}{D \operatorname{coſec} \psi . L - (D \operatorname{coſec} \psi + c) x},$$

ſetzt, da dann die Tangente des Coordinaten-Winkels $= \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f}$, und $L = \sqrt{(a^2 \operatorname{coſec} \psi^2 + f^2)} = f \sec \zeta$ iſt, oder auch $L = a \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \zeta$, ſo wie $Fa = \frac{c . L}{D \operatorname{coſec} \psi + c}$.

Will man F für den Anfangspunct der Abſciſſen annehmen, ſo hat man $FP = t$, $Fp = x$,

FA $= c = 0$, mithin

$$t = \frac{D \operatorname{coſec} \psi . x}{L - x}$$

$$u = \frac{L . y}{L - x}.$$

Will man auch einen andern Anfangspunct der Abſciſſen irgendwo in E annehmen, und die poſitiven Abſciſſen gegen die Tafel zu rechnen, ſo hat man

$$t = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + c)^2 x}{D \operatorname{coſec} \psi . L + (D \operatorname{coſec} \psi + c) x},$$

$$u = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + c) L . y}{D \operatorname{coſec} \psi . L + (D \operatorname{coſec} \psi + c) x}.$$

Uebrigens bleibt $\operatorname{tang} \zeta = \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f}$, und

$$Fe = \frac{c . L}{D \operatorname{coſec} \psi + c}.$$

2. Auflöſung. Es kann in beſondern Fällen vortheilhaft ſeyn, die Gleichung für die gegebene krumme Linie ANEM ſo zu verändern, daß zwar die Applicaten mit der Grundlinie der Tafel parallel laufen, die Abſciſſenlinie aber die Grundlinie der Tafel, mithin auch die damit parallelen Applicaten unter einem ſchiefen Winkel ſchneidet. Man weis daß gleiche Theile ſolcher Linien, die mit der Grundlinie parallel laufen, gleiche Bilder haben, wenn demnach die Abſciſſenlinie der gegebenen Linie von der letztern ein Durchmeſſer iſt, in dem Verſtande des 58 §; ſo iſt auch die Abſciſſenlinie der Projection ein Durchmeſſer der Projection. In allen Fällen alſo, wenn die gegebene Linie ANEM einen Durch-

Durchmeſſer hat, der alle mit der Grundlinie der Tafel parallele Sehnen halbirt, iſt es am vortheilhafteſten, dieſen Durchmeſſer für die Abſciſſenlinie anzunehmen, und das Bild dieſes Durchmeſſers für die Abſciſſenlinie der Projection.

Es ſey alſo FE eine Abſciſſenlinie der gegebenen krummen Linie ANEM, welche die mit der Grund- 135F.
linie TF der Tafel parallelen Ordinaten MN unter dem Winkel TFE$=$MPE$=\varepsilon$ ſchneidet, die Abſciſſe AP$=t$, PM$=u$, und es ſey für die Linie ANEM eine Gleichung zwiſchen t und u bekannt. Wenn man annimmt, daß FFE ein ſpitzer Winkel, und Fe das Bild von FE ſey, ſo wird Fe nicht in den Augenpunct r laufen, ſondern in einen andern Punct π der durch r laufenden Horizontallinie linker Hand des Augenpuncs r, der von demſelben um den Abſtand $r\pi=$ D coſecψ cotε entfernt iſt; (93 §.) und wenn der Winkel TF$e=\zeta$, TF$=f$, OS$=a$ geſetzt wird, ſo hat man

$$\text{tang}\,\zeta=\frac{a\,\text{coſec}\,\psi}{f+\text{D}\,\text{coſec}\,\psi\,\text{cot}\,\varepsilon}.$$

Für die Projection ſey $ap=x$, $pm=y$, und ap das Bild von AP, pm das Bild von PM. Wenn ferner FA$=c$ angenommen wird, ſo iſt wiederum FA$=c$, und AP$=t$, das was im 97. und 100 §. num. III. A und λ war; dieſemnach wird

$$\alpha=\frac{\text{D}\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\varepsilon\,.\,\text{L}\,.\,t}{(\text{D}\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\varepsilon+c)(\text{D}\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\varepsilon+c+t)},$$

und es iſt nun $\text{L}=\sqrt{(a^2\,\text{coſec}\,\psi^2+(f+\text{D}\,\text{coſec}\,\psi\,\text{cot}\,\varepsilon)^2)}=a\,\text{coſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\zeta=(f+\text{D}\,\text{coſec}\,\psi\,\text{cot}\,\varepsilon)\,\text{ſec}\,\zeta$: aus dem num. II. des 100 §. aber findet man

$$y=\frac{\text{D}\,\text{coſec}\,\psi}{\text{D}\,\text{coſec}\,\psi+(c+t)\,\text{ſin}\,\varepsilon}\,.\,u,$$ weil hier $(c+t)$ ſinε

das

das iſt, was dort δ war, mithin iſt auch

$$y = \frac{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon}{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + c + t} \cdot u.$$

Die Vergleichung mit der vorigen Auflöſung ergiebt, daß dieſe Formuln für x und y mit den vorigen völlig überein kommen, wenn man $D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon$ ſtatt $D \operatorname{coſec} \psi$ ſchreibt: mithin iſt auch umgekehrt

$$t = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + c)^2 x}{L . D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon - (D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + c) x},$$

$$u = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + c) . L . y}{L . D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon - (D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + c) x}.$$

Uebrigens iſt für die Projection der Coordinatenwinkel $= \zeta$, und $\operatorname{tang} \zeta = \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f + D \operatorname{coſec} \psi \cot \varepsilon}$; die Stelle des Anfangspuncts der Abſciſſen aber giebt die Gleichung $Fa = \frac{c . L}{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon + c}$.

(97 §.)

Will man F für den Anfangspunct der Abſciſſen annehmen, ſo hat man $FP = t$, $Fp = x$, $FA = c = 0$, und es wird

$$t = \frac{D \operatorname{coſec} \psi \operatorname{coſec} \varepsilon . x}{L - x},$$

$$u = \frac{L . y}{L - x}.$$

Will man aber E für den Anfangspunct der Abſciſſen annehmen, und die poſitiven Abſciſſen EP gegen die Tafel zu rechnen, ſo hat man

$FE = c$,

$FE = c$, und

$$t = \frac{(D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + c)^2 x}{L . D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + (D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + c) x},$$

$$u = \frac{(D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + c) . L . y}{L . D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + (D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + c) x}.$$

Uebrigens bleibt $\tang \zeta = \frac{a \operatorname{coſec}\psi}{f + D \operatorname{coſec}\psi \cot\varepsilon}$,

und es iſt $Fe = \frac{c . L}{D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + c}$.

103. §.

Um den Vortrag der Gründe der Perſpectiv deſto weniger zu unterbrechen, werde ich hier zwar noch keine Anwendungen von dieſer allgemeinen Aufgabe auf beſondre Fälle machen: es ſoll aber unten die Anwendung auf den Kreis umſtändlich folgen. So viel kann man hier vorläufig aus Vergleichung mit dem 57. §. u. f. §. §. gar leicht herleiten, wenn man annimmt, AMEN ſey ein Kreis, und C ſein Mittelpunct, daß die Projection deſſelben allemahl auch auf der ſchiefliegenden Tafel eine Linie ſey, deren Natur durch die Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(2p - x)x$ ausgedruckt wird, $ep = x$, $pm = y$ geſetzt, wenn man

$p = \frac{r D \operatorname{coſec}\psi . L}{b^2 - r^2}$, $\frac{qq}{pp} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$,

$q = \frac{r . D \operatorname{coſec}\psi}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$, $L = \sqrt{(a^2 \operatorname{coſec}\psi^2 + f^2)}$,

$b = D \operatorname{coſec}\psi + \delta$ ſetzt, $\delta = FC$ angenommen, da

dann

dann die Tangente des Coordinatenwinkels

102F. $= \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f}$ iſt. Man ziehe in der Ebene des Auges Os mit rT parallel bis an s in TZ, und sg mit TV parallel bis an die verlängerte FC; ſo iſt $gF = sT = Or = D \operatorname{coſec} \psi$, mithin $gC = D \operatorname{coſec} \psi + \delta = b$. So lange nun $CA = r < b$, alſo $CA < Cg$ iſt, ſo lange ändert ſich die Natur der Projection nicht. Sie iſt bey dieſer Vorausſetzung eine Ellipſe, (60 §.) denn die Ebene Osg ſchneidet nun alle Seitenlinien des Kegels OAMEN, mithin auch die mit ihr parallele Ebene der Tafel. Ferner iſt ea ein Durchmeſſer dieſer Ellipſe, der alle mit TV parallele Ordinaten halbirt; die Ordinate kl durch ſeine Mitte f iſt ſein zugeordneter Durchmeſſer, und f ſein Mittelpunct. Die Stelle dieſes Mittelpuncts giebt die Gleichung $Ff = k = \frac{(b\delta - r^2)L}{b^2 - r^2}$ (68 §.), und die Endpuncte des Durchmeſſers ea geben die Gleichungen $Fa = \frac{(\delta - r)L}{b - r}$, $Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r}$. Noch giebt ſich die Projection des Mittelpuncts c durch die Gleichung $Fc = \frac{\delta}{b} \cdot L$, und das Bild des durch C mit TV parallelen Halbmeſſers, als die halbe Ordinate durch $c = \frac{D \operatorname{coſec} \psi}{b} \cdot r = \frac{b - \delta}{b} \cdot r$.

Hieraus folgt, daß die Projection des Kreiſes auf der Perſpectiviſchen Tafel in allen Fällen, wo ſie

ſie eine Ellipſe wird, auch wenn die Tafel und die Ebene des Kreiſes einander ſchief ſchneiden, nach den Regeln des 71 §. gezeichnet werden könne. Was es mit dieſer Projection in ſolchen Fällen für eine Bewandniß habe, wenn $b = r$, oder $b < r$ iſt, wird unten umſtändlicher unterſucht werden. Um die eigentlichen Gründe der Perſpectiv in einen genauen Zuſammenhang zu bringen, werde ich nunmehro die im VI. Abſchnitt ſchon angefangene Theorie der Scenographie ebenfalls in ihrer völligen Allgemeinheit vortragen.

Der VIII. Abſchnitt.

Die Allgemeine Theorie der Scenographie.

104. §.

Den Vereinigungs-Punct der Bilder aller derjenigen graden Linien zu finden, die auf der Ebene AB ſenkrecht ſind: vorausgeſetzt, daß die Tafel gegen dieſe Ebene unter dem Winkel $rtH = \psi$ geneigt ſey. 64 F.

Aufl. Weil alle auf AB ſenkrechte grade Linien unter einander parallel ſind, und die Tafel un-

ter einerley Winkel ſchneiden, ſo haben ihre Bilder auf der Tafel einen Vereinig ungs-Punct. (75 §.) Nun ſey LW auf der Ebene AB ſenkrecht, und treffe verlängert die Tafel in S, ſo geht das Bild von LW durch S, und liegt in der Ebene der Parallelen OG und LS, folglich in der Durchſchnittslinie dieſer Ebene mit der Tafel. Man verlängere OG nach unten, und ſtelle ſich die Tafel ebenfalls nach unten erweitert vor, ſo wird OG mit der Tafel irgendwo in q zuſammen ſtoſſen: alsdenn liegt der Punct q in der Ebene OGLW und in der Tafel, mithin in beyder Ebenen Durchſchnittslinie SL, das iſt in dem Bilde von LW. Dieſe Schlüſſe finden ihre Anwendung, der Punct L, wo LW die Ebene AB trift, mag liegen, wo er wolle, mithin iſt q der Vereinigungs-Punct der Bilder aller mit LW parallelen Linien. Eben der Punct q liegt nun zugleich in der Ebene des Auges OGtr, und in der Tafel, folglich in beyder Durchſchnittslinien tr. Im Viereck OGtR iſt der Winkel GOR $= 180° - GtR = RtH = \psi$, mithin wird R$q$ = D tang ψ, und weil Rr = D cot ψ, ſo wird $rq = D(\tang \psi + \cot \psi)$. Es iſt aber

$$\tang \psi + \cot \psi = \frac{\sin \psi^2 + \cos \psi^2}{\sin \psi \cos \psi} = \sec \psi \cosec \psi,$$

mithin wird $rq = D \sec \psi \cosec \psi$.

105 §.

Die Lage des Puncts L aus welchem LW über AB ſenkrecht aufgerichtet worden, iſt durch ſeine Entfernungen GL $= \delta$ von der Grundlinie der Tafel, und YL $= t$C $= f$ von der Ebene des Auges gegeben: man ſoll auf

der

der Tafel den Punct S finden, worin LW die Tafel trift.

Aufl. Weil LC auf CD ſenkrecht iſt; ſo iſt auch SC auf CD ſenkrecht, (314 §. Geom.) alſo $SCL = \psi$, und $CSL = 90° - \psi$ iſt der Neigungswinkel der Linie LW gegen die Tafel (320 §. G.) Demnach erhält man $LS = \delta \tang \psi$, $CS = \delta \sec \psi$. Wenn demnach auf der Grundlinie $tC = f$ genommen und aus C eine ſenkrechte Linie $CS = \delta \sec \psi$ aufgerichtet wird, ſo iſt S der geſuchte Punct.

Das Bild der Linie LW muß auf der Tafel durch S laufen, und eben dieſes Bild läuft auf in den Punct q; (104 §.) demnach liegt das Bild der ſo weit man will unter L verlängerten Linie SL in Sq, und q iſt das Bild eines von S unterhalb L unendlich weit entfernten Puncts.

106 §.

Auf der Tafel iſt die Lage der Grundlinie 63 u.
CD nebſt dem Haupt-Augenpunct R gegeben: 64 F.
überdem iſt die Entfernung δ der auf AB ſenkrechten Linie LW von der Grundlinie CD, und ihre Entfernung f von der Ebene des Auges gegeben: man ſoll die Lage ihres Bildes durch Zeichnung auf der Tafel ſuchen.

Aufl. Nachdem Rt wie im 92 §. auf CD ſenkrecht geſetzt, und $RO = D$ mit CD parallel gezogen iſt, ſetze man an OR den Winkel $ROq = \psi$ ſo giebt ſich in der Linie Rt der Vereinigungspunct q, weil $Rq = D \tang \psi$ wird. (104 §.) (Iſt alſo wie im 92 §. Or unter dem Winkel $ROr = 90° - \psi$ ſchon gezogen, ſo macht man $rOq = 90°$.) Weiter

nehme man $tC=f$, mache den Winkel $tCL=90^\circ-\psi$, und $CL=\delta$, ſetze LS auf CL und CS auf tC ſenkrecht, ſo wird $CS=\delta\sec\psi$, und es iſt S der Punct, worin LW die Tafel trift. Demnach kann man qS ziehen, welches das geſuchte Bild iſt.

65 F. Weil $Or=D\,\mathrm{cosec}\,\psi$ iſt, (92 §.) ſo wird $rq=D\,\mathrm{cosec}\,\psi\sec\psi$, und $tq=rq-rt=D\,\mathrm{cosec}\,\psi\sec\psi-a\,\mathrm{cosec}\,\psi$. Es ſey $SX\parallel tC$, und ſchneide rt in v; ſo wird $vq=tv+tq=\delta\sec\psi+D\,\mathrm{cosec}\,\psi\sec\psi-a\,\mathrm{cosec}\,\psi=(D\,\mathrm{cosec}\,\psi+\delta)\sec\psi-a\,\mathrm{cosec}\,\psi$, und man erhält $\mathrm{tang}\,vSq=\frac{vq}{vS}$

$$=\frac{(D\,\mathrm{cosec}\,\psi+\delta)\sec\psi-a\,\mathrm{cosec}\,\psi}{f},$$ alſo

$$\sec vSq=\frac{\sqrt{(f^2+((D\,\mathrm{cosec}\,\psi+\delta)\sec\psi-a\,\mathrm{cosec}\,\psi)^2)}}{f}.$$

Wenn dieſer Winkel $=\xi$ geſetzt wird, ſo dient derſelbe ebenfalls die Lage des Bildes Sq zu finden, wenn man $tv=\delta\sec\psi$ nimmt, $v\surd=f$ mit CD parallel ziehet, und $vSq=\xi$ macht.

Die Gränzlinie wird von qS in n geſchnitten, und es iſt $rnq=\xi$. Ueberdem hat man $qv:vS=qr:rn$, oder $(D\,\mathrm{cosec}\,\psi+\delta)\sec\psi-a\,\mathrm{cosec}\,\psi:f=D\,\mathrm{cosec}\,\psi\sec\psi:rn$, mithin wird $rn=\frac{f.D\,\mathrm{cosec}\,\psi}{D\,\mathrm{cosec}\,\psi+\delta-a\cot\psi}$. Wenn alſo auf der Gränzlinie rn dieſem Werth gleich genommen, und der Winkel $rnq=\xi$ gemacht wird, ſo hat man ebenfalls die Lage des Bildes qS; und dies kann in ſolchen Fällen bequem ſeyn, wenn δ etwas groß und

ψ

ψ nicht viel von 90° verſchieden iſt, da dann S ſehr hoch über der Gränzlinie fällt.

107. §.

Die ganze Länge des Bildes Sq der von dem Punct S der Tafel auf die Ebene AB ſenkrecht fallenden, und unter derſelben ins unendliche fortlaufenden Linie SL zu finden.

Aufl. Es iſt $Sq = vS . \text{ſec}\,\zeta = f\,\text{ſec}\,\zeta$, mithin $Sq = \surd(f^2 + (D\,\text{coſec}\,\psi + \delta)\,\text{ſec}\,\psi - a\,\text{coſec}\,\psi)^2)$. (106 §.) Wenn dieſe Linie $= \Delta$ geſetzet wird, ſo iſt ſie als eine bekannte Linie anzuſehen, ſobald auſſer D, a, ψ auch f und δ gegeben ſind.

108. §.

Wenn LW die Geometriſche Höhe der über AB aus L ſenkrecht aufgerichteten Linie iſt, ſo iſt lw ihre perſpectiviſche Höhe. Die Stelle des Puncts l, oder ſeine perſpectiviſche Vertiefung Cl wird aus der geometriſchen CL nach dem 97 §. gefunden. Wenn nun überdem q nach dem 103 §, oder S, oder auch n nach dem 106 §. gefunden iſt, ſo iſt die Lage der Linie lw bekannt. 64 F.

109 §.

Die ſenkrechte Höhe LW des Puncts W über AB iſt gegeben, mit den Entfernungen f und δ: man ſucht die Stelle des Bildes w auf der Tafel. 64 F.

Aufl. Aus D, a, ψ, f und δ hat man S und q auf der Tafel. Weil nun allemahl LS $= \delta\,\text{tang}\,\psi$ iſt, ſo iſt SW $=$ LS $-$ LW bekannt, wenn LW gegeben iſt. Ueberdem ſind die Dreyecke Oqw

und WSw einander ähnlich, und man hat $Oq:SW = qw:Sw$, alſo auch $Oq+SW:SW=qS:Sw$, d. i. $D\sec\psi+SW:SW=\Lambda:Sw$, und man findet

$$Sw = \frac{SW}{D\sec\psi+SW}\cdot\Lambda.$$

Weil $qw=qS-Sw$, ſo erhält man auch

$$qw = \frac{D\sec\psi}{D\sec\psi+SW}\cdot\Lambda.$$

65 F. Um den Punct W durch Zeichnung auf der Tafel zu finden, ziehe man durch q eine Parallele mit der Grundlinie, nehme auf derſelben $q\Omega=qO = D\sec\psi$, auf Sv aber SW ſo lang als SW in der 64 Fig. iſt, ziehe $W\Omega$; ſo iſt der Durchſchnittspunct w mit qS der geſuchte.

Hier iſt $D\sec\psi=Oq$ der Abſtand des Auges vom Vereinigungs-Punct q und SW die wahre Länge der Linie, wovon Sw das Bild iſt. Demnach iſt dieſe Zeichnung der im 97 §. gelehrten wiederum ganz ähnlich. Man ſiehet leicht daß $q\Omega$ die Gränzlinie einer Ebene ſeyn würde, welche die Tafel in der Linie vS unter dem Winkel $90°-\psi$ ſchnitte, alſo vS ihre Grundlinie, q ihr Augenpunct. Man kann alſo hier Sv in gleiche Ruthen, Fuſſe, Zolle eintheilen, ſo dient dieſe eingetheilte Grundlinie, von dem Bilde Sq der von S aus auf AB ſenkrecht zulaufenden Linie ſo viele perſpectiviſche Ruthen, Fuſſe, Zolle, wie man will, vermittelſt der von den Theilungspuncten in Sv nach Ω zu laufenden Linien, abzuſchneiden, mithin Sq in perſpectiviſche Ruthen, Fuſſe, u. ſ. f. einzutheilen. Zu eben dieſer Abſicht können auch wiederum die perſpectiviſchen Linien des

Pro-

Proportional-Cirkels dienen, und man verfährt damit eben ſo, wie im 41. u. f. §. §. iſt gewieſen worden, nur muß vorher die Diſtanz des Auges in dem Verhältniß 1 : ſec ψ vergröſſert werden.

110 §.

Wenn LN der Höhe des Auges über der Ebene AB gleich iſt, ſo liegt das Bild *n* des Puncts N in der Gränzlinie.

Beweis. Die Gränzlinie *rn* iſt mit CD, ſo 64 F.
wie O*r* mit G*t* parallel, mithin iſt die Ebene O*rn* mit der Ebene AB parallel, und zwar in einer Entfernung, die der Höhe des Auges OG $=a$ gleich iſt. Wenn demnach LN $=$ OG iſt, ſo liegt N in der Ebene O*rn* (327 §. Geom.) alſo auch ON. Ferner liegt der Linie ON Durchſchnittspunct mit der Tafel in der Ebene O*rn* und der Tafel zugleich, folglich in der Gränzlinie.

Daſſelbe giebt auch die allgemeine Formul für 65 F.
S*w* im vor. §. Wenn nemlich die Gränzlinie und *q*S einander in *h* ſchneiden, ſo iſt $qv : rv = q\text{S} : \text{S}n$, oder (106. §.) $(D \operatorname{coſec}\psi + \delta) \operatorname{ſec}\psi - a \operatorname{coſec}\psi : \delta \operatorname{ſec}\psi - a \operatorname{coſec}\psi = \Lambda : \text{S}n$. Man multiplicire die beyden erſten Glieder mit $\sin\psi$, ſo wird $D \operatorname{ſec}\psi + \delta \operatorname{tang}\psi - a : \delta \operatorname{tang}\psi - a = \Lambda : \text{S}n$, oder

$$\text{S}n = \frac{\Lambda . (\delta \operatorname{tang}\psi - a)}{D \operatorname{ſec}\psi + \delta \operatorname{tang}\psi - a}.$$

Eben das giebt die allgemeine Formul für S*w*, wenn man SW $=$ SN $= \delta \operatorname{tang}\psi - a$ ſetzt.

111 §.

Aus der wahren Höhe LW die perſpectiviſche *lw* zu finden. 64 65 F.

Aufl. Es iſt $qw = \frac{D \sec \psi}{D \sec \psi + SW} \cdot \Lambda$, (109 §.) mithin auch $ql = \frac{D \sec \psi}{D \sec \psi + SL} \cdot \Lambda$, und daraus folgt $lw = qw - ql = \Lambda \cdot D \sec \psi \left(\frac{1}{D \sec \psi + SW} - \frac{1}{D \sec \psi + SL} \right)$, oder

$$lw = \frac{\Lambda \cdot D \sec \psi}{(D \sec \psi + SW)(D \sec \psi + SL)} \cdot LW.$$

Weil nun $SL = \delta \tang \psi$ iſt, alſo $SW = \delta \tang \psi - LW$, ſo erhält man $lw = \frac{\Lambda \cdot D \sec \psi.}{D \sec \psi + \delta \tang \psi} \cdot \frac{LW}{D \sec \psi + \delta \tang \psi - LW}$.

Wenn man auf der Tafel die ganze Höhe SL (64 Fig.) auf S*v* (65 Fig.), d. i. $\delta \tang \psi$ auf S*v* von S nach L aufträgt, und ΩL zieht, ſo iſt *l* das Bild von L. Zählt man nun weiter von L nach W ſo viel Schuhe, als LW hoch ſeyn ſoll, und ziehet ΩW, ſo iſt *w* das Bild von W, und *lw* die geſuchte perſpectiviſche Höhe.

Wenn Ω*n* mit S*v* in N zuſammen ſtößt, ſo iſt LN eben ſo viele Geometriſche Schuhe lang, als *ln* perſpectiviſche Schuhe faſſet; mithin eben ſo viele Schuhe, als die Höhe des Auges über der Ebene AB ausmachen. (110 §.) Wird alſo LN in ſo viele gleiche Theile eingetheilt, als in dieſer Höhe Fuſſe enthalten ſind; ſo theilen die von Ω bis an die Theilungspuncte gezogenen Linien auch *ln* in perſpectiviſche Fuſſe ein. Zugleich wird nun λ*n* in eben ſo viele glei-

gleiche Theile als LN getheilt, und umgekehrt die aus Ω laufenden Linien, welche λn in gleiche Theile eintheilen, theilen LN in eben ſo viele gleiche Theile ein. Geſetzt alſo l iſt gegeben und die Lage der Linie lS, ſo kann man auch lS auf folgende Art in perſpectiviſche Fuſſe theilen.

Nachdem $q\Omega = qO = D \sec\psi$ genommen iſt, wird Ωl gezogen, und bis an die Gränzlinie in λ verlängert. Wenn alsdenn qL die Gränzlinie in λ ſchneidet, ſo theilt man λn in ſo viele gleiche Theile oder Fuſſe, als die Höhe des Auges über AB faſſet, ſo theilen die von Ω durch die Theilungspuncte in λn laufenden Linien auch ln perſpectiviſch ein. Eben die gleichen Theile von λn kann man alsdenn auch auf beyden Seiten von λ und n weiter auf der Gränzlinie forttragen, und auf ſolche Art Sl von S nach q zu ſo weit man will, eintheilen.

112. §.

Der Hauptaugenpunct R nebſt der Grundlinie TC, und Gränzlinie Rn des Horizonts auf der vertical ſtehenden Tafel ſind gegeben; überdem iſt die Lage einer andern Ebene gegeben, welche gegen die Ebene des Horizonts unter dem Winkel ϑ geneigt iſt, und deren Durchſchnittslinie mit dem Horizont die Grundlinie der Tafel in der Entfernung $TC = f$ von der Ebene des Auges unter dem Winkel η ſchneidet: man ſoll die Gränzlinie und Grundlinie dieſer geneigten Ebene, ihren Augenpunct, die Höhe des Auges über dieſer Ebene, und ihren Neigungswinkel gegen die Tafel durch Zeichnung finden. 66 F.

Aufl. 1. Man zeichne zuerſt das Bild TC*p* des Winkels η: wenn derſelbe = 50° angenommen wird, ſo iſt ſein Complement = 40°, C*p* läuft auf den 40ſten Grad der Gränzlinie des Horizonts zu, und *p* iſt der Vereinigungspunct der Bilder aller mit C*p* parallelen Linien. Die Linie C*p* aber iſt die Durchſchnittslinie der geneigten Ebene mit dem Horizont: und wenn $\vartheta = 90°$ wäre, ſo ſtünde letztere über C*p* auf dem Horizont ſenkrecht, ihre Neigung gegen die Tafel wäre = η, und ihre Durchſchnittslinie mit der Tafel ſtünde auf CT ſenkrecht. (80 §.) Wenn demnach Cδ durch C auf CT ſenkrecht geſetzt wird, ſo iſt Cδ die Grundlinie dieſer auf dem Horizont ſenkrechten und gegen die Tafel unter dem Winkel η geneigten Ebene. Aus A ſey AB ſenkrecht über T aufgerichtet, ſo iſt AB das Bild einer verticalen Linie, welche den Horizont in einem Punct trift, deſſen Bild A iſt, und AB liegt in der Ebene, die den Horizont in CA*p* ſenkrecht ſchneidet, und gegen die Tafel unter dem Winkel η geneigt iſt. Durch einen willkührlichen Punct B der ſenkrechten Linie AB ſey mit CA eine parallele gezogen, deren Bild BK iſt, ſo läuft auch BK auf *p* zu; (80 §.) mithin liegt *p* in den Gränzlinie der auf dem Horizont ſenkrechten Ebene CABK. Eben dieſe Gränzlinie iſt mit der Grundlinie Cδ parallel, alſo darf man nur gleich durch *p* die grade Linie EF mit Cδ parallel ziehen, oder auf der Gränzlinie R*n* des Horizonts ſenkrecht ſetzen, ſo iſt EF die Gränzlinie der Ebene BACK, und *p* ihr Augenpunct. (91 §.) Wenn demnach RO = D genommen wird, ſo iſt der Winkel R*p*O = η der Neigungswinkel gegen die Tafel, O*p* der Abſtand des Auges vom Augenpunct *p*, und eine grade

Li-

Linie aus ϑ auf Op ſenkrecht geſetzt iſt die Höhe des Auges über der Ebene BACK. Um nun die Gränzlinie EF gehörig einzutheilen, kann man $pO =$ D coſec η von p nach π tragen und aus π mit dieſem Halbmeſſer πp einen Halbkreis beſchreiben, welcher gehörig eingetheilt zugleich die Eintheilungen der Gränzlinie giebt. (94 §.) Uebrigens ſtellt nun CABK ein Rechteck vor, das über AC auf dem Horizont ſenkrecht ſteht, und in CK an die Tafel ſtößt.

II.) Das bisherige dient zugleich zur Vorbereitung auf den Fall, wenn ϑ nicht $= 90°$ ſeyn ſoll. Zeichnet man nemlich an Ap das Bild eines rechten Winkels pAn, ſo muß hier An rechter Hand des Hauptaugenpuncts auf den 50ſten Grad der Gränzlinie zulaufen; auch iſt nun BAn das Bild eines rechten Winkels, davon der eine Schenkel AB vertical, der andre An horizontal iſt. Wird hiernächſt nA bis an die Grundlinie in G verlängert, ſo iſt TGA das Bild eines Winkels von 140°, und BAn iſt eine auf dem Horizont ſenkrechte Ebene, welche die Tafel in der graden auf CT ſenkrechten Linie GH, gegen die Ebene des Auges zu, unter einem Winkel von 140° ſchneidet, auf der von dieſer Ebene abwärts liegenden Seite aber unter einem Winkel AGC von 40°, oder überhaupt unter einem Winkel $= 90° - \eta$. Ihre Gränzlinie PQ läuft durch n mit GH parallel, und n iſt ihr Augenpunct, On der Abſtand des Auges von dieſem Augenpunct: und wenn die Linie Rn von GH in τ geſchnitten wird, ſo iſt ein Perpendicul von τ auf On herabgelaſſen die Höhe des Auges über der Ebene BAGn. Um mehrerer Deutlichkeit willen iſt nB bis an die Grundlinie GH in L verlängert, ſo ſtellet GABL das Bild eines

Recht-

Rechtecks vor, das auf dem Horizont und auf der Ebene CABK zugleich ſenkrecht iſt. Noch trage man nO von n nach α, und beſchreibe aus dem Mittelpunct α mit dieſem Halbmeſſer $\alpha n = D \sec \eta$ einen Halb-Kreis, ſo läſt ſich auch die Gränzlinie PQ gehörig eintheilen.

Nun ſey AM eine von AB verſchiedene grade Linie in der Ebene BAGn, ſo iſt MAn ein ſchiefer, und hier in der Zeichnung insbeſondre ein ſpitzer Winkel; AC ſteht auf der Ebene BAGn mithin auch auf AM ſenkrecht, alſo iſt MAn der Neigungswinkel der Ebene MAC gegen den Horizont, weil CAn und CAM rechte Winkel ſind. Wie groß dieſer Winkel ſey, zeigt die Scale auf der Gränzlinie PQ. Es iſt dies der Winkel ϑ, und wenn derſelbe z. E. $= 30°$ ſeyn ſoll, ſo muß AM auf den 30ſten Grad zulaufen. Eben dieſen Vereinigungspunct m haben die Bilder aller in der Ebene BAGn mit AM parallele Linien 89 §. mithin läuft jede andre Linie, die nur mit AM parallel iſt, wie CN in der Ebene MAC iſt, gleichfalls in den Vereinigungspunct m; (75 §.) und daraus folgt, daß m in der Gränzlinie der Ebene CAMN liege, durch M ſey MN mit AC parallel, ſo muß MN auf p zu laufen, weil p der Vereinigungspunct aller mit AC und BK parallelen Linien iſt: mithin liegt auch p in der Gränzlinie der Ebene CAMN. Dieſemnach ziehe man durch p und m eine grade Linie, ſo iſt ſie die der Ebene CAMN zugehörige Gränzlinie, und CD mit pm parallel gezogen iſt die Grundlinie. Man hat alſo nun den Abweichungswinkel TCD der Grundlinie CD von der Grundlinie des Horizonts, der im 85 §. φ hies, durch Zeichnung gefunden. Von R laſſe man nach

Rr

Rr auf die Gränzlinie *pm* ſenkrecht fallen, ſo iſt *r* der Augenpunct für CAMN, ferner ſetze man Rω = RO = D, auf R*r* ſenkrecht, und ziehe *r*ω, ſo iſt ωr, der Abſtand des Auges vom Augenpunct *r*, und ωrR der Neigungswinkel der Ebene CAMN gegen die Tafel, der im 85 §. = ψ geſetzt war. Noch verlängere man *r*R bis an die Grundlinie in *t*, und laſſe von *t* auf *r*ω eine ſenkrechte Linie fallen, ſo iſt dieſe die Höhe des Auges über CAMN; und wenn man endlich $r\omega q = 90°$ macht, ſo iſt der Durchſchnittspunct *q* mit *rt* der Vereinigungspunct aller auf CAMN ſenkrecht ſtehender Linien.

Aus dieſen Schlüſſen fließt folgende leichte und kurze Auflöſung. Man mache TC*p* dem Winkel η perſpectiviſch gleich, ſo iſt ſchon *p* ein Punct in der geſuchten Gränzlinie. Weiter zähle man 90° von *p* nach *n* ziehe PQ durch *n* auf der Gränzlinie des Horizonts ſenkrecht, mache $nx = n$O, und theile PQ für dieſen Halbmeſſer gehörig ein, *n* für den Augenpunct genommen. Endlich zähle man von *n* nach *m* ſo viele Grade, als der Neigungswinkel ϑ faſſen ſoll, ſo iſt *m* ein zweyter Punct der geſuchten Gränzlinie, da dann das übrige wie vorhin gefunden wird. Wenn ϑ = MA*n* ſtumpf wäre, ſo müſte man von *n* gegen Q zu ſo viele Grade zählen, als ſeine Ergänzung zu 180° faſſet, und man würde auf eben die Art den zweyten Punct der Gränzlinie finden.

Von eben dieſer Aufgabe findet man im 85 §. eine trigonometriſche Auflöſung: in Fällen, wo es nicht darauf ankommt, die Winkel φ und ψ ſehr genau zu kennen, kann allemahl dieſe perſpectiviſche Auflöſung ſtatt der trigonometriſchen dienen. Wer in-

indeſſen trigonometriſche Rechnungen nicht ſcheuet, wird die trigonometriſche Auflöſung vortheilhaft brauchen können, die Zeichnung und Eintheilung der Scale PQ zu erſparen. Weil allemahl der Punct p ſehr leicht gefunden iſt, ſo kann man, ſtatt m zu ſuchen, den Winkel TCD $= \varphi$ trigonometriſch berechnen; alsdenn iſt nur nöthig, durch p mit CD eine Parallele zu ziehen, ſo hat man die Grundlinie und Gränzlinie, da ſich denn das übrige von ſelbſt ergiebt.

113. §.

Wenn man im 85 §. annimmt, daß die Tafel gegen den Horizont ſchon unter dem Winkel γ geneigt ſey; ſo hat man im körperlichen Dreyeck, deſ-
62 F. ſen Spitze C iſt, ſtatt des rechten Winkels an CT den Winkel $180° - \gamma$. Aus der Seite η, und den anliegenden Winkeln $180° - \gamma$ und ϑ, findet man nun $\tang \varphi = \frac{\sin\vartheta \sin\eta}{\cos\vartheta \sin\gamma - \sin\vartheta \cos\gamma \cos\eta}$, (553 §. G.) und $\cos\psi = \sin\vartheta \sin\gamma \cos\eta + \cos\vartheta \cos\gamma$. (552 §. G.) Aus dieſen Formuln werden die im 85 §. mitgetheilten, wenn $\gamma = 90°$ angenommen wird.

Steht die Ebene AB auf dem Horizont ſenkrecht, ſo iſt $\vartheta = 90°$, alſo hat man $\tang\varphi = - \frac{\sin\eta}{\cos\gamma \cos\eta} = - \frac{\tang\eta}{\cos\gamma}$, (da dann TCD ſtumpf wird, und der ſpitze Winkel, der dieſen zu $180°$ ergänzt, oberhalb CT fällt,) und $\cos\psi = \sin\gamma \cos\eta$.

Wenn

Wenn $\vartheta = 0$, mithin AB mit dem Horizont YZ parallel iſt, ſo hat man $\tang \varphi = 0$, und $\cos \psi = \cos \gamma$. Alsdenn iſt CD # CT, und die Entfernung beyder Grundlinien CD und CT von einander findet man leicht, aus der Entfernung der Ebene AB von YZ. Iſt dieſe $= \delta$, ſo wird jene $= \delta \operatorname{coſec} \gamma$.

In dem Fall $\eta = 90°$ hat man $\tang \varphi = \frac{\tang \vartheta}{\sin \gamma}$, und $\cos \psi = \cos \vartheta \cos \gamma$. In dem Fall $\eta = 0$ aber, wenn AC und TC parallel werden, iſt auch $\tang \varphi = 0$, und CD mit T parallel, aber $\cos \psi = \cos(\gamma - \vartheta)$, und $\psi = \gamma - \vartheta$, wie auch für ſich erhellet. Iſt nun die Entfernung der Linie AF von $CT = \delta$, die Entfernung der Linie CD von CT aber $= d$; ſo hat man $\frac{\delta}{\sin \psi} = \frac{d}{\sin \vartheta}$, alſo $d = \frac{\sin \vartheta}{\sin \psi} \cdot \delta = \frac{\sin \vartheta}{\sin(\gamma - \vartheta)} \cdot \delta$. Eben dieſe Aufgabe läſt ſich nun auch durch perſpectiviſche Zeichnung auflöſen.

114. §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, wie 67 F. im 111 §. nur mit dem Unterſcheid, daß die Tafel gegen den Horizont unter dem Winkel γ geneigt ſey: man ſoll die Gränzlinie der gegen den Horizont unter dem Winkel ϑ geneigten Ebene ihren Neigungswinkel gegen die Tafel, die Höhe des Auges über derſelben, und ihren Augenpunct durch Zeichnung auf der Tafel finden.

Aufl.

Aufl. 1.) Es ſey R der Hauptaugenpunct, e aber der Augenpunct des gegen die Tafel unter dem Winkel γ geneigten Horizonts, ſo iſt $Re = D \cot \gamma$, und wenn $RO = D$ auf Re ſenkrecht ſteht, ſo iſt $ReO = \gamma$. Ferner ſey $eOk = 90°$, ſo iſt k der Vereinigungspunct der Bilder aller auf dem Horizont ſenkrechter Linien.

Man zeichne nun zuerſt an die gegebene Linie $\Theta C = f$ das Bild ΘCA des gegebenen Winkels η, den ich hier $= 50°$ annehmen will, ſo läuft CA nach p auf den 40ſten Grad der Gränzlinie zu, und dies iſt zugleich der Vereinigungspunct der Bilder aller mit CA parallelen Linien, und zwar nicht allein derjenigen, die in der Ebene ΘCA liegen, (89 §.) ſondern auch aller übrigen. (75 §.) Soll nun der Winkel $\vartheta = 90°$ ſeyn, ſo ſoll die zu entwerfende Ebene auf dem Horizont über der graden Linie, wovon CA das Bild iſt, ſenkrecht ſeyn. Nimmt man zuerſt dieſe Vorausſetzung an, und richtet aus A das Bild AB einer lothrechten Linie über dem Horizont auf, ſo liegt AB in der lothrechten Ebene, und das Bild läuft auf den Vereinigungspunct k zu. Ziehet man durch B mit AC die Parallele BK, ſo läuft das Bild in p, und wenn man durch I noch eine lothrechte Linie über dem Horizont aufrichtet, ſo läuft das Bild IK in k. Demnach liegen p und k in der Gränzlinie der lothrechten Ebene ABKI. In dem Fall $\vartheta = 90°$ ziehe man alſo durch p und k die grade Linie EF, ſo iſt ſie die Gränzlinie, und $C\delta$ mit EF parallel gezogen iſt die Grundlinie für die Ebene ABKI. Auf EF falle $R\varepsilon$ ſenkrecht, ſo iſt ε der Augenpunct, $R\varepsilon$ nach $C\delta$ in ϑ verlängert giebt den Fußpunct des Auges, $Ro = RO = D$ auf $R\varepsilon$ ſenk=

ſenkrecht geſetzt giebt den Abſtand $o\varepsilon$ des Auges von ε und den Winkel $R\varepsilon o$ als den Neigungswinkel gegen die Tafel aus ϑ aber auf $o\varepsilon$ eine ſenkrechte Linie herabgelaſſen giebt die Höhe des Auges über ABKI. Ihr Neigungswinkel $R\varepsilon o$, unter welchem ſie die Tafel in $C\delta$ ſchneidet, wird auch dem 113 §. gemäß aus Betrachtung des körperlichen Dreyecks gefunden, deſſen Seitenflächen $ACG = \eta$, $AC\delta$, $GC\delta$ ſind, und man hat auſſer dem rechten Winkel an AC, und η nach den Winkel an $GC = \gamma$, mithin $\operatorname{coſ} R\varepsilon o = \operatorname{ſin}\gamma \operatorname{coſ}\eta$, und eben ſo $\operatorname{tang} GC\delta = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{coſ}\gamma}$. Es wird alſo $\operatorname{ſin} R\varepsilon o = \surd(1 - \operatorname{ſin}\gamma^2 \operatorname{coſ}\eta^2)$, und $\operatorname{coſec.} R\varepsilon o = \frac{1}{\surd(1 - \operatorname{ſin}\gamma^2 \operatorname{coſ}\eta^2)}$, mithin der Halbmeſſer $O\varepsilon = \frac{D}{\surd(1 - \operatorname{ſin}\gamma^2 \operatorname{coſ}\eta^2)}$.

II.) Nun zeichne man an Ap das Bild eines rechten Winkels pAn, ſo fällt n in den 50ſten Grad der Gränzlinie, und wenn nA die Grundlinie des Horizonts in G trift, ſo ſind AB, Gn Bilder von Linien in einer andern auf dem Horizont lothrechten Ebene, welche die vorige ABKI ſenkrecht in AB ſchneidet; das Bild jeder durch einen Punct B in AB mit An parallelen Linie läuft in n, (89. 75. §.) und das Bild jeder durch einen Punct G in An mit AB parallelen Linie läuft in k; (75. 104. §.) alſo liegen n und k in der Gränzlinie der auf dem Horizont lothrechten Ebene AGLB. Man ziehe alſo durch k und n die grade Linie PQ, ſo iſt PQ die Gränzlinie für die Ebene AGLB, und GH durch G mit PQ parallel gezogen ihre Grundlinie. Aus R falle $R\varrho$ auf PQ

ſenkrecht, ſo iſt ϱ der Augenpunct, $R\Omega = RO$ ſetze man auf $R\varrho$ ſenkrecht, ſo iſt $\Omega\varrho$ der Abſtand des Auges von dieſem Augenpunct. Dieſen trage man aus ϱ in α, beſchreibe mit dem Halbmeſſer $\alpha\varrho$ aus dem Mittelpunct α einen Kreis, und theile vermittelſt deſſelben die Gränzlinie PQ in dem Verhältniß der Tangenten gehörig ein, ſo werden zwiſchen den Schenkeln des Winkels nAk zuſammen 90 Grade auf der eingetheilten Gränzlinie liegen müſſen, wenn richtig gezeichnet iſt, weil nAk und nAB Bilder von rechten Winkeln ſind. Hier ſind es 49 von ϱ bis k und 41 von ϱ bis n zuſammen 90 Grade. Noch iſt $R\varrho\Omega$ der Neigungswinkel dieſer Ebene AGLB, unter welchen ſie die Tafel in GH ſchneidet. Derſelbe wird aus Betrachtung des körperlichen Dreyecks, deſſen Seitenflächen $AGC = 90° - \eta$, AGH, und HGC ſind, dem 113 §. gemäß gefunden, und man hat auſſer $AGC = 90° - \eta$ und dem rechten Winkel an AG noch den Winkel an $GC = \gamma$: mithin iſt $\operatorname{coſ} R\varrho\Omega = \operatorname{ſin}\gamma \operatorname{ſin}\eta$, und $\operatorname{tang} CGH = \frac{\cot\eta}{\cot\gamma}$. Es wird alſo $\operatorname{ſin} R\varrho\Omega = \sqrt{(1 - \operatorname{ſin}\gamma^2 \operatorname{ſin}\eta^2)}$, und $\operatorname{coſec} R\varrho\Omega = \frac{1}{\sqrt{(1 - \operatorname{ſin}\gamma^2 \operatorname{ſin}\eta^2)}}$, mithin der Halbmeſſer $\Omega\varrho = \alpha\varrho = \frac{D}{\sqrt{(1 - \operatorname{ſin}\gamma^2 \operatorname{ſin}\eta^2)}}$.

Nun ſey AM das Bild einer von AB verſchiedenen graden Linie in der Ebene ABn, ſo iſt MAn der Neigungswinkel der Ebene AMNI gegen den Horizont, weil AI auf AB und AM ſenkrecht iſt. Auf

Auf der eingetheilten Gränzlinie PQ ergiebt ſich nun ſogleich das Maaß dieſes Winkels, wenn AM bis an dieſe Gränzlinie in m verlängert wird, denn man darf nur zählen, wie viele Grade zwiſchen n und m liegen, welches hier 19 Grade ſind, weil n in den 41ſten und m in den 60ſten Grad fällt. Dieſemnach kann auch dieſer Winkel nAM, welches der Winkel ϑ iſt, von jeder verlangten Gröſſe gezeichnet werden, wenn man von n bis m ſo viele Grade zählt, als ϑ enthalten ſoll, und Am ziehet. Fielen von n nach P zu nicht ſo viele Grade, ſo müſte man von n nach Q zu ſo viele Grade zählen, als der Winkel $180° - \vartheta$ faſſet, dies würde die Stelle m geben, worauf nun AM rückwärts durch A verlängert zu liefe. Das Bild IN einer jeden durch einen Punct I in AC mit AM parallelen Linie läuft in m, (89. 75 §.) und das Bild MN einer jeden durch einen Punct M der Linie AM mit AC parallelen Linie läuft in p; demnach liegen p und m in der Gränzlinie der Ebene AMNI, CD mit mp parallel gezogen iſt die Grundlinie, und wenn durch R auf beyde rt ſenkrecht geſetzt wird, ſo iſt rt die Linie des Auges, r der Augenpunct, t der Fußpunct. Noch werde Rω auf rt ſenkrecht gezogen, ſo hat man nun $\Theta CD = \phi$, $\omega r R = \psi$, ωr iſt der Abſtand des Auges vom Augenpunct, ein Perpendicul von t auf ωr die Höhe des Auges; noch wird $r\omega q = 90°$ gemacht, ſo giebt der Durchſchnitt mit rt in q den Vereinigungspunct der Bilder aller auf AMNI ſenkrechter Linien.

Aus dieſen Schlüſſen fließt wiederum folgende leichte Auflöſung. Man zeichne das Bild ΘCp des Winkels η, ſo liegt ſchon p in der geſuchten Gränzlinie, und wenn $\vartheta = 90°$ ſeyn ſoll, ſo iſt k ebenfalls

in dieſer Gränzlinie, da dann das übrige leicht gefunden wird; ſoll aber ϑ ein ſchiefer Winkel ſeyn, ſo zähle man auf der gegebenen Gränzlinie 90° von p nach r, ziehe nk, ſo iſt nk die Gränzlinie einer Ebene, welche auf dem Horizont, und zugleich auf Cp ſenkrecht iſt. Auf ſelbige ziehe man $R\varrho$ ſenkrecht, ſo iſt ϱ der Augenpunct dieſer Ebene, und wenn $R\Omega = D$ auf $R\varrho$ ſenkrecht geſetzt wird, ſo iſt $\Omega\varrho$ der Abſtand des Auges von ϱ. Dieſen trägt man aus ϱ in α, und theilt für dieſen Halbmeſſer die Gränzlinie nk gehörig ein. So viele Grade nun ϑ faſſen ſoll, ſo viele zählt man von n bis m, ſo iſt m der zweyte Punct der geſuchten Gränzlinie pm: wenn auf der Seite von n, wo P liegt, nicht ſo viele Grade ſind, ſo zählt man $180 - \vartheta$ Grade von n gegen Q und findet ſo den Punct m. Hat man die Gränzlinie pm, ſo wird das übrige wie vorhin gefunden. Der Unterſcheid dieſer Auflöſung von der im 112 §. gegebenen beſtehet nur darin, daß hier die beyden Gränzlinien der beyden ſenkrechten Ebenen ABKI, und AGLB in k zuſammen laufen im 112 §. aber parallel ſind. Jene Aufgabe iſt nur ein beſondrer Fall von dieſer, weil daſelbſt k unendlich weit entfernt iſt.

Weil der eine Punct p ſehr leicht gefunden wird, ſo kann man hier wie im 112 §. der übrigen Zeichnung und Eintheilung der Gränzlinie PQ überhoben ſeyn, wenn man φ nach dem 113 §. durch Rechnung ſucht. Dadurch findet man die Lage der Linie CD, und kann durch p damit eine Parallele ziehen, ſo iſt die Gränzlinie pm gefunden. Uebrigens leitet die Auflöſung der beyden Aufgaben des 112. und 114 §. noch auf einige merkwürdige Folgen,

gen, die auch unter andern um deswillen angemerkt zu werden verdienen, weil ſie zugleich dienen können, ſich von der Richtigkeit der Zeichnung zu verſichern.

115. §.

Wenn über C*p* eine Ebene CABK über dem Horizont ſenkrecht ſteht, ſo liegt der Vereinigungspunct aller auf ihr ſenkrechten Linien in der Gränzlinie *pn* des Horizonts um 90° von *p* entfernt. 66 67 F.

Beweis. Für den Fall der verticalſtehenden Tafel (66 Fig.) fällt die Richtigkeit dieſes Satzes ſogleich von ſelbſt in die Augen: denn die Linie des Auges der Ebene CABK fällt mit der Gränzlinie des Horizonts zuſammen, und der erwehnte Vereinigungspunct liegt da, wo eine grade Linie durch O auf O*p* ſenkrecht geſetzt *p*R ſchneidet, welches hier nothwendig in *n* erfolgt um 90° von *p* entfernt. Daß dies allemahl auch in dem Fall der geneigten Tafel (67 Fig.) richtig ſey, erhellet ſo. Jede auf CABK ſenkrechte Linie liegt in einer mit dem Horizont parallelen Ebene, und dieſe haben einerley Gränzlinie 73. 92. §. Demnach muß der Vereinigungspunct aller auf CABK ſenkrechten Linien in *pn* liegen. Solche Linien ſind nun A*n*, I*n*, und *p*A*n* *p*I*n* ſind Bilder von rechten Winkeln, alſo müſſen A*n*, I*n*, ſich in einem Punct *n* vereinigen, der von *p* 90° weit abſtehet.

Wenn alſo durch *o* auf *o*ε eine ſenkrechte Linie gezogen wird, ſo muß ſie durch *n* laufen, und durch eben den Punct muß auch εR gehen. (106 §.)

Um demnach die Gränzlinie einer Ebene zu finden, welche den Horizont in C*p* ſenkrecht ſchneidet, zähle man von *p* nach *n* 90 Grade, ziehe *n*R, und laſſe von *p* darauf eine ſenkrechte Linie *pε* fallen, ſo iſt das die Gränzlinie, und *ε* der Augenpunct. Man ſiehet wohl, daß dieſe Methode in ſolchen Fällen bequem iſt, wenn der Punct *k* durch welchen vermöge des 114 §. die Gränzlinie durchgehet, ſehr weit unter O hinaus liegt.

116. §.

66 Wenn eine Ebene AGLB auf dem Hori-
67 F. zont und zugleich auf C*p* ſenkrecht iſt; ſo iſt *p* der Vereinigungspunct aller auf ihr ſenkrechten Linien.

Beweis. In dem Fall der vertical ſtehenden Tafel (66 Fig.) iſt dies wieder ſogleich für ſich klar. Ueberhaupt aber erhellet, wie vorhin, daß jede dieſer ſenkrechten Linien in einer mit dem Horizont parallelen Ebene liege, daß alle dieſe Ebenen einerley Gränzlinie haben, daß mithin der erwehnte Vereinigungspunct in *pn* liege. Weil nun die Durchſchnittslinie G*n* mit dem Horizont auf C*p* ſenkrecht iſt, ſo muß *n*A*p* das Bild eines rechten Winkels, mithin *p* um 90° von *n* entfernt ſeyn, und dieſer Punct *p* iſt der Vereinigungspunct ſelbſt, weil alle Bilder der auf AGBL ſenkrechten Linien durch einerley Punct der Gränzlinie laufen.

Wird alſo (67 Fig.) auf $\varrho\Omega$ durch Ω eine ſenkrechte Linie geſetzt, ſo muß ſie durch *p* laufen, und durch eben den Punct muß auch ϱR gehen. (106 §.)

Um alſo die Gränzlinie für die Neigungs-Ebene einer ſolchen Ebene zu finden, welche den Horizont in C*p* unter einem ſchiefen Winkel ſchneidet, zählt man von *p* nach *n* 90 Grade, zieht durch *p* und R eine grade Linie, und läſt auf *p*R aus *n* die ſenkrechte Linie *n*ϱ fallen, ſo iſt das die Gränzlinie und ϱ der Augenpunct.

117. §.

Wenn die Ebene CAMN den Horizont unter dem ſchiefen Winkel ϑ in der graden Linie C*p* ſchneidet; ſo liegt der Vereinigungspunct *q* der Bilder aller auf CAMN ſenkrechten Linien in der Gränzlinie PQ ihrer Neigungs-Ebene, um 90° von demjenigen Punct *m* entfernt, worin die Gränzlinie der Ebene CAMN und die Gränzlinie ihrer Neigungs-Ebene einander ſchneiden.

Beweis. Alle dieſe ſenkrechten Linien ſind mit der Neigungsebene BA*n* parallel, und liegen in Ebenen, die mit BA*n* parallel ſind, alſo haben ſie mit ihr einerley Gränzlinie PQ. In der Ebene BA*n* richte man AS über AM ſenkrecht auf, ſo iſt AS eine von den auf CAMN ſenkrechten Linien, und AS muß auf einen Punct *q* der Gränzlinie PQ zu laufen, der von *m*, worauf AM zuläuft, um 90° abſtehet. Auf eben dieſen Punct müſſen die Bilder aller auf CAMN ſenkrechten Linien zulaufen, alſo iſt *q* der Vereinigungspunct. 66 67 F.

Wenn demnach durch ω auf *r*ω eine ſenkrechte Linie geſetzt wird, ſo muß ſie durch *q* laufen, und durch eben den Punct *q* läuft auch *r*R.

Um alſo die Lage der Gränzlinie für die gegen den Horizont geneigte Ebene zu finden, deren Durchſchnittslinie mit dem Horizont Cp iſt, ſuche man die Gränzlinie PQ ihrer Neigungs-Ebene, (116 §.) theile ſie gehörig ein, und wenn ſich die Ebene gegen P zu unter dem Winkel ϑ neiget, ſo zähle man von n rückwärts nach q $90 - \vartheta$ Grade, ziehe durch q und R eine grade Linie, und laſſe von p darauf eine ſenkrechte Linie pr fallen, ſo iſt das die Gränzlinie, und r der Augenpunct. Wenn der Punct m, durch welchen vermöge des 114 §. die Gränzlinie durchgehet, ſehr weit nach P hinaus liegt, ſo findet man auf dieſe Art durch ein bequemeres Mittel die Gränzlinie der geneigten Ebene.

118 §.

66 Weil allgemeine Vorſchriften durch Anwen-
67 F. dungen auf beſondre Fälle das beſte Licht erhalten; ſo wird es nicht undienlich ſeyn, nunmehro noch zu zeigen, wie ſich die allgemeinen Auflöſungen der Aufgaben des 112. und 114 §. auf die vornehmſten dahin gehörigen beſondern Fälle anwenden laſſen. Im 114 §. ſoll man aus den Winkeln η, ϑ, und γ die Winkel φ und ψ finden, und der 112 §. enthält nur den beſondern Fall, wenn $\gamma = 90°$ iſt. Uebrigens mag γ ein rechter oder ein ſchiefer Winkel ſeyn, ſo gehören hieher vornemlich folgende drey Fälle. Der erſte, wenn $\vartheta = 0$, der zweyte, wenn $\eta = 0$, der dritte, wenn $\eta = 90°$ iſt.

Der erſte von dieſen dreyen Fällen hat die wenigſte Schwierigkeit. Iſt $\vartheta = 0$, ſo ſoll die neue Ebene mit dem Horizont der Linie CV parallel ſeyn. Dem-

Demnach hat ſie mit dieſem Horizont einerley Gränzlinie und Augenpunct, die Tafel mag vertical ſtehen, oder geneigt ſeyn. (92. 73. §.) Statt des Winkels η muß die Entfernung δ beyder Ebenen von einander gegeben ſeyn, und man muß wiſſen, ob die neue horizontale Ebene oberhalb oder unterhalb des Horizonts durch CV liegt. Auf der verti- 69 F.
calſtehenden Tafel nimmt man alsdenn $TZ = \delta$ und zieht durch Z eine Linie mit CV parallel, ſo iſt dies die Grundlinie des um den Abſtand δ höher liegenden Horizonts und RS bleibt die Gränzlinie. Man müſte TZ unterhalb T nehmen, wenn der neue Horizont niedriger als CV läge.

Auf der geneigten Tafel iſt der Abſtand beyder 70 F.
Grundlinien $= \delta \operatorname{coſec} \gamma$: demnach mache man $V\Theta W = \gamma$, $\Theta W = \delta$, und ſetze durch W auf ΘW eine grade Linie ſenkrecht; welche Θe in Z ſchneidet, ſo iſt ΘZ der geſuchte Abſtand, und die geſuchte Grundlinie läuft durch Z mit CV parallel. Man ſetzt $V\Theta W$ unten an ΘV, wenn der neue Horizont niedriger als CV liegt.

119. §.

Wenn in der 66 Fig. $GCA = \eta$ abnimmt, ſo rückt *p* von R weiter weg, *n* aber rückt gegen R zu. Man kann ſich nemlich vorſtellen, AC drehe ſich um A, wie erfordert wird, wenn ACT abnehmen ſoll, und CAG bleibe allemahl das Bild eines rechten Winkels, ſo drehet ſich AG zugleich mit um A, und G rückt von T weg, *n* aber gegen R, die ganze Linie PQ rückt gegen RT, und *mp* drehet ſich um *m*, ſo daß der Winkel *nmp* wächſt. Wird nun

TCA $= \eta = 0$, ſo wird Ap mit der Grundlinie CV und Gränzlinie Rπ parallel, p rückt von R unendlich weit weg, und n fällt in R, AGT wird das Bild eines rechten Winkels, mithin AG nunmehro die Entfernung der beyden Parallelen AC und TC; und auſſer der Beſtimmung $\eta = 0$ muß nun dieſe Entfernung AG $= \delta$ der Parallelen AC und TC von einander noch gegeben ſeyn. Dieſemnach ſteht die Ebene ABLG des Neigungswinkels ϑ nun auf der Tafel ſenkrecht, ihre Gränzlinie PQ fällt mit der Linie des Auges RT zuſammen, und ihr Augenpunct iſt mit dem Hauptaugenpunct einerley.

69 F. Um nun die Ebene AMNC, deren Neigungswinkel $= \vartheta$ iſt zu zeichnen, bemerke man noch, daß ihre Gränzlinie mp mit der Gränzlinie des Horizonts parallel wird, daß alſo m und r, ſo wie n und R zuſammen fallen. Der Halbmeſſer On für die Gränzlinie PQ $=$ D ſec η wird alſo $=$ D $=$ OR. Demnach theile man dieſe Gränzlinie PQ der Ebene des Neigungswinkels ϑ für den Halbmeſſer RO $=$ D gehörig ein, zähle von R nach r ſo viele Grade, als der Winkel ϑ faſſen ſoll, und ziehe durch r eine Parallele rp mit der Gränzlinie des Horizonts, ſo hat man die Gränzlinie der Ebene AMNI. Wenn ferner der durch AG abgebildete Abſtand Ga der Parallelen AC und TC $= \delta$ geſetzt wird, ſo iſt der Abſtand beyder Grundlinien T$t = \delta$ tang ϑ. (85 §.) Demnach nehme man TW $= \delta$, TW$t = \vartheta$, ſo erhält man T$t = \delta$ tang ϑ, und die Grundlinie CD läuft durch t mit TV parallel.

Zu bemerken iſt noch, daß der Winkel ϑ hier ſpitz, nemlich von 30 Graden angenommen, und ſeine

ſeine hohle Seite vom Auge abgekehrt ſey. Wenn derſelbe ſeine hohle Seite dem Auge zukehren ſollte, ſo müſte man die Grade dieſes Winkels von R rückwärts nach μ zählen, und durch μ die Gränzlinie ziehen. Auch würde nun ihre Grundlinie oberhalb der Grundlinie des Horizonts liegen. Man müſte alſo $TW\tau = \vartheta$ machen, und die Grundlinie durch τ ziehen.

Wäre $\vartheta = 90°$, ſo würde ſich r von R und t von T unendlich weit entfernen: das hieſſe, die Ebene hat weder eine Gränzlinie noch Grundlinie, und eben das iſt der Natur der Sache völlig gemäß, weil nun die Ebene, wie ABKI, mit der Tafel parallel iſt. (92 §.)

Dieſe Schlüſſe wendet man nunmehro auch leicht in der 67 Figur auf den Fall der unter dem Winkel γ gegen den Horizont geneigten Tafel an. Man ſtelle ſich auch hier vor, die Linie CA werde um A ſo gedrehet, daß der Winkel GCA abnehme, AG aber bleibe beſtändig auf AC ſenkrecht: ſo rückt p von e weg, und n rückt gegen e zu; auch rückt G von Θ weg, km drehet ſich um k gegen ke zu, und kmp wird gröſſer. Wird endlich $\Theta CA = 0$, ſo rückt p von e unendlich weit weg, n fällt in e, km fällt mit ke zuſammen, und die Gränzlinie mp der Ebene AMNI wird mit der Gränzlinie np des Horizonts parallel, auch fallen m und r zuſammen. Weiter wird ΘGA das Bild eines rechten Winkels, und AG die perſpectiviſche Entfernung der Parallelen AC und ΘC von einander, die Ebene ABLG des Neigungs-Winkels ϑ wird zugleich die Ebene des Neigungswinkels γ der Tafel gegen den Horizont, ihre

Gränz-

Gränzlinie PQ fällt mit der Linie des Auges *e*O zuſammen, und ſteht nebſt ihrer Grundlinie GH auf der Grundlinie der Tafel CV ſenkrecht, ihr Augenpunct ϱ fällt mit dem Hauptaugenpunct R zuſammen, (wie auch daher erhellet, weil ſie auf der Tafel ſenkrecht iſt) und der zu ihrer Gränzlinie gehörige Halbmeſſer $\varrho O = \varrho\alpha$ wird $= R\Omega =$

70 F. $\frac{D}{\sqrt{(1 - \sin\gamma^2 \sin\eta^2)}}$ (114 §.) $= D$. Man ziehe alſo $Ro = D$ auf *e*O ſenkrecht, und theile für dieſen Halbmeſſer die Gränzlinie PQ der Neigungsebenen AGLB gehörig ein, zähle von *n* nach *m* (oder *e* nach *r*) ſo viele Grade, als der Winkel ϑ faſſen ſoll; ſo läuft die Gränzlinie *rp* der geneigten Ebene AMNI durch *r* mit der Gränzlinie *ep* des Horizonts parallel. Wenn ferner der durch GA abgebildete Abſtand der Parallelen AC und $TC = \delta$ geſetzt wird, ſo iſt der Abſtand beyder Grundlinien $\Theta t = \frac{\delta \sin\vartheta}{\sin(\gamma - \vartheta)}$. (113 §.) Man mache alſo den Winkel $R\Theta W = \gamma$, $\Theta W = \delta$, $\Theta W t = \vartheta$, ſo wird $\Theta t W = \gamma - \vartheta$, und $\Theta t = \frac{\delta \sin\vartheta}{\sin(\gamma - \vartheta)}$, mithin läuft die Grundlinie *t*D durch *t* mit der Grundlinie des Horizonts parallel.

Der Winkel ϑ iſt hier wiederum ſpitz von 28 Graden angenommen, und ſeine hohle Seite iſt vom Auge abgekehrt. Sollte er ſeine hohle Seite dem Auge zukehren, ſo müſte man die Grade dieſes Winkels von *n* nach R zu bis μ zählen, und durch μ die Gränzlinie ziehen. Die Durchſchnittslinie mit dem Ho-

Horizont liegt alsdenn wiederum in der Entfernung $\frac{\delta \sin \vartheta}{\sin(\gamma - \vartheta)}$ oberhalb ⊖C, denn ϑ iſt nun negativ: man zeichnet alſo nur den Winkel ϑ von der andern Seite von ⊖W. Auch fällt t oberhalb ⊖, wenn $\vartheta > \gamma$ iſt.

Wäre $\vartheta = \gamma$, ſo wäre AMNI mit der Tafel parallel, alsdenn würde r von e und t von ⊖ unendlich weit entfernt ſeyn, und es würde weder eine Gränzlinie noch Grundlinie geben, wie der Natur der Sache gemäß iſt. (92 §.) Iſt endlich $\vartheta = 90°$, (γ ſpitz angenommen) ſo läuft die Gränzlinie durch k, und die Grundlinie iſt von CV um den Abſtand $-\delta \sec \gamma$ entfernt. Sie liegt alſo oberhalb CV.

120. §.

Es iſt noch der beſondre Fall zu betrachten übrig, wenn $\eta = 90°$ wird, und zwar zuerſt auf der vertical ſtehenden Tafel in der 66 Fig. Man nehme an, AC drehe ſich umgekehrt ſo, daß TCA wachſe und GAC bleibe allemahl ein rechter Winkel, ſo rückt p gegen R und G gegen V, n aber entfernt ſich von R, und der Halbmeſſer nO $= n\alpha =$ D $\sec \eta$ wird gröſſer, daher auch nm wächſt. Wenn nun $\eta = 90°$ wird, ſo fällt p in R, G rückt von C unendlich weit weg, oder AG wird mit CV parallel. Eben ſo rückt auch n von R und m von n unendlich weit weg, und nO $= n\alpha$ wird unendlich groß. Demnach geht die Gränzlinie pm nun durch den Hauptaugenpunct R, und dieſer iſt zugleich der Augenpunct der geneigten Ebene. Der zweyte Punct m kann zur Beſtimmung der Lage dieſer Gränzlinie nicht weiter gebraucht

wer-

werden, ſo wie überhaupt die Gränzlinie PQ der Neigungsebene unendlich weit wegrückt, und dies
71 F. alles iſt der Natur der Sache gemäß. Denn die Neigungsebene ABLG wird mit der Tafel parallel, ſie hat alſo keine Gränzlinie. Die geneigte Ebene AMNC kommt auf der Tafel ſenkrecht zu ſtehen, weil AC darauf ſenkrecht iſt, oder ihr Neigungswinkel ψ gegen die Tafel iſt $=90°$, ihre Grundlinie CD ſchneidet die Grundlinie des Horizonts unter dem Winkel ϑ, weil auch die Tafel ſelbſt ihre Neigungsebene iſt, und mit dieſer Grundlinie kann man die Gränzlinie durch R parallel ziehen. (Man ver-
71 F. gleiche hiemit den 73. u. 79 §.) Demnach hat es keine Schwierigkeit, wenn AC in den Augenpunct läuft, über AC eine Ebene zu ſetzen, die den Horizont unter einem gegebenen Winkel ϑ ſchneidet. Wenn AC in C an die Grundlinie VX des Horizonts ſtößt, ſo mache man $XCN=\vartheta$, ſo iſt NCD die Grundlinie der geneigten Ebene, und ihre Gränzlinie wird durch R mit NCD parallel gezogen.

Wie ſich in der 67 Fig. alles ändre, wenn $\eta=90°$ wird, läſt ſich nun ebenfalls leicht überſehen. Es drehe ſich wiederum AC um A ſo, daß ΘCA wachſe, doch bleibe $GAC=90°$, ſo wird ſich AG mit um A drehen, und es wird AG $\#$ CΘ, wenn $\eta=90°$ wird: alsdenn iſt CA die Entfernung dieſer beyden Parallelen, die ich nun $=\delta$ annehme. Zugleich rückt *p* nach *e*, und *n* entfernt ſich von *e* über alle Gränzen. Demnach drehet ſich zugleich PQ um *k*, ſo wie *kp*: in dem Fall $\eta=90°$, fällt *kp* mit *ke* zuſammen, aber *kn* oder QP wird mit *pn* oder CΘ parallel, ε fällt in R, und ϱ in *k*. Die durch *k* mit der Grundlinie des Horizonts parallel laufende

Gränz-

Gränzlinie der Neigungsebene wird alſo für den Halb- 73 F.
meſſer $kO = k\alpha = \frac{D}{\surd(1 - \sin\gamma^2 \sin\eta^2)} = D\sec\gamma$
gehörig eingetheilt: die Grundlinie GH läuft eben-
falls mit der Grundlinie des Horizonts C⊖ in der
Entfernung $-\delta\sec\gamma$ parallel.

Um alſo die Ebene AMNI, deren Neigungs-
winkel ϑ iſt, zu zeichnen, zählt man von k nach m
ſo viele Grade, als der Winkel $90° - \vartheta$ faſſet, (es
iſt nemlich n unendlich weit entfernt, zwiſchen n und
m aber müſſen ſo viele Grade fallen, als der Winkel
ϑ faſſet,) alsdenn iſt em die Gränzlinie der Ebene
AMNI, und ihre Grundlinie CD wird durch C da-
mit parallel gezogen. Hiebey wird vorausgeſetzt,
daß des Winkels ϑ hohle Seite rechter Hand von
AC liegen ſolle. Im Fall ſie linker Hand liegen
ſollte, müſte man von k gegen die rechte nach μ zu
$90° - \vartheta$ Grade zählen, und ſo würde die Gränzli-
nie durch e und μ gehen.

Die allgemeinen Auflöſungen der Aufgaben
des 112. und 114 §. werden nunmehro durch die
bisherigen umſtändlichern Betrachtungen darüber
hoffentlich ihr völliges Licht erhalten haben: es kön-
nen aber auch eben die Aufgaben umgekehrt vorkom-
men, ſo daß aus der bekannten Lage einer Ebene ge-
gen die Tafel ihre Lage gegen den Horizont geſucht
wird, den die Tafel entweder unter einen rechten oder
ſchiefen Winkel ſchneidet. Zur Auflöſung dieſer
umgekehrten Aufgaben wird die folgende als eine
Vorbereitungsaufgabe dienen.

121 §.

66 In der Linie des Auges hat man den
67 F. Hauptaugenpunct R, den Augenpunct r einer gegen die Tafel geneigten Ebene, den Vereinigungspunct q aller auf der geneigten Ebene ſenkrechten Linien, und den Fußpunct des Auges t: man ſucht den Abſtand des Auges vom Hauptaugenpunct, die Höhe des Auges über der geneigten Ebene, und den Neigungswinkel der Ebene gegen die Tafel.

Aufl. Es iſt $Rr = D \cot\psi$, und $Rq = D \tang\psi$. (103 §.) Daraus findet man $D = Rr . \tang\psi = \frac{Rq}{\tang\psi}$, mithin $\tang\psi = \sqrt{\frac{Rq}{Rr}}$ und $D = Rr\sqrt{\frac{Rq}{Rr}} = \sqrt{Rr . Rq}$. Weiter iſt die Höhe des Auges $a = tr . \sin\psi$, (87 §.) und aus $\cot\psi^2 = \frac{Rr}{Rq}$ hat man $\operatorname{coſec}\psi^2 = \frac{rq}{Rq}$, alſo $\sin\psi^2 = \frac{Rq}{rq}$, und man findet $a = tr . \sqrt{\frac{Rq}{rq}}$.

Durch Zeichnung findet man eben das, wenn man über rq einen Halbkreis beſchreibt, und aus R über rq eine ſenkrechte Linie ſetzt, die den Halbkreis in ω trift: alsdenn iſt $R\omega$ der Abſtand des Auges, und $Rr\omega$ der Neigungswinkel: eine ſenkrechte Linie aus t auf $r\omega$ aber giebt die Höhe des Auges über der geneigten Ebene.

122. §.

Es bleiben dieſelben gegebenen Stücke, 66 F. wie im vor. §. auſſerdem ſey noch die Lage der graden Linie CT gegeben, worin eine horizontale Ebene die verticalſtehende Tafel ſchneidet: man ſucht die Lage der geneigten Ebene gegen dieſen Horizont und die dazu gehörige Ebene des Auges, nebſt der Höhe des Auges über demſelben.

Aufl. Weil ψ nach der vorigen Aufgabe gefunden wird, und nun auch der Winkel $tCT = \phi$ bekannt iſt, ſo kann man $TCA = \eta$ und den Neigungswinkel ϑ an CA nach dem 85 §. finden. Es iſt nemlich $\tang \eta = \tang \psi \sin \phi$, und $\cos \vartheta = \sin \psi \cos \phi$. Der Abſtand $CT = h$ der Ebene des Auges für dieſen Horizont, und die Höhe des Auges $RT = \alpha$ über demſelben läſt ſich aus den Gleichungen $Ct = h \cos \phi - \alpha \sin \phi$, und $tR = h \sin \phi + \alpha \cos \phi$ (91 §.) finden. Es ſey $Ct = f$, $tR = g$, ſo hat man $f \cos \phi = h \cos \phi^2 - \alpha \sin \phi \cos \phi$, ſo wie $g \sin \phi = h \sin \phi^2 + \alpha \cos \phi \sin \phi$, und das giebt $h = f \cos \phi + g \sin \phi$. Weiter wird $-f \sin \phi = -h \sin \phi \cos \phi + \alpha \sin \phi^2$ und $g \cos \phi = h \sin \phi \cos \phi + \alpha \cos \phi^2$, alſo wird $\alpha = g \cos \phi - f \sin \phi$.

Durch Zeichnung findet man eben daſſelbe auf folgende Art. Aus R wird auf CT eine lothrechte Linie RT herab gelaſſen, ſo hat man ſchon $CT = h$, $RT = \alpha$. Weil nun D aus dem vor. §. gefunden wird, ſo nehme man $RO = D$, ziehe durch R die Gränzlinie des Horizonts mit CT parallel, und theile ſie gehörig in Grade. Sie wird die Gränzlinie pm der geneigten Ebene, irgendwo in p ſchneiden, und

ſo viele Grade von R bis p fallen, ſo groß iſt die Ergänzung von η zu 90°, alſo hat man η. Von p nach n zähle man 90 Grade, ziehe PQ durch n auf der Gränzlinie des Horizonts ſenkrecht, nehme $n\alpha = nO$, und theile für dieſen Halbmeſſer PQ in Grade. Wenn nun PQ und rt einander in q ſchneiden, ſo giebt die Zahl der Grade von n bis q die Ergänzung des Neigungswinkels ϑ zu 90°, alſo hat man auch ϑ ſelbſt gefunden.

123 §.

67 F. Es bleiben noch dieſelben gegebenen Stücke, wie im 121 §; überdem aber ſey nun die Lage der graden Linie C⊖ gegeben, worin eine andre Ebene die Tafel unter dem bekannten Winkel γ ſchneidet: man ſucht die Lage der Ebene, wozu die Gränzlinie pm und die Grundlinie CD gehören, gegen die Ebene, welche die Tafel unter dem Winkel γ in C⊖ ſchneidet, nebſt der Höhe des Auges über dieſer Ebene.

62 F. Aufl. Weil wiederum ψ, nach der Aufgabe des 121 §. gefunden wird, und überdem der Winkel $tC\Theta = \varphi$ bekannt iſt, ſo hat man im körperlichen Dreyeck, deſſen Spitze C iſt, die Seitenfläche $tC\Theta = \varphi$ nebſt den anliegenden Winkeln an $C\Theta = 180° - \gamma$, und an $CD = \psi$, daraus läſt ſich die Seite $\Theta CA = \eta$ mit dem dritten Winkel an $CA = \vartheta$ finden. Man erhält $\tang \eta = \frac{\sin\psi \sin\varphi}{\cos\psi \sin\gamma - \sin\psi \cos\gamma \cos\varphi}$ (553 §. G.) und $\cos\vartheta = \sin\psi \sin\gamma \cos\varphi + \cos\psi \cos\gamma$. (552 §. G.)

Wenn

Wenn man nun $Ct=f$, $tR=g$, $C\Theta=h$, und $R\Theta=k$ annimmt, ſo iſt das hier k, was im vor. §. α war, alſo hat man $h=f\cos\varphi+g\sin\varphi$, und $k=g\cos\varphi-f\sin\varphi$. Die Höhe des Auges über die unter dem Winkel γ gegen die Tafel geneigten Ebene iſt alsdenn $=\Theta e\sin\psi$; und weil $\Theta e=k+D\cot\psi$, ſo wird dieſe Höhe des Auges $=k\sin\psi+D\cos\psi$.

Will man eben daſſelbe durch Zeichnung finden, 67 F.
ſo verhält man ſich dabey auf eine ähnliche Art, wie bey der Aufgabe des vor. §. Aus R wird auf $C\Theta$ die ſenkrechte Linie $R\Theta$ herab gelaſſen, ſo hat man $C\Theta=h$, $R\Theta=k$. Weil nun D aus dem 118 §. gefunden wird, ſo nehme man $RO=D$ auf $R\Theta$ ſenkrecht, ſetze an RO den Winkel $ROe=90^\circ-\gamma$, und $ROk=\gamma$, ſo hat man den Augenpunct e und den Vereinigungspunct k aller auf dieſer geneigten Ebene lothrechten Linien: eine lothrechte Linie aus Θ auf eO giebt die Höhe des Auges. Weiter nehme man $ec=eO$, und theile die durch e laufende Gränzlinie für den Halbmeſſer ce gehörig ein. Sie wird die Gränzlinie pm in p ſchneiden, und die Zahl der Grade von e bis p von 90° abgezogen geben den Winkel η. Noch zähle man von p nach n 90 Grade, ziehe nk, und $R\varrho$ darauf ſenkrecht, (oder wenn k zu weit entlegen wäre, ziehe man pR, und laſſe $n\varrho$ darauf ſenkrecht fallen) nehme $R\Omega=D$ auf $R\varrho$ ſenkrecht, und theile nk für den Halbmeſſer $\Omega\varrho=\alpha\varrho$ in Grade ein. Wenn alsdenn nk und rt einander in q ſchneiden, ſo ziehe man die Zahl der Grade von n bis q von 90 Graden ab, ſo hat man den Winkel ϑ.

124. §.

74 F. Die Diagonallinie BG eines **Würfels** BCDEFGHI ſteht auf der horizontalen Grundfläche ſenkrecht: man ſoll das Bild dieſes Würfels auf der vertical ſtehenden Tafel zeichnen.

Aufl. Drey Seitenflächen des Würfels werden unten an der Spitze B in der horizontalen Grundfläche ein körperliches Dreyeck einſchlieſſen, wovon jeder Winkel und jede Seitenfläche 90° beträgt. Von dieſen dreyen Seitenflächen ſey BCDE diejenige, welche dem Auge zugekehrt iſt, und dieſe betrachte man, als die Grundfläche des Würfels. Die Ebene dieſer Grundfläche ſchneidet den horizontalen Boden in einer graden Linie Ap, die durch B läuft, und wenn der Winkel TAB$=\eta$ bekannt iſt, imgleichen der Neigungswinkel ϑ der Ebene BCDE gegen den Horizont, ſo iſt die Lage des Quadrats BCDE bekannt, wenn man überdem noch die Gröſſe des Winkels ABC kennet. Hiernächſt läſt ſich leicht das Bild des Quadrats BCDE zeichnen: und weil die mit CF parallelen Seitenlinien des Würfels auf dieſer Grundfläche BCDE ſenkrecht ſind; ſo hat alsdenn die Zeichnung des Würfels ſelbſt auch weiter keine Schwierigkeit.

Um ABC zu finden, erwäge man folgendes. Aus D ſey Dd auf den horizontalen Boden lothrecht herabgelaſſen, und BD, Bd gezogen, ſo iſt DBd der Neigungswinkel ϑ. Denn die Ebene BGDd iſt vertical, und zugleich auf BCDE ſenkrecht, weil DG darauf ſenkrecht iſt. (315 §. G.) Mithin iſt ABD $=90°$, aber DBC$=45°$, alſo auch ABC$=45°$.

Der

Der Neigungswinkel $DB\vartheta = \vartheta$ wird ſo gefunden. Es ſey die Seitenlinie des Würfels $BC = DG = a$, ſo iſt die Diagonale der Grundfläche $BD = a\sqrt{2}$, und die Diagonale des Würfels $BG = \sqrt{(BD^2 + DG^2)} = a\sqrt{3}$. Das giebt $\tang DBG = \cot\vartheta = \frac{DG}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $\tang\vartheta = \sqrt{2} = 1{,}4142135$, folglich $\vartheta = 54^\circ\, 44'\, 8\tfrac{1}{2}''$. Dieſer Neigungswinkel iſt durch die Aufgabe beſtimmt, weil BG vertical ſtehen ſoll. Wenn ſich aber der Würfel um BG drehet, ſo ändert ſich die Lage der Linien BA und Bd, demnach muß auch noch beſtimmt ſeyn, unter welchem Winkel entweder BA oder Bd die Grundlinie ſchneiden ſoll, da dann allemahl $dBA = 90^\circ$ iſt. Die Stelle B worüber der Würfel ſtehen ſoll, kann durch $TA = f$, $TAB = \eta$, und AB, oder auch durch die ſenkrechten Entfernungen δ und Δ des Puncts B von der Tafel und der Ebene des Auges gegeben ſeyn.

Es ſey alſo $\eta = 30^\circ$, ſo muß AB in den 60ſten Grad der Horizontallinie laufen, und n fällt auf der andern Seite von R in den 30ſten Grad, wenn man von p nach n 90 Grade zählt. Durch n wird die Gränzlinie PQ der Neigungsebene DBd auf Rn ſenkrecht gezogen, und für den Halbmeſſer $On = n\alpha$ gehörig eingetheilt, oder welches hier zulänglich iſt, nur $n\alpha m = 54\tfrac{3}{4}^\circ$ gemacht, ſo kann man durch p und m die Gränzlinie für die Ebene der Grundfläche BCDE des Würfels ziehen. Auf dieſe zieht man rRq ſenkrecht, und Rw = RO mit ihr parallel, ſo iſt r der Augenpunct für die Ebene BCDE, und man theilt die Gränzlinie pm für den Halbmeſſer wr gehö-

hörig ein. Iſt nun richtig gezeichnet, ſo wird in dieſem Exempel $rp = r\omega$ ſeyn, mithin der 45ſte Grad der Gränzlinie in p fallen, und man hat keine weitere Eintheilung der Gränzlinie in dieſem Exempel nöthig, weil auf der andern Seite von r der 45ſte Grad in m fällt: nur macht man noch $r\omega q = 90°$, um den Vereinigungspunkt aller auf BCDE ſenkrechten Linien zu haben.

Nun ziehe man BE mit rp parallel, ſo iſt der Winkel pBE $= 45°$, und eben ſo BD auf der andern Seite von r in den 45ſten Grad nach m ſo iſt auch EBD $= 45°$. Weiter ziehe man BC in den Augenpunct r, ſo iſt DBC ſowohl als auch CBA $= 45°$. Nun werden BE und BC die Seitenlinien, BD aber die Diagonallinie der Grundfläche des Quadrats. Aus der bekannten Seitenlinie des Würfels $= a$ findet man leicht die Diagonallinie $= a\sqrt{3}$. Deswegen richte man aus B die Verticallinie BG $= \frac{D}{D+\delta} \cdot a\sqrt{3}$ auf, ſo giebt ſich alles übrige von ſelbſt. Man ziehe nemlich GD in den Vereinigungspunct Q, ſo iſt BD die Diagonale der Grundfläche. Weiter ziehe man DE in r und DC mit rm parallel, ſo iſt BCDE die Grundfläche. Noch ziehe man durch E und C Linien in q, durch G eine Linie in r, und eine andre mit rm parallel, ſo werden DEHG, und CDgF die dem Auge zugekehrten Seitenflächen des Würfels.

Daß in dieſem Beyſpiel der 45ſte Grad der Gränzlinie der Ebene BCDE auf der einen Seite in p, auf der andern in m fallen müſſe, läßt ſich ſo überſehen. Aus η und ϑ hat man dem 85 §. gemäß

cos ψ

$\cos\psi = \sin\vartheta \cos\eta$, und ψ iſt der Ebene BCDE Neigungswinkel gegen die Tafel. Nun war $\tan\vartheta = \sqrt{2}$, alſo iſt $\cot\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{cosec}\vartheta = \sqrt{\frac{3}{2}}$, und $\sin\vartheta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Weiter ward $\eta = 30°$ angenommen, alſo iſt $\sin\eta = \frac{1}{2}$, $\cos\eta = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $\tan\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot\eta = \sqrt{3}$, $\sec\eta = \sqrt{\frac{4}{3}}$. Das giebt $\cos\psi = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, alſo $\psi = 45°$, $\sin\psi = \frac{1}{2}$, $\tan\psi = \cot\psi = 1$, $\sec\psi = \operatorname{cosec}\psi = \sqrt{2}$, und man erhält $r\omega = D \operatorname{cosec}\psi = D\sqrt{2}$. Weiter iſt $Rr = D\cot\psi = D$, $Rp = D\cot\eta = D\sqrt{3}$, alſo $rp = \sqrt{(Rp^2 - Rr^2)} = D\sqrt{(3-1)} = D\sqrt{2}$, mithin $r\omega = rp$. Ferner hat man $Rn = D\tan\eta = D \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$, $nm = D\sec\eta \tan\vartheta = D \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{2}$, alſo $nm = D\sqrt{\frac{8}{3}}$, und das giebt $Rm = \sqrt{(Rn^2 + nm^2)} = D\sqrt{(\frac{1}{3} + \frac{8}{3})} = D\sqrt{3}$, mithin $Rp = Rm$. Weil nun Rr auf pm ſenkrecht iſt, ſo wird $rm = rp$. Uebrigens kann dies Beyſpiel zur Probe dienen, wie vorzüglich ſchon die bisher gelehrte Zeichnungs-Methode vermittelſt der Gränzlinien, und Vereinigungspuncte ſey, und wie weit ſie die gemeine Methode vermittelſt des Grundriſſes und der perſpectiviſchen Höhen hinter ſich zurück laſſe. Es wird nicht undienlich ſeyn, zu zeigen, wie man ſich bey Auflöſung eben dieſer Aufgabe nach der gemeinen Methode verhalte.

Man ſiehet leicht, wenn durch die verticalſtehende Diagonallinie des Würfels BG, und die Seitenlinien GD, GF, GH, Ebenen gelegt werden, daß ſelbige einander unter Winkeln von 120° ſchneiden: und wenn durch die Seitenlinien BC, BE, BI,

eben ſolche verticale Ebenen gelegt werden, ſo halbi- ren ſie die Winkel der vorigen, alle ſechs Ebenen ſchneiden einander unter Winkeln von 60°. Wenn alſo von den ſechs Eckpuncten C, D, E, F, H, I, auf die Grundfläche lothrechte Linien Cc, Dd, Ee, u. ſ. f. herabgelaſſen, und Bc, Bd, Be, u. ſ. f. gezo- gen werden, ſo werden die Winkel cBd, dBe, u. ſ. f. insgeſamt 60° groß. Die rechtwinklichten Drey- ecke BDG, BEG, haben gleiche Seitenlinien, nur in verkehrter Ordnung der Perpendiculär-Seiten, und es iſt BGE $=$ DBG $= 90° - \vartheta$, alſo auch EBe $= 90° - \vartheta$. Nun war $\tan \vartheta = \sqrt{2}$, alſo $\sin \vartheta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos \vartheta = \sqrt{\frac{1}{3}}$; und man erhält $Be = BE \sin \vartheta = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $Ee = BE \cos \vartheta = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, $Bd = BD \cos \vartheta = a\sqrt{2} . \sqrt{\frac{1}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, und $Dd = BD \sin \vartheta = a\sqrt{2} . \sqrt{\frac{2}{3}} = a\sqrt{\frac{4}{3}} = 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Demnach ſind die in B zuſammenlaufen- den Linien Bc, Bd, Be, u. ſ. f. gleich groß, wie man auch aus bloß Geometriſchen Gründen leicht über- ſehen kann, und die Puncte, wohin die Lothe aus den Ecken des Würfels fallen, ſind die Winkelpuncte eines regulären Sechsecks im Kreiſe, deſſen Halb- meſſer $= a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Die Höhen der Eckpuncte über der Grundfläche ſind wechſelsweiſe $a\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $2a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Um alſo die Scenographie des Würfels zu zeichnen, muß zuförderſt die Ichnographie des re- gulären Sechsecks gezeichnet werden, deſſen Seite $= a\sqrt{\frac{2}{3}}$; über den Winkelpuncten muß man wech- ſelsweiſe die perſpectiviſchen Höhen $\frac{D}{D+\delta} . a\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\frac{D}{D+\delta} . 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$ aufrichten, aus dem Mittel-

punct

punct B aber die Höhe $BG = \frac{D}{D+\delta} a\sqrt{3}$. Iſt dies geſchehen, ſo kann man die Seitenlinien des Würfels gehörig ziehen. Von den dreyen Puncten, die mit D gleich hoch liegen, müſſen drey Seitenlinien nach G zuſammen laufen, von den übrigen dreyen nur halb ſo hoch liegenden Puncten aber laufen drey Seitenlinien nach B: wenn man dies bemerkt, ſo wird man die übrigen Seitenlinien auch leicht in der rechten Lage ziehen, und alsdenn iſt es eine Probe von der Richtigkeit der Zeichnung, wenn CF, DG, EH, BI, in einerley Vereinigungspunct zuſammen laufen. Im erſten Theil der Käſtneriſchen Anfangsgründe im 37 §. der Perſpectiv wird eben dieſe Art, den Würfel in der angenommenen Stellung zu zeichnen vorgeſchrieben: die Zeichnung ſelbſt (11 Fig. der Perſp.) hat aber die eben angezeigte Eigenſchaft nicht, (in der erſten Ausgabe wenigſtens, die ich jetzt nur zur Hand habe,) welches von der Veränderlichkeit des Papiers wegen des Anfeuchtens beym Abdruck, oder auch daher rühren kann, weil es des Herrn Verf. Abſicht eben nicht geweſen iſt eine ganz genaue Zeichnung zu liefern. Dieſe Bemerkung hat keine andre Abſicht, als Liebhabern dieſer Wiſſenſchaft Anlaß zu geben, durch Vergleichung der Arbeiten mehrerer Verfaſſer ſich in Anwendung der Regeln dieſer Wiſſenſchaft deſto mehr zu üben.

Hr. Käſtner nimmt a. a. O. eben die Stellung des Würfels an, die ich hier angenommen habe, nur mit dem Unterſcheid, daß bey ihm die lothrechte Diagonale des Würfels in der Ebene des Au-

ges ſelbſt befindlich iſt. Um eins mit dem andern deſto beſſer zu vergleichen, bemerke man, daß hier in dem körperlichen Dreyeck, deſſen Seitenflächen ABc, ABC, CBc ſind, der Winkel an $Bc = 90°$, die Seite $CBc = 90° - \vartheta$, und die Hypothenuſe $ABC = 45°$ ſey. Aus dem 530 §. Geom. aber hat man $\cos ABC = \cos ABc \,.\, \cos CBc$, oder $\cos ABc = \frac{\cos ABC}{\cos CBc}$, und es iſt $\cos CBc = \sin\vartheta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos ABC = \cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, mithin $\cos ABc = \sqrt{\frac{3}{4}}$, und $\sin ABc = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, folglich $ABc = 30°$, demnach halbirt die lothrechte Ebene ABG den Winkel, welchen die Ebenen CGB, FGB, einſchlieſſen.

Wenn alſo Bb die Durchſchnittslinie der Seitenfläche BCFI mit der Grundfläche iſt, ſo halbirt Bb den Winkel cBd, ABb iſt $= 60°$ und $b\beta$ läuft in den Hauptaugenpunct R, d. i. Bb ſteht auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht. Um alſo den Würfel ſo zu zeichnen, wie in dem Käſtneriſchen Beyſpiel angenommen wird, nehme man B in β, in der Verticallinie des Auges, an, (iſt die Entfernung δ der verticalen Diagonale des Würfels von der Tafel vorgeſchrieben, ſo wird $T\beta = \frac{\delta}{D+\delta} \,.\, RT$ gemacht) ſo fällt nun bR in TR. Durch β ziehe man $a\beta$ in p, und mache nun die perſpectiviſchen Winkel $p\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$, $\delta\beta\gamma$, $\gamma\beta a$ auf eben die Art, wie vorhin vorgeſchrieben iſt, 45° groß; ſo müſſen $\delta\varepsilon$, $\gamma\beta$ in r, $\delta\beta$ in m, und $\delta\gamma$, $\beta\varepsilon$ mit der Gränzlinie pm parallel laufen. Bey der übrigen Zeichnung verhält man ſich völlig ſo, wie vorhin bey der Zeichnung des

Wür-

Würfels CEHF gewieſen iſt, und die Seitenlinien $\delta\eta$, $\varepsilon\vartheta$, $\gamma\zeta$, $\beta\iota$, müſſen in q zuſammen laufen.

Zur weitern Uebung in perſpectiviſchen Zeichnungen dieſer Art können auch die übrigen regulären Körper vorzüglich gute Beyſpiele abgeben, und wer ſich die geometriſche Theorie davon aus dem 591-595 §. Geom. bekannt gemacht hat, wird ſich nun dabey leicht ſelbſt helfen, auch die Vorſchriften, welche practiſche Schriftſteller zum Theil ohne Beweis vortragen, auf ihre Gründe zurück führen können.

Wenn jemanden Beyſpiele dieſer Art zuerſt noch etwas verwickelt ſcheinen mögten; ſo mache er den Anfang mit der Zeichnung allerley priſmatiſcher Körper, wobey die Grundfläche nicht allein horizontal, ſondern auch gegen den Horizont geneigt angenommen werden kann. Im 4ten Buch der Perſpectiv beym Deſchales im Mundo Mathem. Tom. II. finden ſich allerley hieher gehörige Fälle. Das Priſma ABCDHFIG (60 Fig.) oben im 82 §. lieſſe ſich, nachdem die Grundfläche gefunden worden, ſo zeichnen. Aus dem bekannten Neigungswinkel der Seitenfläche ADHG gegen die Grundfläche ſuche man die Gränzlinie dieſer Ebene, die durch Q laufen wird, und theile ſie gehörig in ihre Grade. Weil ferner die Gröſſe des Winkels DAG bekannt ſeyn muß, ſo zähle man die Anzahl der Grade dieſes Winkels in der gefundenen Gränzlinie über Q hinaus, ſo giebt ſich der Punct in welchen AG laufen muß, und dies iſt zugleich der Vereinigungspunct aller mit AG parallelen Seitenlinien. Nun kann man nach dem 100 §. der Linie AG ihre gehörige

Län-

Länge geben, und das übrige ſo, wie ſchon im 82 §. n. 2. die Anleitung gegeben iſt, bewerkſtelligen.

125. §.

68 F. Ein andres etwas vollſtändigeres Beyſpiel zur Erläuterung der bisher vorgetragenen allgemeinen Lehren wird die 68 Fig. auf der XX. Kupfertafel abgeben. Die halbe Giebelwand AB*ba* des Hauſes AC*da* liegt in der Ebene der Tafel, auf ihr wird alles nach dem auf der Grundlinie der Tafel AE gezeichneten geometriſchen Maasſtab entworfen, und die Tafel ſtehet auf dem Horizont ſenkrecht. Die Wand BC*cb* ſteht auf dem Horizont und der Tafel ſenkrecht, ihre Seitenlinien BC, *bc*, laufen in den Augenpunct R des Horizonts: in demſelben Augenpunct läuft auch die oberſte Dachlinie *ad*, weil ſie auf der Tafel ſenkrecht iſt, imgleichen die untern und obern horizontalen Fenſter-Rahmen. Die verticalen Fenſter-Rahmen, die Höhen A*a*, B*b*, C*c*, die verticalen Seiten-Linien der Schorſteine und Dachfenſter ſind auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht. Auch die Ebene des Dachs *abcd* iſt auf der Tafel ſenkrecht, mithin iſt R ihr Augenpunct, *ab* ihre Grundlinie. Figuren alſo, die auf der Ebene dieſes Dachs zu zeichnen vorkommen, werden leicht nach den Regeln des III. und IV. Abſchnitts entworfen.

Wenn alle Abmeſſungen des Hauſes als bekannt angenommen werden, ſo kann man ſich bey der Zeichnung ſelbſt auf folgende Art verhalten. Man ziehe die Grundlinie AE und theile ſie in gleiche Theile ein, die hier Fuſſe bedeuten ſollen. Den

Fuß-

Fußpunct des Auges T kann man auf derſelben zwar willkührlich annehmen, jedoch wird man von ſelbſt ermeſſen, daß es rathſam ſey, die Stelle des Auges ſo anzunehmen, wie erfordert wird, wenn die ſeitwärts liegenden Gegenſtände ſoviel thunlich deutlich ins Auge fallen ſollen. Ueber die geſchickte Wahl des Augenpuncts ſollen im folgenden Abſchnitt noch Unterſuchungen angeſtellet werden: hier kann die Stelle des Auges noch als gegeben betrachtet werden. Dieſemnach ſey TR die Linie des Auges, und das Auge ſtehe 18 Fuß hoch über dem Horizont; ſo muß TR 18 Fuß lang genommen werden, und R wird der Hauptaugenpunct ſeyn, durch welchen man die Gränzlinie VR des Horizonts mit AE parallel ziehet. Das Auge ſey 68 Fuß weit von der Tafel entfernt, alſo theile man die Gränzlinie RV auf beyden Seiten des Augenpuncts für den Halbmeſſer RV=68 Fuß gehörig ein. Die Ecke des Hauſes B ſey 50 Fuß von der Ebene des Auges entfernt, die halbe Breite BA ſey 14 Fuß. Aus B ziehe man BL in den Augenpunct, und wenn die Länge des Hauſes 36 Fuß betragen ſoll, ſo zähle man von B nach S 36 Fuß, und ziehe VS, welche BL in C ſchneidet, ſo iſt BC 36 vertiefte Fuß lang. Die Wand über BC ſey 30 Fuß hoch, das ganze Haus 50 Fuß hoch, demnach richte man aus B eine 20 Fuß hohe, aus A aber eine 50 Fuß hohe Verticallinie auf. Jene ſey B*b*, dieſe A*a*, ſo iſt *a* die Spitze des Giebels. Aus *a* und *b* ziehe man Linien in den Augenpunct, richte aus C eine Verticallinie auf, welche *b*R in *c* ſchneidet, und ziehe alsdenn *cd* mit *ba* parallel, ſo giebt ſich die Dachfläche *abcd*, und die Wand BC*cb*.

Weis

Weis man nun, wie hoch die horizontalen Fenſter-Rahmen, ſo wohl des Keller-Geſchoſſes, als auch der beyden darüber ſtehenden Stockwerke über dem Horizont erhaben ſind, ſo darf man nur alle dieſe Höhen auf B*b* von B nach *b* hinauf tragen. Weis man ferner die Breite der Fenſteröfnungen, und ihre Entfernungen von einander, ſo trägt man die Entfernungen und Breiten, für die Giebel-Wand von B nach A, für die vertiefte Wand von B nach S. Von den Theilungspuncten N, O, P, Q, u. ſ. f. Der letztern zieht man Linien in den Diſtanz-Punct des Auges V, ſo theilen dieſe BC in *n*, *o*, *p*, *q*, u. ſ. f. gehörig ein. Aus allen Theilungspuncten in BA und BC richtet man verticale Linien auf, durch die Theilungspuncte in B*b* aber ziehet man in der Giebelwand mit AB Parallel-Linien, in der vertieften Wand BC*cb* aber Linien in den Augenpunct, ſo geben ihre Durchſchnitte mit den Vertical-Linien die Winkelpuncte der Fenſter-Oefnungen. Wenn die horizontalen Fenſter-Rahmen nicht auf beyden Wänden gleich hoch über den Horizont lägen, ſo müſte man B*b* für jede Wand beſonders eintheilen.

Die Eckpuncte der Dachfenſter kann man auf mancherley Art finden, man bemerke nur, daß die Ebene $\alpha\beta\zeta\gamma\delta$ vertical iſt, und wenn $\zeta\varepsilon$ auf $\alpha\delta$ ſenkrecht fällt, daß $\alpha\eta$, $\varepsilon\vartheta$ mit *ab* und $\beta\eta$, $\zeta\vartheta$ mit dem Horizont, alſo mit deſſen Grundlinie und Gränzlinie parallel ſind. Um nun den Punct α zu finden, zähle man von B nach S ſo viele Schuhe, als die Entfernung des Puncts α von *ba* ausmachen, ziehe VS, ſo faſſet B*u* ſo viele vertiefte Schuhe, als man von B nach S genommen hat. Aus *u* richte man *uw* ſenkrecht auf, ſo iſt *bw* ſo lang, als B*u*. Durch W ziehe man

man mit ba eine Parallele, nehme von b nach λ ſo viele geometriſche Schuhe, als die Entfernung des Puncts α von bc ausmachen, und ziehe λR, ſo giebt ſich der Durchſchnittspunct α. Auf λR kann man nun auch noch die Vertiefungen $\lambda\varepsilon$, $\lambda\delta$, eben ſo finden, wie man $\lambda\alpha$ gefunden hat. Nun laſſe man λk auf die Grundlinie des Horizonts ſenkrecht herab, trage von λ nach ϱ ſo viele Fuſſe, als die Höhen $\alpha\beta$, $\delta\gamma$, faſſen, und von λ nach σ ſo viele als die Höhe $\varepsilon\zeta$ faſſet. Von ϱ und σ ziehe man Linien in den Augenpunct, und aus α, ε, δ, richte man verticale Linien auf, ſo hat man die Durchſchnittspuncte β, ζ, γ. Endlich zieht man durch β, ζ, Linien mit der Grundlinie parallel, welche die durch α, ε, mit ab parallel laufenden Linien in η und ϑ ſchneiden.

Die Zahl der Schuhe auf der Grundlinie von B bis k giebt den Abſtand der Ebene $\alpha\beta\zeta\gamma\delta$ von der Ebene BbcC; wenn alſo dieſer Abſtand bekannt iſt, ſo kann man ihn von B nach k tragen, aus k eine lothrechte Linie aufrichten, und ſo den Punct λ finden. Wie lang die Linien $\alpha\eta$, $\varepsilon\vartheta$, ſind, kann man auf ba von λ nach μ, und von λ bis ν meſſen, weil ba in der Tafel liegt: wenn alſo die Länge dieſer Linien bekannt iſt, ſo geben ſich auch die Puncte η, ϑ, wenn man μR und νR ziehet. Zieht man durch dieſe Puncte η, ϑ, Parallelen mit der Grundlinie, und richtet aus α, ε, lothrechte Linien auf, ſo geben ſich β, ζ; aus β zieht man eine Linie in den Augenpunct, und richtet $\delta\gamma$ lothrecht auf, ſo hat man auch γ.

Mit den Schorſteinen wird man nun ebenfalls leicht fertig werden. Die Puncte φ, χ, ψ, werden vermittelſt der in den Augenpunct laufenden Linien

nien τR, υR, eben ſo gefunden, wie vorhin die Puncte α, δ, η; von b trägt man nach τ und υ ſo viele Schuhe, als die Entfernung der Puncte φ und ψ von der Dachlinie bc ausmachen. Aus dem Punct τ wird eine Verticallinie $\tau\zeta$ aufgerichtet, ſo hoch als die vordere Schorſtein-Höhe φy ſeyn ſoll, hiernächſt ziehet man ζR, richtet aus φ und χ verticale Linien bis an ζR auf, aus ψ aber eine Verticallinie bis an eine durch y mit AB parallel laufende Linie. Eben ſo leicht zeichnet man die Kronen der Schorſteine, wovon die in die Tiefe laufenden Seitenlinien gegen den Augenpunct zu, die mit der Tafel parallelen Seitenlinien aber mit AB parallel gezogen werden.

126 §.

Von dem andern in der 68 Fig. gezeichneten Hauſe liegt nur die Ecklinie Ee in der Ebene der Tafel, die Wand EegG iſt aber gegen die Tafel unter einem Winkel von 60 Graden, mithin die Wand EefF gegen die Tafel unter einem Winkel von 30 Graden geneigt, weil beyde Wände auf einander ſenkrecht angenommen werden. Die Stelle E, wo das Haus an die Grundlinie der Tafel ſtößt, muß gegeben ſeyn, und hier iſt $\text{TE} = 45$ Fuß angenommen. Man ziehe nun EI in den 30ſten Grad, EF aber in den 60ſten Grad der Gränzlinie des Horizonts, auf der andern Seite des Augenpuncts, ſo iſt FEI das Bild eines rechten Winkels. Der Abſtand des Auges vom Vereinigungspunct υ iſt $= \text{D}.\text{coſec}.60° = \text{D}(\cot 60° + \tan 30°)$ (24 §.) $= \upsilon w$: alſo laufen die Geſichtslinien, welche zur Eintheilung des Schenkels EI dienen, in w zuſammen.

men. Die Seitenwand Eg ſey 43 Schuh lang; ſo trägt man von E nach X 43 Schuh, ziehet wX; welche EI in G ſchneidet, ſo iſt EG 43 Schuh lang. Eben ſo erhellet, daß der 15te Grad auf RV der Vereinigungspunct derjenigen Geſichtslinie ſey, welche EF einzutheilen dienen. Hier iſt EF 34 Schuh lang. Man ziehe Fv, und von G aus eine Linie in den 60ſten Grad auf Rw, ſo giebt ſich das Rechteck EGHF, als die Grundfläche von der Hälfte des Hauſes. Die Höhe des Hauſes bis ans Dach von 30 Fuß trage man von E nach e, und die ganze Höhe des Hauſes bis an die Spitze des Giebels aus E in Θ aus E, F, H, G, richte man verticale Linien auf, ziehe Θf in den 60ſten Grad der Gränzlinie, ſo hat man die Spitze f des Giebels. Aus e und f ziehe man Linien nach v, welche die Durchſchnittspuncte g und h mit den übrigen beyden Verticallinien geben, ſo hat man die vier Winkelpuncte der Dachfläche.

Die Fenſter-Oefnungen, Thüren, und was ſonſt auf den Wänden EegG und EefF zu zeichnen vorkommt, werden nun ſehr leicht entworfen. Wenn es nöthig wäre, könnte man durch v die Gränzlinie der Wand EegG ziehen, und gehörig eintheilen, und eben ſo durch den 60ſten Grad auf der andern Seite von R die Gränzlinie der Wand EefF. Weil aber hier nur Fenſter-Rahmen mit horizontalen und verticalen Seiten-Linien zu zeichnen vorkommen; ſo trägt man die Höhen aller Winkelpuncte über dem Horizont auf Ee auf, die Entfernungen dieſer Winkelpuncte von Ee für die Wand EegG von E nach T auf die Grundlinie, und für die Wand EefF von E nach Y. Durch die gefundenen Theilungspuncte

ziehet man die Geſichtslinien in w für die Wand EegG, und in y für die Wand EefF. Aus den Durchſchnittspuncten mit EG und EF richtet man verticale Linien auf, und durch die Theilungspuncte in Ee ziehet man ſowohl nach v als auch auf der andern Seite in den 60ſten Grad grade Linien, ſo geben ſich die Winkelpuncte aller Fenſter-Oefnungen.

Um Figuren, die in der Dachfläche liegen, zu zeichnen, könnte man ihre Gränzlinie ſo ſuchen, die Seitenlinien eg und fh des Rechtecks $efgh$ laufen in v zuſammen, alſo liegt v in der Gränzlinie der Dachfläche. Auch laufen gh und ef in einen Punct s zuſammen, (der über der Ebene des Papiers hier hinaus fällt) alſo liegt auch s in der Gränzlinie der Dachfläche, welches alſo vs ſeyn wird, und eZ mit vs parallel gezogen iſt die Grundlinie: Rr auf vs ſenkrecht geſetzt giebt den Augenpunct r, woraus alſo rs zu beyden Seiten gehörig eingetheilt werden könnte. Weil aber nur die Durchſchnittsfiguren der Dachfenſter und Schornſteine mit der Dachfläche zu zeichnen vorkommen, ſo kann man ohnedem auf folgende Art fertig werden. Es ſind $\alpha\beta$, $\varepsilon\zeta$, $\delta\gamma$, wie im vor. §. vertical, $\alpha\eta$, $\varepsilon\vartheta$, $\varphi\psi$ mit ef, ſo wie $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\varphi\chi$ mit eg parallel. Die Ebene $\alpha\beta\zeta\gamma\delta$ iſt vertical, und ſchneidet die Tafel unter einem Winkel von 60 Grad, weil ſie mit der Wand EegG parallel iſt: ihre Gränzlinie geht durch v und iſt auf der Gränzlinie des Horizonts ſenkrecht. Die Entfernung δ eben dieſer Ebene $\alpha\beta\zeta\gamma\delta$ von der Wand EegG iſt ebenfalls bekannt, wenn die Abmeſſungen des Hauſes bekannt ſind, alſo iſt die Entfernung E$k = \delta$. coſec. 60 ihrer Grundlinie $k\lambda$ von Ee ebenfalls bekannt.

Man

Man mache alſo Ek dieſer Entfernung gleich, richte $k\lambda$ über der Grundlinie des Horizonts ſenkrecht auf, ſo liegt ihr Durchſchnittspunct λ mit der Grundlinie eZ der Dachfläche in der lothrechten Ebene $\alpha\delta\gamma\zeta\beta$ und in der Dachfläche: wenn alſo $\lambda\upsilon$ gezogen wird, ſo liegen die Puncte α, ε, δ, in dieſer Linie. Um nun α zu finden, nehme man ſo viele Schuhe, als die Entfernung dieſes Puncts von ef ausmachen, von E bis S, ziehe wS, welche EG in u ſchneidet, ſo faßt Eu eben ſo viele vertiefte Schuhe. Aus u richte man uW lothrecht auf, ſo faſſet eW ſo viele Schuhe, als Eu. Aus W ziehe man eine Linie in den Vereinigungspunct s, ſo giebt ihr Durchſchnitt mit $\lambda\upsilon$ den Punct α. Eben ſo kann man ε und δ finden. Aus λ trägt man nach ϱ und σ ſo viele Schuhe, als die Höhen $\alpha\beta$, $\varepsilon\zeta$, ausmachen, ziehet $\varrho\upsilon$ und $\sigma\upsilon$, richtet hiernächſt aus α, ε, δ, lothrechte Linien auf, ſo hat man β, ζ, γ. Durch β und ζ ziehet man Linien, die in den 60ſten Grad, rechter Hand von R laufen, welche die von α und ε nach s laufenden Linien ſchneiden, ſo hat man η und ϑ.

Um die Schornſteine zu zeichnen, ſucht man die Puncte φ, χ, ψ eben ſo, wie vorhin die Puncte α, ε, δ, ſind geſucht worden, da dann die Entfernung der vordern und hintern Seitenfläche der Schornſteine von der Ebene EegG als bekannt angenommen, und übrigens auch leicht die Höhe φy gefunden wird, wenn man nur bemerkt, daß hier der Vereinigungspunct υ ſtatt des Augenpuncts R für die mit EG parallelen Linien gebraucht wird, der 60ſte Grad rechter Hand von R aber für die mit EF parallelen Linien.

127. §.

Auf der Horizontalfläche zwiſchen beyden Häuſern laſſen ſich nun noch allerley Gegenſtände, als Bäume, weiter entfernt liegende Häuſer, und dergleichen mehr zeichnen, deren Lage gegen einander und ihrer Entfernung gemäſſe perſpectiviſche Höhe, ſo wie auch ihre übrigen perſpectiviſchen Abmeſſungen leicht gefunden werden können. Eine nähere Anleitung zum völligen Ausmahlen der Figuren kann man hier nicht erwarten, weil daſſelbe eigentlich eine Sache des Zeichners und Mahlers iſt. Vom Schattiren wird die Geometriſche Theorie unten noch vorkommen. Damit die Figur wegen zu vieler durch einander laufender Linien nicht zu undeutlich werden mögte, iſt in dem Horizont der bisher betrachteten Zeichnung, auſſer einem Garten-Geländer bey jedem Hauſe, ſonſt nichts gezeichnet. Bey dieſen Geländern iſt nur zu bemerken, daß die Seitenlinie CL, DC in den Augenpunct R laufen, LM und *lm* aber mit der Grundlinie des Horizonts parallel ſind. Dagegen müſſen die Seitenlinien GI und *gi* in *v* zuſammen laufen, ſo wie IK und *ik* in den 60ſten Grad der Gränzlinie des Horizonts laufen müſſen.

128 §.

Weil man oft einerley Puncte in der perſpectiviſchen Zeichnung auf mehr als eine Art finden kann, ſo wählt man jedesmahl diejenige, welche nach Beſchaffenheit der übrigen Umſtände am vortheilhafteſten iſt. Auf der Seitenlinie BC des Hauſes AC*ca* hat man ſchon eine Menge von Durchſchnittspuncten

ten nöthig, um die Winkelpuncte der Fenſter-Rahmen zu finden: dazu kommen nachdem noch die Durchſchnittspuncte, welche man nöthig hat, um die Puncte α, ε, δ, zu finden. Damit man nun auf der einzigen Linie BC nicht ſo gar viele Durchſchnittspuncte bekomme, welches leicht zu Verwechſelung der Puncte Gelegenheit geben kann; ſo kann auch die Linie *k*R dienen, die Puncte α, ε, δ, zu finden. Aus *k* trägt man nach ω ſo viele Schuhe, als der Abſtand $\lambda\alpha$ faſſet, ziehet $v\omega$, ſo hat man den Durchſchnittspunct π; über demſelben richtet man eine lothrechte Linie auf, dieſe wird λR in α ſchneiden. Eben ſo laſſen ſich die übrigen Puncte finden, die in λR liegen.

Will man bey Zeichnung des Hauſes FG*gf* die Puncte α, ε, δ, eben ſo ſuchen, ſo muß man zuförderſt wiſſen, wie lang $\lambda\alpha$ ſey, da dieſe Linie hier gröſſer als *e*W iſt. Zu dem Ende ſuche man α ſo wie es im 126 §. gewieſen iſt, ziehe $\alpha\pi$ vertical herab, und hiernächſt $u\pi$, welche die Grundlinie in ω ſchneidet, ſo kann man von *k* nach ω zählen, wie viele Schuhe $k\pi$ oder $\lambda\alpha$ faſſe. Hier ſind es 14½ Fuß, und *e*W iſt 11 Fuß lang, alſo die Differenz 3½ Fuß. Wenn man nun die Entfernungen der Puncte ε, δ, von *ef* um dieſe 3½ Fuß vergröſſert, ſo kann man auf *kv* die lothrecht unter ihnen liegenden Puncte finden.

Der IX. Abſchnitt.

Regeln
zur geſchickten Wahl der Lage des Auges gegen die Tafel, und die darauf abzubildende Gegenſtände.

129. §.

Wenn gleich ein perſpectiviſches Gemählde bey jeder willkührlich angenommenen Lage und Entfernung des Auges in ſeiner Art völlig regelmäßig kann entworfen ſeyn; ſo iſt doch leicht zu erachten, daß die Wahl der für das Auge zu beſtimmenden Stelle an gewiſſe Regeln gebunden ſeyn müſſe, ſo bald es verlangt wird, daß alle Theile, die das Auge auf einmahl überſehen kann, ſo viel möglich deutlich und wohl proportionirt erſcheinen ſollen. Eine ganze Landſchaft kann von einem Berge oder von einem hohen Thurm herab weit beſſer überſehen werden, als wenn das Auge niedrig ſteht: alle darauf befindliche Gegenſtände erſcheinen dem auf der Anhöhe befindlichen Auge deutlicher und mehr aus einander geſetzt. Je weiter das Auge von den zu betrachtenden Gegenſtänden entfernt iſt, deſto kleiner erſcheinen ſie: auch ändert ſich ihre ſcheinbare Geſtalt ſobald ſie von einer andern Seite angeſehen werden. Wer weiß es nicht, daß einerley Sache

von

von der einen Seite betrachtet verzogen und unordentlich ausſehen, von einer andern Seite betrachtet aber weit ordentlicher und beſſer ins Auge fallen könne. Von mehrern hinter einander liegenden Sachen werden die hintern entweder ganz oder zum Theil durch die vordern bedeckt, und dem Anblick des Auges entzogen. Wenn es alſo bey einer perſpectiviſchen Zeichnung nicht gleichgültig iſt, welche Theile am meiſten und deutlichſten ins Auge fallen ſollen, ſo muß man einen ſolchen Geſichtspunct wählen, wobey dieſe Theile weder von andern bedeckt, noch wegen zu groſſer Entfernung vom Auge ſehr klein und undeutlich erſcheinen.

Hat man eine weit in die Ferne laufende horizontale Gegend zu zeichnen, ſo ſcheinen die entfernten Gegenſtände deſto mehr aus einander geſetzt, je höher das Auge ſtehet. Deswegen bildet man gewöhnlich die Gegend ſo ab, wie ſie dem Zuſchauer erſcheinen würde, wenn er ſie aus einem hoch liegenden Fenſter eines Gebäudes betrachtete, oder ſich doch ſonſt auf einer Anhöhe befände, und von derſelben die Gegend überſehen könnte.

130. §.

Es iſt nicht wohl möglich, der Regel des vor. §. jedesmahl in allen Stücken ein Genüge zu leiſten, weil doch allemahl einige Theile bedeckt, andre wegen ihrer Entfernung klein erſcheinen müſſen. Demnach muß man nur ſuchen, die davon abhängenden Mängel des Gemähldes möglichſt zu vermindern. Der Mahler, wenn er eine Landſchaft nach der Natur zeichnen will, begiebt ſich deswegen wohl auf

eine oder die andre in der Gegend befindliche Anhöhe, und ſucht auf ſolche Art den Ort aus, von welchen ſie am beſten überſehen werden kann. Dies läſt ſich indeſſen nicht allemahl thun, und deßwegen bleiben ſolche Regeln für die Wahl der Stelle des Auges, die aus den Gründen der Optik und Perſpectiv ſelbſt hergenommen ſind, allemahl ſehr nützlich. Zu dieſen Gründen gehört vornemlich die im 14 §. der Optik ſchon angemerkte Erfahrung, daß das Auge nur alle ſolche Gegenſtände auf einmahl deutlich überſehen kann, die nicht über 45 Grad von der Geſichtsaxe entfernt ſind. Weil es unnatürlich fallen würde mehr auf ein Gemählde zu bringen, als man auf einmahl deutlich überſehen kann, ſo ſetzt dieſer Umſtand dem Umfang des Gemähldes, und der Entfernung des Auges gewiſſe Gränzen. Man muß das Auge von der abzubildenden Sache ſo weit entfernt annehmen, daß ſie ganz innerhalb der Gränzen des deutlichen Sehens liege. Stellt man ſich vom Auge grade Linien nach den äuſſerſten Gränzen des Gemähldes gezogen vor, ſo muß keiner von den Winkeln, den ein Paar ſolche Linien einſchlieſſet mehr als 90° Grad faſſen; und wenn man annimmt, daß die Geſichtsaxe gegen die Mitte des Gemähldes gerichtet iſt, ſo muß keine von den Geſichtslinien, die man vom Auge bis an den äuſſern Umfang des Gemähldes ziehen kann mit der Geſichtsaxe einen Winkel machen, der mehr als 45° faſſet. Sobald demnach die ganze Ausdehnung des Gemähldes beſtimmt iſt, ſobald iſt auch die Entfernung des Auges in ſo weit beſtimmt, daß ſie nicht kleiner ſeyn muß, als die gröſte Entfernung der äuſſerſten Gränzen des Gemähldes vom Augenpunct.

Man

Man wird im 78. und 125 §. finden, daß daſelbſt die Entfernung des Auges dieſer Regel gemäß angenommen ſey.

131. §.

Es folgt aus dieſer Regel, daß die Höhe des Auges nie gröſſer als die Entfernung des Auges angenommen werden müſſe, damit die ſcheinbare Tiefe der unter der Horizontal-Linie liegenden Gegenſtände nie über 45 Grad betrage. Aus demſelben Grunde folgt, daß die Enfteruung des Auges niemahl kleiner als die gröſte Höhe der über dem Horizont des Auges befindlichen Gegenſtände über der Horizontallinie angenommen werden müſſe, damit auch dieſe nie höher als um 45° über der Horizontal-Linie erhaben erſcheinen. Weil die Tangenten ſolcher Winkel, die über 45° groß ſind, ſehr ſchnell wachſen, ſo fallen auch überdem die Bilder ſolcher Gegenſtände, die von der Geſichts-Axe um mehr als 45° Grad abweichen, zu ſehr aus einander gedehnt aus, als daß ſie natürlich zu ſeyn ſcheinen könnten, wofern das Auge nicht in dem wahren Geſichtspunct ſtehet. Dieſerwegen giebt es wenige Fälle, wo es erlaubt iſt, von der Regel abzuweichen. In ſolchen Fällen, wo die Abweichung von der angenommenen Regel zur Nothwendigkeit wird, würden diejenigen gehören, wenn oben an den hohen Wänden der Kirchen, oder andrer hoher Gebäude, Gemählde befindlich ſind, die nicht anders, als von unten hinauf betrachtet werden können. Uebrigens fließt noch aus eben den Gründen, daß auch die ſeitwärts des Auges liegenden Theile nicht über 45° von der Geſichtsaxe abweichen müſſen.

38 F. Es ſey AB eine horizontale Ebene, worauf die Tafel CD ſenkrecht ſteht, CE die Fundamentallinie, OSTR die Ebene des in O ſtehenden Auges, OS die Höhe, OR=ST die Entfernung des Auges, TC die halbe Grundlinie, oder wofern das Auge nicht in der Mitte gegen die Tafel ſteht, das längſte von den beyden Stücken, worin die Grundlinie von der Ebene des Auges getheilt wird. Wenn nun die Zeichnung nur eine im Horizont AB liegende ebene Figur vorſtellen ſoll; ſo wird in derſelben alles unter der Horizontallinie RH liegen, und die bisherigen Regeln erfordern, daß die Winkel ROT=OTS, imgleichen auch ROC nicht über 45° betragen. Demnach muß RO nicht allein gröſſer als RT oder OS, ſondern auch gröſſer, als RC ſeyn.

132. §.

Wofern nicht beſondre Gründe ein andres erfordern, ſo wird die Stelle des Auges gewöhnlich ſo angenommen, daß die Fundamentallinie von der Ebene des Auges halbirt wird, da dann TC die halbe Fundamental-Linie iſt. Zuweilen aber ſoll die eine Seite des Gegenſtandes mehr, als die andre ins Auge fallen, vornemlich bey aufrecht ſtehenden Flächen; ſo ſoll z. E. bey Zeichnung eines Zimmers die eine Wand, oder bey Zeichnung einer Gaſſe die eine Reihe Häuſer oft vorzüglich auseinander geſetzt erſcheinen: in Fällen dieſer Art nimmt man den Stand des Auges ſo an, daß die Seite, welche am meiſten aus einander geſetzt erſcheinen ſoll, von der Ebene des Auges weiter als die gegen überſtehende entfernt bleibt.

Alle

Alle Linien auf der Tafel, welche die Grundlinie CE ſenkrecht ſchneiden, wie Wg, ſind Bilder ſolcher Linien, die gegen den Fuß S des Zuſchauers laufen, (18 §. num. IV.) und gegen die Grundlinie ſich unter einem Winkel MWN neigen, deſſen Tangente $= \frac{D}{TW}$ iſt, und gegen die Ebene des Auges unter einem Winkel TSW, deſſen Tangente $= \frac{TW}{D}$. Iſt nun die Tafel zu beyden Seiten durch ſenkrechte Linien, wie PQ, *rs*, 43 Fig. begränzt, und man ſetzt $Ts = \Delta$, $TQ = \Delta$, ſo ſchneidet die durch *rs* abgebildete Linie die Ebene des Auges unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{\Delta}{D}$, die durch PQ abgebildete Linie aber unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{\Delta'}{D}$. Beyde dieſe Linien aber ſchneiden einander im Auge unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{\Delta + \Delta'}{D} : \left(1 - \frac{\Delta \cdot \Delta'}{D^2}\right) = \frac{(\Delta + \Delta')\, D}{D^2 - \Delta \cdot \Delta'}$. Dieſer Winkel heiſt bey einigen Schriftſtellern der Geſichtswinkel. Innerhalb ſeiner Schenkel liegen alle diejenigen Gegenſtände im Horizont, wovon die Abbildungen auf der Tafel zwiſchen den ſenkrechten Linien PQ und *rs* enthalten ſeyn können: er iſt die Gränze des horizontalen Feldes, ſo das Auge durch die Tafel auf einmahl überſehen kann. Wofern demnach nicht

nicht beſondre Gründe ein andres erfordern, ſo wird die Stelle des Auges ſo angenommen, daß die Ebene des Auges dieſen Geſichtswinkel halbirt.

133. §.

Wenn die vornehmſten Theile der auf der Tafel zu zeichnenden Gegenſtände Recktecke ſind, die entweder horizontal liegen, oder vertical ſtehen, wovon die perſpectiviſche Abbildung eines Zimmers, wie im 78 §. eines Hauſes, wie im 125 §. Beyſpiele ſind; ſo hat man gewöhnlich eben keine beſondre Gründe, eine ſchiefe Lage der Tafel gegen die Ebenen dieſer Rechtecke anzunehmen. Man ſtellt vielmehr die Tafel mit einer dieſer aufrecht ſtehenden Ebenen parallel, ſo haben nicht allein die horizontal liegenden Ebenen alle einerley Augenpunct und Gränzlinie, ſondern auch diejenigen von den vertical ſtehenden Ebenen, welche die Tafel ſenkrecht ſchneiden: für die letztern bleibt der Augenpunct mit dem vorigen einerley, und ihre Gränzlinie ſchneidet die Gränzlinie des Horizonts im Augenpunct ſenkrecht. Man hat gewöhnlich in Fällen dieſer Art nur einen Diſtanz-Punct nöthig, um die Grundlinien der verticalſtehenden Rechtecke, die wenn ſie auf der Tafel ſenkrecht ſind, in den Augenpunct laufen, gehörig einzutheilen. Sind mehrere Häuſer, oder andre Gegenſtände in die Zeichnung zu bringen, wie im 125-128. §. ſo nimmt man am bequemſten die Tafel mit der Seitenfläche eines dieſer Häuſer parallel an, wofern nicht ſonſt Gründe vorhanden ſind, die das Gegentheil verlangen.

134. §.

Um von den bisherigen Regeln noch eine Anwendung auf ein leichtes Beyſpiel zu machen, ſetze man, es ſey ein Garten ACEFDB perſpectiviſch zu zeichnen, der 80 Fuß breit, und 106 Fuß lang oder tief iſt: jedoch ſey nicht die ganze Fläche des Gartens horizontal, ſondern nur das vorderſte Stück ACDB bis auf eine Tiefe von 60 Fuß, das hintere 46 Fuß tiefe Stück CEFD ſey gegen den Horizont unter einem Winkel von 20 Grad geneigt. Beyde Stücke des Gartens ACDB, CEFD ſollen Rechtecke ſeyn.

Weil kein Grund vorhanden iſt, eine andre, als die verticale Stellung der Tafel anzunehmen, ſo behalte man die Vorausſetzung der verticalſtehenden Tafel bey: auf derſelben ſey AB die Grundlinie, T der Fußpunct des Auges. Dem 132 §. gemäß ſtelle man die Ebene des Auges ſo, daß ſie die Grundlinie halbirt, und trage 40 Fuß ſowohl von T nach A, als auch von T nach B, ſo iſt AB die Breite des Gartens. Das Auge ſtehe 45 Fuß hoch, damit die Vertiefungen deſto beſſer aus einander geſetzt erſcheinen, und es ſey daſſelbe 60 Fuß weit von der Tafel entfernt, um der Regel des 131. §. ein Genüge zu leiſten. Dieſen Vorausſetzungen gemäß wird alſo TR = 45 Fuß groß gemacht, und AR, BR gezogen. Auf der Horizontallinie durch R nimmt man die Entfernung des Auges RO = 60 Fuß, zählt auf der Grundlinie von A nach G 60 Fuß, ſo ſchneidet OG die horizontale Vertiefung AC von 60 Fuß ab für das vordere horizontal liegende Stück des Gartens ACDB.

Die Durchſchnittslinie CD der geneigten Ebene CEFD mit dem Horizont ſey mit der Grundlinie AB der Tafel parallel, ſo liegt ihr Augenpunct in RT, und ihre Gränzlinie iſt ebenfalls mit AB parallel. (88 §.) Der Neigungswinkel gegen den Horizont, welcher im §. ϑ hies, iſt hier 20°, und der Neigungswinkel ψ (85 §.) gegen die Tafel $= 90° - \vartheta = 70°$. Demnach ſetze man an RO den Winkel $ROr = 20°$ (119 §.) ſo wird r der Augenpunct für die geneigte Ebene CEFD, und man kann die auf CD ſenkrechten Linien CE, DF nach den Augenpunct r ziehen. Die durch r mit CD oder AB parallel gezogene Linie $r\omega$ iſt die Grenzlinie der ſchiefen Ebene CEFD. Die zu dieſer Gränzlinie gehörige Grundlinie HI kann man dem 119. §. gemäß finden, und man weis, daß ihre Entfernung Tt von $AB = \delta \cot \psi$ iſt, in dieſem Fall $\delta = 60$ Fuß und $\psi = 70°$ genommen. Hier kann man auch durch A auf AB eine ſenkrechte Linie ziehen, welche mit der verlängerten CE in H zuſammen ſtößt, ſo iſt H ein Punct in der Grundlinie HI, die man nun mit AB parallel ziehet. Denn es iſt $CR : CA = D : \delta = Rr : AH$, und $Rr = D \cot \psi$, alſo $D : \delta = D \cot \psi : AH$, folglich $AH = \delta \cot \psi$, wie erfordert wird. Dieſe Grundlinie HI theilt man mit AB nach einerley Maasſtab ein, trägt nun rO von r in ω, und ziehet ωD, bis zum Durchſchnitt K mit der Grundlinie HI. Hierauf zählt man von K nach L noch 46 Fuß, und ziehet ωL, ſo giebt ſich die Vertiefung DF von 46 Fuß. Statt deſſen könnte man auch CD in 80 gleiche Theile, als verkürzte Fuſſe theilen, von D nach δ 46 Fuſſe zählen, und $\omega\delta$ ziehen. (35. §.) Wird endlich EF mit CD parallel gezogen, ſo hat man

man

man den Umriß des Gartens. Wie übrigens die 2 Fuß dicke und 10 Fuß hohe Garten-Mauer gezeichnet ſey, iſt aus der Figur leicht abzunehmen: auch findet man eben ſo leicht die perſpectiviſche Eintheilung der Garten-Beete, wenn auf dem geometriſchen Grundriß des Gartens ihre Eintheilungen gegeben ſind.

135. §.

Bey kleinen Zeichnungen auf dem Papier muß man ſich des verjüngten Maaßes bedienen, und wenn alles dem Auge bey Betrachtung der Zeichnung recht natürlich erſcheinen ſoll, ſo muß man das Papier nicht allein in verticaler Stellung halten, ſondern auch daſſelbe vom Auge ſo weit weg rücken, als die angenommene Entfernung des Auges von der Tafel erfordert. Dabey tritt nun der Umſtand ein, daß unſer Auge nur in einer gewiſſen Entfernung kleine Gegenſtände deutlich ſehen kann, und dieſe Entfernung iſt nach der verſchiedenen Beſchaffenheit der Augen des Zuſchauers ebenfalls ſehr verſchieden; weil es weitſichtige und kurzſichtige Perſonen giebt, wovon jene, was ſie deutlich ſehen wollen, ziemlich weit vom Auge entfernen, dieſe ſehr nahe hinan bringen müſſen. Die Gränzen dieſer verſchiedenen Entfernungen eben derſelben Sache vom Auge, nachdem entweder der kurzſichtige, oder der weitſichtige alle Kleinigkeiten deutlich ſehen ſoll, fallen zwiſchen 4 bis 16 Zoll; auch wohl noch darüber bis auf 2 oder 3 Fuß bey recht weitſichtigen Perſonen, die ihr Auge vornemlich weit in die Ferne zu ſehen geübt haben, oder auch wegen der beſondern Structur ihrer Augen, welche die Dioptrik näher beſchreiben

wird,

wird, in der Nähe nicht deutlich ſehen können. Es muß demnach die bey der Zeichnung des Gemähldes angenommene Entfernung des Auges innerhalb dieſer Gränzen des deutlichen Sehens liegen, damit der Zuſchauer, wenn er ſein Auge in den wahren Geſichtspunct bringt, alle Theile des Gemähldes deutlich unterſcheiden kann. Ob nun gleich die verſchiedene Schärfe der Augen hiebey ein grosſes Hinderniß zu ſeyn ſcheinet, wenn verſchiedene Perſonen einerley Gemählde betrachten ſollen, den Geſichtspunct ſo zu wählen, daß die Zeichnung in der rechten Entfernung betrachtet einem jeden gleich deutlich und natürlich erſcheine; ſo hat es doch in den gewöhnlichſten Fällen eben nicht viel zu ſagen, wenn gleich der Zuſchauer das Gemählde näher ans Auge bringt, oder weiter davon entfernt, als es nach der von dem Zeichner angenommenen Entfernung des Auges ſeyn ſollte. Wir haben uns von Jugend auf angewöhnt, aus dem ſcheinbaren Bilde einer Sache auf ihre wahre Geſtalt und Lage zu ſchlieſſen, und dieſe Gewohnheit trägt das ihrige dazu bey, daß wir uns ein aus dem unrechten Geſichtspunct betrachtetes Gemählde auch ſo vorſtellen, als wenn das Auge im rechten Geſichtspunct wäre. Man erinnere ſich nur daran, daß wir ſo gar die Häuſer, Bäume, und andre Bilder aufrecht ſtehender Gegenſtände, die wir auf einem vor uns horizontal auf einem Tiſch liegenden Kupferſtiche betrachten uns dem ungeachtet als aufrecht ſtehend vorſtellen, obgleich dieſe Lage des Bildes unnatürlich iſt. Bey dem allen wird es doch nützlich ſeyn, die Aenderungen in der ſcheinbaren Lage und Gröſſe der auf einer perſpectiviſchen

Ta-

Tafel abgebildeten Gegenſtände etwas genauer zu betrachten, die daher entſtehen, wenn man die Stelle des Auges ändert.

Der X. Abſchnitt.

Von den Erſcheinungen perſpectiviſcher Abbildungen, wenn ſie auſſer dem rechten Geſichtspunct betrachtet werden.

136 §.

Wenn ein Gemählde nur eine verticalſtehende mit der Tafel parallele Ebene, wie z. E. die Seite AB*ba* des Hauſes AC*da* 68. Fig. vorſtellt, ſo iſt die Entfernung des Auges ganz gleichgültig. Bey gröſſerer Entfernung des Auges vermindern ſich alle Theile in einerley Verhältniß gegen einander, und die Winkel erſcheinen in gröſſerer Entfernung eben ſo, wie in geringerer Entfernung. Sind Dinge gemahlt, die nicht weit hinter einander ſtehen, z. E. Blumenkörbe, Bruſtbilder, Wälder, u. d. gl. ſo hat der Unterſcheid der Entfernung des Auges ebenfalls nicht viel zu ſagen, weil alles in gröſſerer

Entfernung der Tafel vom Auge nur kleiner erſcheint, eben ſo, als wenn die Gegenſtände hinter der Tafel von derſelben weiter hinweg gerückt würden. Allemahl aber, wenn in dem Gemählde weit hinter einander befindliche Gegenſtände vorkommen, wird der Unterſcheid der Erſcheinung merklicher, ſobald man die Entfernung des Auges von der Tafel ändert, und die davon abhängenden Aenderungen der perſpectiviſchen Abbildung verdienen eine genauere Erwägung.

137. §.

Was zuerſt die Bilder ſolcher Linien betrift, die auf der Tafel ſenkrecht ſind, und damit parallel laufen, ſo iſt zu bemerken, daß ihre Lage bey verſchiedener Entfernung des Auges nicht verſchieden ſey, weil die Bilder der Parallelen allemahl mit der Grundlinie parallel ſind, und die Bilder der ſenkrechten Linien in den Augenpunct laufen, das Auge mag ſich der Tafel nähern, oder davon weiter entfernen. Das Bild eines Rechtecks wie QNIp in der 39 Fig. ſtellt alſo auch noch ein Rechteck vor, wenn gleich das Auge weiter wegrückt, oder ſich der Tafel mehr nähert, nur bleibt das Verhältniß der Seitenlinien gegen einander nicht einerley.

Man laſſe den Buchſtaben D, δ, L, die Bedeutungen des 10. u. 11 §. ſo daß δ eine ſenkrechte geometriſche Vertiefung bezeichnet, wozu die Perſpectiviſche Vertiefung l gehört; ſo hat man $\frac{\delta}{D+\delta}\cdot L = l$. Daraus folgt $\delta . L = D . l + \delta . l$, und man findet $\delta = \frac{D . l}{L - l}$. Werden nun D, L, l,

in

in einerley Fußmaaß ausgedrückt, ſo giebt dieſer Ausdruck die Länge der Linie δ, wovon l das Bild iſt, im geometriſchen Maaß an, und man erſiehet daraus, daß δ ſich in einerley Verhältniß mit D ändre, wenn das Verhältniß $\frac{l}{L-l}$ einerley bleibt. Das heiſt: wenn eine ſonſt für eine gewiſſe Entfernung des Auges richtig verfertigte Zeichnung weiter vom Auge weggerückt wird, als es dem bey Verfertigung der Zeichnung angenommenen Abſtande des Auges gemäß iſt; ſo werden die ſenkrechten Vertiefungen in dem Riß Bilder von längern Tiefen hinter der Tafel, als der Abſicht der Zeichnnng gemäß iſt. Denn obgleich L und l deſto kleiner erſcheinen, je gröſſer D wird, ſo bleibt doch das Verhältniß $L:l$ einerley, ſo wie auch das Verhältniß $L-l:l$.

Mit den Bildern ſolcher Linien, die mit der Tafel parallel laufen, hat es folgende Bewandniß. Iſt B die geometriſche Länge einer mit der Tafel parallelen Linie, und b ihr Bild, ſo hat man $b = \frac{D}{D+\delta} \cdot B$ (13 §.), mithin $\frac{B}{b} = \frac{D+\delta}{D}$. Es iſt aber $D:\delta = L-l:l$, und $D+\delta : D = L : L-l$, mithin $\frac{B}{b} = \frac{L}{L-l}$, und $B = \frac{L}{L-l} \cdot b$. Weil nun bey gröſſerer Entfernung des Auges von der Zeichnung das Verhältniß $\frac{L}{L-l}$ einerley bleibt, ſo bleibt auch $\frac{B}{b}$ einerley. Eben daſſelbe gilt von den perſpectiviſchen Höhen, weil

$\alpha = \frac{D}{D+\delta} \cdot A$ iſt, wenn α die der wahren Höhe A zugehörige perſpectiviſche iſt. Alles dies wird durch Betrachtung der 39. Fig. ganz deutlich. Wenn $D = RF$ wächſt, und alles übrige einerley bleibt, ſo müſte NI abnehmen, Ip und IK aber wachſen. In der Zeichnung bleibt aber alles wie es iſt, wenn man ſie vom Auge weiter wegrückt, und mit RF würde NG wachſen. Demnach erſcheint das Rechteck $NIpQ$ dem weiter entfernten Auge ſo, wie ein eben ſo breites aber längeres Rechteck erſcheinen würde, und wenn über demſelben ein rechtwinklichtes Parallelepidedum ſtünde, ſo erſchiene daſſelbe dem weiter entfernten Auge, wie ein eben ſo breites und hohes, aber weiter in die Tiefe laufendes Parallelepipedum.

138 §.

Mit den Bildern der 4 gegen die Grundlinie geneigten Linien im Horizont, oder den ſo genannten ſchrägen Vertiefungen hat es ſchon eine andre Bewandniß: die Lage dieſer Bilder ändert ſich mit der Entfernung des Auges, weil $\tan\zeta = \frac{a}{f + D\cot\eta}$ 18 §. von D abhängt, und vermöge dieſer Formul ζ abnimmt, wenn D wächſt. In der 50 Fig. wird $RP = D\cot\eta$ gröſſer, wenn D gröſſer wird und η einerley bleibt, da dann TAP kleiner wird. Für eine gröſſere Entfernung des Auges wird alſo TAP das Bild eines gröſſern Winkels als eigentlich dadurch abgebildet werden ſoll; und weil die aus dem 18 §. angeführte Formul $f + D\cot\eta = a\cot\zeta$, mithin

$\cot\eta =$

$$\cot\eta = \frac{a\cot\zeta - f}{D}, \text{ oder } \tan\eta = \frac{D\tan\zeta}{a - f\tan\zeta}$$

giebt; ſo ſiehet man, daß tang η in einerley Verhältniß mit D wachſe. Nimmt man in der 43 Fig. RO gröſſer, ſo werden auf der Horizontallinie die Abtheilungen für alle Grade gröſſer, und es können zwiſchen R und P nicht mehr ſo viele Grade fallen, als vorhin. Ueber P hinaus aber fallen mehr Grade, und die Anzahl der letztern giebt das Maaß des durch TAP abgebildeten Winkels.

Wenn l die Länge einer unter dem Winkel η gegen die Grundlinie geneigten Vertiefung iſt, und λ die dazu gehörige perſpectiviſche Vertiefung, ſo iſt

$$\lambda = -\frac{l}{D\operatorname{coſec}\eta + l} \cdot L \quad (24\ \S.) \quad \text{mithin wird}$$

$$\lambda \cdot D\operatorname{coſec}\eta + \lambda \cdot l = L \cdot l, \text{ und } l = \frac{\lambda \cdot D\operatorname{coſec}\eta}{L - \lambda}.$$

Hieraus flieſſen ähnliche Folgen, wie im 137 §. für die ſenkrechten Vertiefungen bewieſen ſind Wird die perſpectiviſche Zeichnung vom Auge weiter weg gerückt, als es der angenommenen Entfernung des Auges gemäß iſt, ſo werden auch die ſchrägen Vertiefungen Bilder von längern Tiefen hinter der Tafel, als es der Vorausſetzung bey Verfertigung der Zeichnung gemäß iſt. Aus Betrachtung der 50 Fig. ergiebt ſich, daß P ſowohl als π von R weiter weg rücken, wenn D gröſſer wird. Behält alsdenn die Linie AP ſowohl ihre Lage, als auch in derſelben der Punct f die ſeinige, ſo rücken die Puncte A und C weiter aus einander, und Af wird das Bild einer gröſſern Linie, als vorher.

139. §.

42 Im 26 §. war TAP das Bild des Winkels
43 F. TAF $=\eta$, und TBp das Bild des Winkels TBH $=\eta+\varphi$, GFH $=\varphi$ geſetzt; und in dieſer Vorausſetzung iſt RP $=$ D $\cot\eta$, Rp $=$ D $\cot(\eta+\varphi)$, Pfp aber iſt das Bild des Winkels GFH $=\varphi$. Weil nun $\cot(\eta+\varphi)=\frac{1-\tang\eta\tang\varphi}{\tang\eta+\tang\varphi}$, (455 §. Geom.) ſo wird $Rp=\frac{D-D\tang\eta\tang\varphi}{\tang\eta+\tang\varphi}$ $=\frac{D\cot\eta-D\tang\varphi}{1+\cot\eta\tang\varphi}$, oder $Rp=\frac{RP-D\tang\eta}{1+RP\tang\varphi:D}=\frac{RP.D-D^2.\tang\varphi}{D+RP\tang\varphi}$. Daraus findet man $Rp.D+Rp.RP\tang\varphi=RP.D-D^2\tang\varphi$, und $\tang\varphi=\frac{(RP-Rp)D}{Rp.RP+D^2}$.

Dieſe Formul dienet die Gröſſe des Winkels φ zu finden, wovon Pfp das Bild iſt. Wenn angenommen wird, daß D allein Aenderungen leide, ſo ergiebt ſich, daß $\tang\varphi$ zweymahl verſchwinde, einmahl, wenn D $=o$, das andre mahl wenn D unendlich groß iſt: anfangs wird alſo φ mit D wachſen, hiernächſt aber wieder abnehmen, mithin einmahl einen gröſten Werth haben. Um den Werth D zu finden, welcher dem gröſten Werth φ zugehört, ſetzt man dem 343 §. Mech. gemäß $d.\frac{(RP-Rp)D}{Rp.RP+D^2}=o$, und findet auf ſolche Art $(RP-Rp)(Rp.RP+D^2)-2(RP-Rp)D^2=o$, alſo $D=\sqrt{Rp.RP}$.

Die

Die Rechnung ſetzt voraus, daß $\eta+\varphi < 90°$, und Rp poſitiv ſey. Wenn $\eta+\varphi > 90°$, mithin Rp negativ iſt, ſo wird der Werth $D = \sqrt{-Rp \,.\, RP}$ unmöglich, und es giebt keinen Werth von D, dem ein gröſter Werth von tang φ zugehörte. Bey dieſer Vorausſetzung iſt $\tang \varphi = \frac{(RP + Rp) D}{D^2 - Rp \,.\, RP}$,

und für kleine Werthe von D iſt tang φ negativ, alſo φ ſtumpf. Wenn D wächſt, nimmt der negative Werth von tang φ zu, mithin wird φ kleiner, und für $D^2 = -Rp \,.\, RP$, wird $\varphi = 90°$. Für noch gröſſere Werthe von D wird tang φ poſitiv und wird kleiner wenn D wächſt, mithin nimmt φ noch weiter ab, und verſchwindet, wenn D unendlich groß wird.

140. §.

Der zuletzt betrachtete Fall wird allemahl eintreten, wenn die Schenkel eines auf der Tafel gezeichneten Winkels wie $P f \Pi$ die Horizontallinie auf verſchiedenen Seiten des Augenpuncts R treffen: nun iſt $TC\Pi$ das Bild eines Winkels $\eta+\varphi$, der gröſſer als 90° iſt, und wenn der Abſtand des Auges D wächſt, ſo wird $P f \Pi$ das Bild eines kleinern Winkels. Wenn im Gegentheil die Schenkel eines auf der Tafel gezeichneten Winkels wie $P f p$ die Horizontallinie auf einerley Seite des Augenpuncts R treffen, ſo wird nur alsdenn der durch $P f p$ abgebildete Winkel kleiner, wenn D über den Werth $\sqrt{RP \,.\, Rp}$ hinaus wächſt. Nimmt D unter dieſen Werth ab, ſo nimmt der durch $P f p$ abgebildete Winkel ebenfalls ab, und wächſt umgekehrt mit D, ſo lange $D < \sqrt{RP \,.\, Rp}$ bleibt. Eine genauere Betrach-

42 43 F.

trachtung der 42 Figur macht dies alles noch deutlicher: weil in derſelben OP mit FG und Op mit FH, ſo wie OΠ mit FE parallel iſt, ſo hat man POp = GFH, POΠ = GFE. Daraus fließt folgende Regel.

Wenn die Schenkel eines Winkels auf der Tafel bis an die Horizontallinie in P und p oder Π verlängert werden, und man ziehet vom Auge O nach P und p oder Π grade Linien, ſo iſt der durch Pfp oder P$f\Pi$ abgebildete Winkel ſo groß, als POp oder POΠ.

Nun überſiehet man leicht, daß der Winkel POΠ beſtändig abnehme, wenn RO wachſt, und wachſe, wenn RO abnimmt, daß POΠ = 180° ſey, wenn OR verſchwindet, und daß POΠ ein Winkel im Halbkreiſe, mithin ein rechter Winkel werde, wenn OR zwiſchen RP und RΠ die mittlere Proportionallinie iſt. Dagegen verſchwindet der Winkel POp mit OR, und wächſt anfangs mit OR bis auf eine gewiſſe Gränze, nimmt aber hiernächſt wieder ab. In dem Fall, wenn OR zwiſchen RP und Rp die mittlere Proportionallinie iſt, gehet durch die drey Puncte O, P und p ein Kreis, der OR berührt, und alsdenn iſt POp am gröſten, wie auch im 22 §. der Optik ſchon iſt bewieſen worden. Uebrigens iſt noch zu bemerken daß bey geänderter Entfernung OR auch die Stelle der Spitze F des durch Pfp oder P$f\Pi$ abgebildeten Winkels im Horizont geändert werde, und weiter in NF hinaus rücke, wenn OR wächſt, welches alles die 42 Fig. ganz deutlich macht: ſo wie es auch mit dem 136. und 137 §. übereinſtimmet.

141. §.

Weil die Stelle des Auges gegen die Tafel und die darauf abgebildeten Gegenſtände nicht allein durch D ſondern zugleich durch *a* und △ (9. §. oder *f* 18 §.) beſtimmt wird; und die Lage ſowohl, als auch die Gröſſe der perſpectiviſchen Bilder davon mit abhängt; ſo kann es bey Betrachtung derſelben ebenfalls nicht gleichgültig ſeyn, ob das Auge höher oder niedriger, mehr nach der rechten oder der linken Seite ſtehet, als bey der Zeichnung des Bildes iſt angenommen worden. Um deſto beſſer zu überſehen, was dieſe Aenderungen in der Stelle des Auges für Einfluß auf die Erſcheinungen des Bildes haben, nehme man an, daß von nun an D ungeändert bleibe: wenn alsdenn das Auge zwar in einerley Horizontalfläche, alſo *a* einerley bleibt, übrigens aber das Auge ſeitwärts gegen die rechte, oder die Linke rückt, ſo ändert ſich die Stelle des Augenpuncts auf der Tafel. Demnach bleiben die in den Augenpunct des Bildes laufenden Linien, wie AR, NR, in der 43 Fig. nicht mehr Bilder ſolcher Linien, die auf der Grundlinie ſenkrecht ſtehen. Das Auge rücke um den Abſtand RP = TQ gegen die Linke, ſo rückt der Augenpunct aus R nach P, die Vertical-Linie des Auges rückt aus RT in PQ, und eben ſo weit verrückt ſich die Ebene des Auges gegen die Linke. Nun iſt TNR, TAR das Bild eines ſtumpfen Winkels von 150 Graden. Würde nemlich die Horizontallinie für den Halbmeſſer ωP = D aus dem Augenpunct P gehörig eingetheilt; ſo würde der 60ſte Grad in R fallen, mithin wäre TNR ſo wie TAR das Bild eines Winkels von 90 + 60 = 150 Graden.

den. Wenn dagegen das Auge eben ſo weit gegen die Rechte rückte, und der Augenpunct in r fiele, ſo würden die Winkel TNR, TAR Bilder ſpitzer Winkel von 30 Graden werden.

142 §.

Man ſiehet wohl, daß dieſe Vorausſetzungen eben ſo viel ſagen wollen, als wenn man annimmt, daß ſich f in der Formul $\text{tang}\,\eta = \frac{D\,\text{tang}\,\zeta}{a - f\,\text{tang}\,\zeta}$ (138 §.) ändre, und dieſe Formul dient, alle ſolche Aenderungen allgemein zu überſehen. In dieſer Formul bezeichnet ζ jeden Winkel, wie TAP, und η den dadurch abgebildeten Winkel, wie TAG. (42. Fig.) Man ſetze AQ $= k$, ſo iſt $\text{tang}\,\zeta = \frac{a}{k}$, und man hat $\text{tang}\,\eta = \frac{aD}{k} : \left(a - \frac{af}{k}\right) = \frac{D}{k-f}$. Für die in den Augenpunct laufenden Linien, wie AR fällt Q in T, ſo daß AT $= k$ iſt, alſo $\text{tang}\,\eta = \infty$, und $\eta = 90°$, weil auch $f =$ AT iſt. Rückt das Auge gegen die Linke, und mit demſelben TR nach QP, ſo wächſt $f =$ AT um das Stück TQ $= h$, es wird nemlich $f =$ AQ und man erhält $\text{tang}\,\eta = -\frac{D}{h}$ in der Vorausſetzung, daß $k =$ AT bleibe. Wenn dagegen das Auge gegen die Rechte rückt, ſo nimmt AT $= f$ ab, und $h = k - f$ bekommt das entgegen geſetzte Zeichen. Im erſten Fall alſo wird aus TAR das Bild eines ſtumpfen, im letzten Fall das Bild eines ſpitzen Winkels. Für Linien, die nicht in den

Au-

Augenpunct laufen, wie AP, hat man $AQ=k$, und $AT=f$, wenn T der Fußpunct des Auges iſt: mithin iſt $\tan\eta = \frac{D}{k-f} = \frac{D}{h}$ poſitiv. Rückt nun das Auge gegen die Linke, ſo bleibt TAP ſo lange das Bild eines ſpitzen Winkels bis $AT=f$ $=AQ=k$ wird, und dieſer ſpitze Winkel wächſt mit f. Für $f=k$, oder $h=o$, wenn TR in QP fällt, wird TAP das Bild eines rechten Winkels: und wenn f noch weiter wächſt, alſo $h=k-f$ negativ wird; ſo wird TAP das Bild eines ſtumpfen Winkels. Wenn dagegen das Auge gegen die Rechte rückt, mithin f abnimmt, und $h=k-f$ wächſt, ſo bleibt $tg.\eta$ beſtändig poſitiv, auch wenn T über A weg rückt, und $AT=f$ negativ wird. Demnach bleibt im letztern Fall TAP das Bild eines ſpitzen, und zwar deſto kleinern Winkels, je weiter das Auge gegen die Rechte fortrückt. Ueberhaupt verhält ſich $\tan\eta$ umgekehrt wie h.

143 §.

Die Vertiefungen Af, Nf, hängen von η, mithin auch von f oder h ab; denn aus dem 138 §. weis man, daß der perſpectiviſchen Vertiefung $Af=\lambda$ die geometriſche Vertiefung $AF=l=\frac{\lambda . D \operatorname{coſec}\eta}{L-\lambda}$ zugehöre. Demnach ändert ſich die durch Af abgebildete geometriſche Vertiefung in dem Verhältniß der Coſecante des durch TAf abgebildeten Winkels, oder in dem Verhältniß der Diſtanz des Auges von dem Punct P. Weil nun $\tan\eta = \frac{D}{h}$

$\frac{D}{h}$ war, (142 §.) und $\cot \eta = \frac{h}{D}$, ſo wird

$$\operatorname{coſec} \eta = \frac{\sqrt{(D^2+h^2)}}{D}.$$ Rückt alſo das Auge gegen die Linke, ſo wird anfangs die durch Af abgebildete Linie kleiner, aber nur ſo lange bis $h=o$ wird, oder die Ebene des Auges durch P geht: hiernächſt nimmt ſie wieder zu. Rückt aber das Auge gegen die Rechte, ſo wird die durch Af abgebildete Linie beſtändig gröſſer.

Man wird etwas mit dieſen Schlüſſen übereinſtimmendes wahrnehmen, wenn man die 68. Figur betrachtet. Das Auge ſoll eigentlich grade vor R ſtehen, um den Abſtand RV davon entfernt. Verrückt man das Auge ſeitwärts gegen V, ſo ſcheint BC länger zu werden; und eben ſo ſcheint EG zu wachſen, wenn das Auge von R nach W rückt. Im erſten Fall ſcheint auch der Winkel ABC zu wachſen, ſo wie im letzten Fall YEG. Völlig und in allen Stücken können dieſe Erſcheinungen ſo nicht ausfallen, wie es den bisherigen Schlüſſen gemäß wäre, weil BC und EG unter einem deſto kleinern optiſchen Winkel geſehen werden, je mehr das Auge ſeitwärts rückt: am beſten nimmt man die ſcheinbare Aenderung der Winkel TBC und TEG wahr. An ſich haben dieſe Erſcheinungen etwas unnatürliches; wäre ABCa ein würkliches Haus, ſo müſte die Seitenwand BCcb nothwendig deſto ſchmahler ſcheinen, je weiter das Auge gegen V rückt, und überall verſchwinden, ſobald die Ebene des Auges durch Bb gienge.

144 §.

In Rückſicht auf den 140 §. überſiehet man zugleich ungemein leicht die Aenderungen, welche mit ſolchen Winkeln vorgehen, die auf der Tafel die
Winkel Pfp, $Pf\Pi$ abbilden. Im Horizont ſind die 42
zugehörigen Winkel GFH, GFE, und dieſen ſind 43 F.
die Winkel POp, $PO\Pi$ im Horizont des Auges gleich. In der allgemeinen Formul $\tang \varphi = \frac{(RP - Rp)D}{Rp.RP + D^2}$ (139 §.) ſetze man $pR = x$, $Pp = c$, ſo iſt $RP = c + x$, $RP - Rp = c$, mithiu $\tang \varphi = \frac{c.D}{x(c+x) + D^2}$. Rückt nun das Auge gegen die Rechte oder Linke; ſo ändert ſich x: und weil $\tang \varphi$ zweymahl $= \frac{c}{D}$ wird, für $x = o$, und $x = -c$, für negative Werthe von x aber, die zwiſchen dieſen enthalten ſind, $\tang \varphi > \frac{c}{D}$ wird; ſo giebt es einen Werth von x, dem der gröſte Werth von $\tang \varphi$ zugehört. Nach dem 343 §. Mech. findet man dieſen Werth $x = -\frac{1}{2}c$, demnach iſt der durch Pfp abgebildete Winkel am gröſten, wenn R zwiſchen P und p in der Mitte liegt: je weiter aber das Auge nach der einen oder der andern Seite wegrückt, deſto kleiner wird der Winkel im Horizont, dem das Bild Pfp zugehört. Wie ſich übrigens die Stelle der Spitze des zugehörigen Winkels im Horizont ändere, ſolches läſt ſich nach dem 143 §. beurtheilen.

Wenn

Wenn ſich x und D zugleich ändern, ſo kann dies auf ſolche Art geſchehen, daß tang φ mithin auch φ ungeändert bleibt. Im Horizont des Au-
72 F. ges ſey durch die drey Puncte O, P, p, ein Kreis beſchrieben, ſo iſt aus der Natur des Kreiſes bekannt, daß der Winkel POp mithin GFH (42 Fig.) von einerley Gröſſe bleibe, wenn gleich O in dem Bogen POp ſeine Stelle ändert. Der Mittelpunct K des Kreiſes POp ſey um den Abſtand KL$=k$ von der Horizontallinie entfernt, RO ſchneide den Kreis zum zweyten mahl in ω, und KM ſey auf RO ſenkrecht: ſo iſt RO.Rω = RP.Rp, (215 §. Geom.) und man hat RO$=$D, OM$=$M$\omega$$=D-k$, alſo R$\omega$$=D-$ 2OM$=2k-$D. Ferner iſt R$p=x$, pP$=c$, und RP$=c+x$: mithin $x(c+x)=D(2k-D)$. Wird dieſer Werth in die Formul $\tang\varphi = \frac{c.D}{D^2+x(c+x)}$

geſetzt, ſo erhält man $\tang\varphi = \frac{c}{2k} = \frac{\frac{1}{2}c}{k}$:

und dies iſt der beſtändige Werth der Tangente des Winkels POp, wenn O allemahl im Umfang des durch O, P, p, geführten Kreiſes bleibt, da ſich dann D und x beyde zugleich ſo ändern, daß allemahl $x(c+x)=D(2k-D)$ bleibt.

Wenn demnach die Gröſſe des Winkels φ gegeben iſt, den Pfp auf der Tafel abbilden ſoll, ſo iſt $\tang\varphi = \frac{\frac{1}{2}c}{k}$ gegeben, mithin auch $k = \frac{\frac{1}{2}c}{\tang\varphi}$, und man kann den Mittelpunct K desjenigen Kreiſes finden, in deſſen Umfang das Auge ſtehen muß:

ſein

ſein Halbmeſſer iſt $= \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + k^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4} c^2 . \cot\varphi^2)} = \frac{1}{2}c . \operatorname{coſec}\varphi$.

145. §.

Noch iſt zu unterſuchen, was die Erhebung und Erniedrigung des Auges über und unter dem bey Entwerfung der Zeichnung angenommenen Horizont des Auges für einen Erfolg hat. Erniedriget man das Auge unter dem Horizont VW, ſo kann der Raum zwiſchen der Grundlinie AE und Gränzlinie VW nicht mehr eine horizontale Ebene vorſtellen. Die Horizontallinie des Auges fällt nun unter VW, und VW wird nun das, was die Gränzlinie einer gegen den Horizont geneigten Ebene ſeyn würde, wie $v\omega$ in der 75 Fig. war. Stellt man ſich eine grade Linie aus dem Auge auf VW ſenkrecht gezogen vor, ſo wird die Neigung dieſer Linie gegen den Horizont des Auges einerley ſeyn mit dem Neigungswinkel der Ebene, wozu nun die Gränzlinie VW gehört, gegen den Horizont. Was alſo die Zeichnung als auf dieſer Fläche liegend vorſtellet, wird ſich ſo darſtellen, als wenn es auf der Fläche eines Berges läge. 68 F.

Eine umgekehrte Erſcheinung wird der Erfolg ſeyn, wenn man das Auge über dem Horizont VW erhebet. Nun wird VW die Gränzlinie einer Ebene werden, die ſich gegen den Horizont des Auges abwärts neiget unter einem Winkel, der wiederum ſo groß iſt, als der Neigungswinkel einer aus dem Auge auf VW ſenkrecht gezogenen Linie gegen den jetzigen Horizont des Auges. Alles alſo, was auf der Fläche gezeichnet iſt, erſcheinet als auf der Fläche ei-

eines Berges liegend, die man vom Gipfel herunter überſiehet.

146 §.

Bey allen dieſen angenommenen Aenderungen in der Stelle des Auges iſt doch die Vorausſetzung der vertical ſtehenden Tafel beybehalten worden: mithin auch in dem Umſtand nichts geändert, daß vertical ſtehende Linien auch verticale Bilder haben. So lange nun der Horizont des Auges nicht geändert wird, ſo lange bleiben alle auf der Ebene zwiſchen AE und VW gezeichnete Linien wie BC, EI Bilder horizontaler Linien, mithin dergleichen Winkel, wie *b*BC, *e*EI, Bilder von rechten Winkeln. Sobald aber das Auge über dem Horizont VW erhöhet, oder darunter erniedriget wird, ſobald bleiben auch dergleichen Linien, wie BC, EI, nicht mehr Bilder horizontaler Linien, und die Winkel B*b*C, *e*EI, nicht mehr Bilder von rechten Winkeln.

Wäre die Tafel nicht aufrecht ſtehend angenommen worden, oder auch auf der aufrecht ſtehenden Tafel eine oder mehrere ſchiefliegende Flächen gezeichnet, ſo könnte man über die Aenderung in der ſcheinbaren Lage und Gröſſe der auf der Tafel abgebildeten Gegenſtände, wenn die Tafel aus einem andern Geſichtspunct betrachtet wird, leicht eben dergleichen Unterſuchungen anſtellen, wie die bisherigen geweſen ſind: wobey Weitläuftigkeit zu vermeiden eine auf der verticalſtehenden Tafel abgebildete Horizontalfläche iſt betrachtet worden. Man weis aus dem VII. Abſchnitt, daß die Regeln, nach welchen man Gegenſtände abbildet, die in Ebenen liegen,

gen, welche die Tafel ſchief ſchneiden, mit denjenigen die gröſte Aehnlichkeit haben, nach welchen man horizontal liegende Figuren abbildet. Alle Formuln für die Lage und Gröſſe der Bilder ſolcher Figuren, welche die Tafel unter den ſchiefen Winkel ψ ſchneiden, kommen mit den Formuln für die Bilder horizontal liegender Figuren überein, wenn D coſec ψ ſtatt D und a coſec ψ ſtatt a geſetzt wird: (101 §.) daher müſſen auch völlig ähnliche Regeln zur Beurtheilung deſſen daraus flieſſen, wie ſich die Lage und Gröſſe der abgebildeten Gegenſtände bey veränderter Stelle des Auges ändert. Man darf ſich nur erinnern, daß eine mit der ſchiefen Ebene durchs Auge parallel gelegte Ebene, ihr Durchſchnitt mit der Tafel, als die Gränzlinie des Bildes der ſchiefen Ebene, ihr Augenpunct, der Abſtand des Auges von demſelben, und der Abſtand der Gränzlinie von der Grundlinie, hier eben das ſind, was bey den Bildern horizontaler Ebenen auf der vertical ſtehenden Tafel Horizont des Auges, Gränzlinie des Horizonts, Hauptaugenpunct, Abſtand und Linie des Auges waren: ſo überſiehet man auf einmahl, wie alle in dieſen X. Abſchnitt vorgekommen Unterſuchungen auf die Bilder ſolcher Ebenen angewandt werden können, welche die Tafel ſchief ſchneiden.

147. §.

Ueberhaupt fließt aus den bisherigen Betrachtungen die allgemeine Folge, daß eine perſpectiviſche Zeichnung auf der vertical ſtehenden Tafel zwar diejenigen Gegenſtände nach ihrer wahren Lage und Gröſſe nicht mehr vorſtelle, welche ſie nach der Abſicht des Zeichners vorſtellen ſoll, wenn das Auge ſie

aus dem unrechten Geſichtspunct betrachtet: daß ſie aber bey dem allen doch gewöhnlich noch immer Gegenſtände vorſtelle, die uns in der Natur entweder im ganzen, oder nach ihren Theilen eben ſo, wie die entworfene Zeichnung in die Augen gefallen ſind. In ſo fern ſcheint das Gemählde doch noch allemahl etwas natürliches an ſich zu haben: wenn aber die Tafel ſelbſt gegen die abgebildete Ebene eine ſchiefe Lage hat, ſo iſt man bey Betrachtung der Zeichnung an den Geſichtspunct mehr gebunden. Die Bilder ſolcher Linien, die auf der abgebildeten Ebene ſenkrecht ſtehen, ſind nun einander nicht geometriſch parallel, ſondern haben einen Vereinigungspunct, der ſich mit der Stelle des Auges ändert. Aus dem unrechten Geſichtspunct betrachtet erſcheinen daher aufrecht ſtehende Sachen nicht mehr als aufrecht ſtehend: auch darf man der Tafel bey Betrachtung der Zeichnung keine andre Lage geben, als die ſie nach der Abſicht des Zeichners haben ſollte, weil in jeder andern Lage der Tafel die Zeichnung alles in unrechter Lage und Gröſſe vorſtellt, und uns hier die Gewohnheit nicht ſo ſehr zu Hülfe kommt, vermöge der wir uns eine liegende Tafel als aufgerichtet vorſtellen, wenn der Zeichner ſie als vertical ſtehend angenommen hat. Man nimmt deswegen die Vorausſetzung der ſchiefliegenden Tafel, bey Zeichnung horizontaler und verticaler Gegenſtände nicht leicht an, wenn nicht beſondre Gründe ſolches erfordern. Gewöhnlich zeichnet man bey einer ſolchen Vorausſetzung nicht anders als auf unbewegliche Flächen, dergleichen die Decken der Zimmer und Kirchen ſind, auch wohl andre gegen den Horizont geneigte Flächen, die zuweilen in Gebäuden ihre unveränderliche Lage haben.

Un-

Unter andern gehören dahin übereinander liegende Treppen, ſo daß wenn man die eine hinunter ſteigt, man die hintere Fläche der andern grade vor ſich hat. Der Geſichtspunct iſt in ſolchen Fällen mehrentheils nothwendig gegeben, oder wenigſtens der Boden, auf welchem der Zuſchauer herum gehet, und denſelben leicht findet.

148. §.

In Fällen dieſer Art bleibt es auch nicht willkührlich, was für Gegenſtände man auf ſolche Flächen mahlen will, wenn das widernatürliche vermieden werden ſoll. An der Decke eines Zimmers eine Landſchaft, oder andre in der Tiefe liegende Gegenſtände zu mahlen, wird immer etwas unnatürliches haben, wenn nicht der horizontalen Lage der Zimmerdecke ungeachtet, ihre Fläche als vertical ſtehend betrachtet wird, wenn man darauf zeichnet; weil alsdenn bey Betrachtung der Zeichnung die Gewohnheit zu Hülfe kommt, vermöge der wir uns liegende Tafeln als aufrecht ſtehende vorzuſtellen geneigt ſind. Weit beſſer wird die Zeichnung ins Auge fallen, wenn man ſolche Gegenſtände wählt, die ihrer Natur nach über der Decke des Zimmers erhaben ſind, da dann der Zeichner die Tafel als horizontal liegend annehmen kann. Daher laſſen ſich Berge, die Wolken, der geſtirnte Himmel, ein Zug Vögel, u. d. gl. ſehr wohl auf dergleichen Decken abmahlen. Will man architectoniſche Stücke darauf bringen, ſo müſſen es ſolche ſeyn, die natürlich darauf ſeyn können: ſo könnte man an der Decke eines Zimmers ein andres eben ſo groſſes Zimmer oben drüber zeichnen, ſo daß es von unten hinauf betrachtet ſchiene,

als wenn das Zimmer um ein ganzes Stockwerk hö-
her wäre. M. ſ. hievon Hn. Lamberts Freye Perſpectiv im 6. Abſchnitt, woſelbſt dieſe und andre hieher gehörige Anmerkungen durch würkliche Beyſpiele in Zeichnungen erläutert werden.

Der XI. Abſchnitt.

Allgemeine Theorie der Sciagraphie.

149. §.

Wenn man zur völligen Auszierung einer Perſpectiviſchen Zeichnung auch den Schatten in derſelben ausdrücken will, den die abgebildeten Körper werfen; ſo muß man ſich aus dem 70 §. der Optik erinnern, daß die Geſtalt und Gröſſe des Schattens nicht allein von der Geſtalt und Gröſſe des dunklen Körpers, der den Schatten wirft, ſondern auch von der Geſtalt und Gröſſe des Lichts abhänge, von welchen die Erleuchtung herrührt. Man ſetzt entweder voraus, daß das Licht einer angezündeten Kerze oder Lampe die abgebildeten Gegenſtände erleuchtet: oder man nimmt an, daß ſelbige vom Sonnenlicht erleuchtet werden: oder man ſetzt zum Grunde,

daß

daß die Erleuchtung vom Tageslicht herrühre, ohne daß die Körper, welche den Schatten werfen, den Sonnenſtrahlen unmittelbar ausgeſetzt wären. Die Rede iſt hier nicht vom körperlichen Schatten, ſondern von der Projection deſſelben auf eine oder mehr Ebenen von gegebener Lage, oder überhaupt auf die Fläche andrer umher befindlicher Gegenſtände welche auch der Schlagſchatten heiſt: (68 §. Opt.) und gewöhnlich hat die Zeichnung dieſes Schattens wenig Schwierigkeit, wenn vorher die Gegenſtände ſelbſt, welche den Schatten werfen, richtig gezeichnet ſind.

150 §.

Die Flamme einer angezündeten Kerze oder Lampe hat nur eine ſo geringe Gröſſe, daß man ſie bey Zeichnung des Schattens, welchen die von ihr erleuchteten Körper werfen, als einen leuchtenden Punct betrachten kann, weil hier überhaupt keine groſſe Schärfe nöthig iſt. Demnach iſt der körperliche Schatten hier die Erweiterung der Strahlen-Pyramide, welche die Lichtflamme, als ein leuchtender Punct betrachtet, auf den dunklen Körper wirft, nach der andern Seite deſſelben, der Lichtflamme gegen über. Liegt nun eine Ebene ſo, daß ſie dieſen körperlichen Schatten ſchneidet, ſo kann man leicht ſo viele Puncte im Umfang des auf dieſe Ebene projicirten Schattens finden, als nöthig ſind, hiernächſt den Umfang dieſes Schattens ſelbſt zu zeichnen. Von dem mittlern Punct der Lichtflamme, deſſen Stelle in der Zeichnung als gegeben betrachtet wird, ziehet man durch ſo viele Puncte in den Gränzen des dunklen Körpers, als man nöthig findet, grade Li-

nien, die den Körper berühren: da wo jede dieſer Linien die beſchattete Ebene trift, hat man einen Punct im Umfang des projicirten Schattens. Demnach kommt alles darauf an, daß man jeden ſolchen Punct richtig zu finden wiſſe, worin ein Lichtſtrahl, welcher den Körper in ſeinen Gränzen berührt, die beſchattete Ebene trift.

Eine Hauptmaxime hiebey beruhet darauf, daß man in der beſchatteten Ebene eine grade Linie ziehet, welche mit dem Lichtſtrahl, der durch einen ſolchen Punct in der Gränze des dunklen Körpers gezogen iſt, ebenfalls in einerley Ebene liegt: der Punct, worin beyde Linien einander ſchneiden, iſt der geſuchte.

151. §.

Weil der Schatten, welcher hier gezeichnet werden ſoll, mit der Projection des dunklen Körpers auf die gegebene Ebene, würklich einerley iſt, (3 §.) nur mit dem Unterſcheid, daß man hier bloß den äuſſern Umfang dieſer Projection ſucht; ſo kann man ſich die Vorſtellung machen, als ob der Schatten eines Puncts ein Punct, der Schatten einer graden Linie ebenfalls eine grade Linie wäre, die mit jener und dem leuchtenden Punct in einer Ebene liegt. Der Schatten einer graden Linie iſt alſo gefunden, wenn der Schatten eines jeden ihrer Endpuncte gefunden iſt, weil der geſuchte Schatten der graden Linie zwiſchen den Schatten beyder Endpuncte iſt.

Eine Ebene, die durch den leuchtenden Punct und diejenige grade Linie geht, deren Schatten geſucht wird, kann hier Kürze halber die Ebene des Schatten-Dreyecks heiſſen: alsdenn liegt der Schatten, welchen die grade Linie auf eine gegebene Ebene wirft, in der Durchſchnittslinie dieſer Ebene und der Ebene des Schatten-Dreyecks.

Wenn man den Schatten zu finden weis, den ein Punct, oder eine grade Linie auf eine Ebene wirft, ſo hat es auch ſelten Schwierigkeit, den Schlagſchatten eines dunklen Körpers zu zeichnen. Beſtehet alſo die von den Lichtſtrahlen berührte Gränze des dunklen Körpers aus graden Linien; ſo wird der Schlagſchatten auf einer Ebene eine gradlinichte Figur ſeyn, die ſich leicht zeichnen läſt, wenn man ihre Winkelpuncte gefunden hat. In andern Fällen, wenn der Umfang des Schlagſchattens keine gradlinichte Figur iſt, ſucht man ſo viele Puncte im Umfang deſſelben, als nöthig ſind, um ihm hiernächſt aus freyer Hand durch dieſe Puncte durchzuführen.

152 §.

Es iſt die Lage des leuchtenden und dunklen Puncts gegeben, man ſoll den Schatten des letztern finden, den derſelbe auf eine gegebene Ebene wirft.

Aufl. Von beyden Puncten ziehe man auf dieſe Ebene lothrechte Linien: weil dieſe parallel ſind, (308 §. Geom.) mithin in einerley Ebene liegen, ſo liegen auch die beyden Puncte, worin ſie die gegebene Ebene treffen, mit dem leuchtenden und dunklen Punct in einerley Ebene. Man ziehe alſo durch

jene beyden Puncte ſowohl, als durch dieſe eine grade Linie, ſo wird ihr Durchſchnittspunct der geſuchte Schatten ſeyn.

76 F. Die 76. Figur ſtellt den innern Raum eines Zimmers vor, wovon der Boden nebſt der Decke horizontal iſt, und die drey Seitenwände vertical ſind. In L befindet ſich die Lichtflamme, die man als einen leuchtenden Punct betrachtet, in A aber ein dunkler Punct, der ſeinen Schatten auf den horizontalen Fußboden wirft. Weil die Lage beyder Puncte im Zimmer als bekannt angenommen wird, ſo kennet man die Entfernungen TP und TQ dieſer Puncte von der Ebene des Auges, man kann alſo RP und RQ ziehen: und hiernächſt die verticalen Linien LM und AB herab laſſen. Wenn alsdenn MB und LA gezogen werden, die ſich in U ſchneiden, ſo iſt U der geſuchte Schatten.

Den Punct M, wohin die von L auf den Horizont *efgh* lothrecht herab gelaſſene Linie trift, kann man auch ſo finden. Es muß LM die Horizontallinie des Auges irgendwo in K ſenkrecht ſchneiden, und nun darf man nur KM ſuchen. Wenn demnach a die Höhe des Auges iſt, D und δ aber die Entfernungen des Auges und des durch L abgebildeten Puncts von der Tafel bezeichnen; ſo iſt $KM = \frac{D}{D+\delta} \cdot a$. (12 §.) Denn K iſt das Bild eines Puncts, der in einerley Verticallinie mit dem durch L abgebildeten Punct liegt, und deſſen Höhe über dem Horizont *efgh* mit der Höhe a des Auges einerley iſt.

Zie-

Ziehet man Mp mit der Grundlinie parallel, und Mq in den Augenpunct, ſo ſind Mp und Mq die Entfernungen der Lichtflamme L von der linken und hintern Wand. Ziehet man ferner durch p und q verticale Linien, Lm mit Mp parallel, und Lμ in den Augenpunct, ſo iſt Lm auf der Linken, Lμ aber auf der hintern Wand ſenkrecht. Wenn nun der dunkle Punct a ſeinen Schatten auf die Wand zur Linken, der dunkle Punct α aber ſeinen Schatten auf die hintere Wand wirft, ſo låſt ſich die Lage deſſelben auf jeder von dieſen Ebenen wie vorhin finden. Man nimmt ec der Vertiefung des Puncts a hinter der Tafel gleich, richtet cb ſenkrecht auf, und ziehet ab mit der Grundlinie parallel, ſo iſt ab auf der Seitenwand ſenkrecht: und wenn La, mb gezogen werden, ſo iſt ihr Durchſchnittspunct u der Schatten. Auf åhnliche Art verfåhrt man mit dem Punct α, der ſeinen Schatten auf die hintere Seitenwand wirft. Man nimmt $t\gamma$ der Entfernung von der Ebene des Auges gleich, zieht $\gamma\beta$ vertical und $\alpha\beta$ in den Augenpunct, ſo iſt $\alpha\beta$ auf der hintern Wand ſenkrecht: und wenn man Lα, $\mu\beta$ zieht, ſo giebt ihr Durchſchnittspunct ε den Schatten.

153 §.

Die Puncte M, m, μ, worin die ſenkrechten Linien LM, Lm, Lμ die gegebene Ebene treffen, heiſſen bey den practiſchen Schriftſtellern Hůlfspuncte. M. ſ. Jacobz Unterricht in der Perſpectiv, Vierte Abth. 83. u. f. S. Sie haben die Eigenſchaft, daß die Erleuchtung der Ebene, in wie weit ſie von dem leuchtenden Punct L herrůhrt, da wo dieſe Puncte liegen, am ſtårkſten iſt, und die

Photometrie wird davon ausführlichern Unterricht geben. Hier kommt auf den letzten Umſtand noch nichts an, weil ein ſolcher Hülfspunct nur dienen ſoll, die Lage des Schattens zu finden: ich habe es nur bemerken wollen, weil die practiſchen Schriftſteller gewöhnlich des Umſtandes erwehnen.

An ſich erfordert die Auflöſung der Aufgabe des vor. §. nicht nothwendig, daß LM und AB auf *efgh* ſenkrecht gezogen werden: es kommt nur darauf an, daß AB mit LM parallel ſey, und der Durchſchnittspunct beyder grader Linien AB, LM, wird allemahl derſelbe Punct U ſeyn.

154. §.

Um den Schatten einer graden Linie zu finden, den ſie auf eine Ebene wirft, iſt nicht allemahl nöthig, den Schatten eines jeden ihrer Endpuncte auf die eben beſchriebene Art zu ſuchen: nur alsdenn, wenn keiner von beyden Endpuncten in der beſchatteten Ebene liegt, muß man den Schatten eines jeden beſonders ſuchen, um die grade Linie zwiſchen beyden, als den geſuchten Schatten, zu finden.
76 F. Will man in der 76. Fig. den Schatten zeichnen, welchen AC auf den horizontalen Fußboden wirft; ſo ſucht man von A den Schatten U, und von C den Schatten V, alsdenn iſt UV der Schatten von AC.

Hiebey iſt der beſondre Fall zu bemerken, wenn AC mit der beſchatteten Ebene parallel iſt. Alsdenn iſt der Schatten UV mit der graden Linie AC, die den Schatten wirft, ebenfalls parallel, (311 §. Geom.) mithin laufen die Bilder AC und UV in einerley Punct der Gränzlinie des Horizonts zuſammen.

men. Hat man nun U als den Schatten von A ſchon gefunden, ſo zieht man UV mit AC perſpectiviſch parallel, und hiernächſt LC, bis zum Durchſchnittspunct V, ſo hat man UV als den Schatten von AC.

Wenn ein Endpunct der graden Linie in der beſchatteten Ebene liegt, ſo wird ſie auf letzterer entweder ſenkrecht, oder ſchief ſtehen. Iſt AB auf der horizontalen Grundfläche ſenkrecht, ſo findet man zugleich den Schatten BU der ganzen Linie AB, indem man den Schatten U des oberſten Puncts A ſucht, weil es ſogleich einleuchtend iſt, daß BU die Durchſchnittslinie der Ebene des Schatten-Dreyecks LAB mit der Ebene *efgh* ſey. Eben ſo iſt *bu* der Schatten von *ab*, *βε* der Schatten von *αβ*. Wenn aber eine ſolche Linie, wie *ab* auf der beſchatteten Ebene *fgkl* ſchief ſtehet, und man hat den Schatten *u* des Puncts *a* nach dem 152 §. oder auch auf andre Art gefunden; ſo iſt *bu* ebenfalls der geſuchte Schatten.

155. §.

Wenn die Ebene des Schattendreyecks mehr als eine Ebene zugleich ſchneidet, ſo kann der Schatten einer graden Linie, zum Theil in der einen, zum Theil in der andern Ebene liegen, mithin eine gebrochene Linie ſeyn. Um hievon eine Probe zu geben, 76 F.
ſey *ad* auf *efgh* ſenkrecht, durch M und *d* ſey eine grade Linie gezogen welche *fg*, (die Durchſchnittslinie beyder Ebenen *efgh* und *fgkl*, oder auch linker Hand der Ebene des Auges *eh*) in *w* ſchneidet: ſo erhellet, daß L*a* mit *dw* auf der vom Licht abgewandten Seite nicht zuſammen ſtoſſen könne, weil hier

hier $ad > LM$ angenommen iſt. Aber auch in Fällen, wenn $ad < LM$ wäre könnte es ſeyn, daß der Durchſchnittspunct der Linie L*a* mit M*d* über *w* hinaus fiele, und der Schatten länger als *dw* wäre: alsdenn wird allemahl ein Theil davon auf die Ebene *fgkl* fallen. Um auch dies Stück des Schattens zu zeichnen, muß man durch *w* eine grade Linie *wu* in der Ebene *fgkl* ziehen, die zugleich in der Ebene des Schattendreyecks liegt, und wenn L*a* mit derſelben in *u* zuſammen ſtößt, ſo wird *wu* das geſuchte Stück des Schattens ſeyn. Bey dem hier gewählten Beyſpiel, wo *fgkl* eine verticale Wand vorſtellt, richtet man *wu* vertical auf, ſo liegt *wu* in der Ebene dieſer Wand, zugleich aber auch in der Ebene des Schatten-Dreyecks L*ad*, und *dwu* iſt der Schatten der lothrechten Linie *ad*.

156 §.

Es würde zu weitläuftig fallen, alle diejenigen Fälle beſonders durchzugehen, bey welchen der Schatten einer graden Linie einie gebrochene Linie wird; zumahl wenn auch von ſolchen Fällen viele Beyſpiele gegeben werden ſollten, wo ſich der Schatten über noch mehr, als zwey verſchiedene Ebenen erſtreckt. Der Umſtand, daß jedoch alle grade Theile des gebrochenen Schattens in einerley Ebene des Schattendreyecks liegen müſſen, wird dem in der Geometrie geübten Zeichner jedesmahl leicht den Weg zeigen, auf welchem er die Lage der verſchiedenen gradliniчten Theile des gebrochenen Schattens richtig finden kann. Im vor. §. iſt eine Probe davon gegeben worden, wie man den Schatten zeichnet, wenn er ſich über zwo verſchiedene Ebenen erſtreckt,

ſtreckt, die einander ſenkrecht ſchneiden. Um auch davon ein Beyſpiel zu geben, wie man ſich verhält, wenn eine dieſer Ebenen die andre ſchief ſchneidet, nehme man an, *ab* ſtehe vertical, *efgh* ſey die horizontale Grundfläche, die Tafel ſtehe vertical über der Grundlinie *ef*, und *cdrs* ſey eine Ebene, die zwar auf der Tafel ſenkrecht ſteht, den Horizont aber unter einem ſchiefen Winkel ſchneidet. Alsdenn iſt die Durchſchnittslinie *cs* mit der Grundfläche auf der Tafel ſenkrecht und läuft in den Augenpunct, die Durchſchnittslinie mit der Tafel ſey *cd*, ſo iſt *ecd* der Neigungswinkel. Ferner ſey L die Lichtflamme, LM vertical, ſo iſt M der Hülfspunct: wenn man nun M*b* und L*a* ziehet, ſo ſtößt M*b* mit *cs* in *m* zuſammen, der Durchſchnittspunct beyder Linien M*b* und L*a* aber fällt weit über *m* hinaus. Man verlängere indeſſen M*b* durch *m*, nehme auf der Seite von *m*, die vom Licht abgewandt iſt, in der verlängerten M*m* einen Punct *w* an, richte *wu* vertical auf, und ziehe *w*R, ſo iſt die Ebene R*wu* vertical. Um ihre Durchſchnittslinie mit der geneigten Ebene zu finden, verlängere man R*w* bis an die Grundlinie in *e*, und richte *ed* vertical auf, welche *cd* in *d* ſchneidet, ſo iſt R*d* die Durchſchnittslinie der verticalen Ebene R*wz* mit der geneigten Ebene *cdrs*. Wenn nun R*d* und *wu* einander in *z* ſchneiden, ſo liegt *z* in der Ebene des Schatten-Dreyecks L*ab*, und eben darin liegt auch *m*, mithin auch *mz*. Aber *mz* liegt auch in der geneigten Ebene *cdrs*: wenn demnach L*a* und *mz* einander in *n* ſchneiden, ſo iſt *mn* das Stück des Schattens, welches auf die geneigte Ebene fällt, und mit dem horizontalen Theil *bm* zuſammen 77 F.

men

men den völligen Schatten der graden Linie *ab* ausmacht.

157. §.

Das bisherige dient nun zugleich zur Anleitung, den Schatten eines dunklen Körpers zu zeichnen, wenn die von den Lichtſtrahlen berührte Gränze
76 F. desſelben aus graden Linien beſtehet. (151 §.) In der 76 Fig. ſtehet ein grades Prisma auf dem horizontalen Boden. Man ziehe MB, MD, MF, imgleichen LA, LC, LE, und verlängere dieſe Linien, bis jede zwey zuſammen gehörige ſich in U, V, W, ſchneiden, ſo iſt BUVWF der Umfang des Schattens, wovon nur ſo viel in der Zeichnung ausgedrückt wird, als das Prisma ſelbſt dem Auge nicht verdeckt.

Um in der 77. Fig. den Schatten der Pyra-
77 F. mide ACDEF auf dem horizontalen Boden *efgh* zu zeichnen, läſt man AB lothrecht herab, ziehet LA und MB, ſo hat man den Schatten U der Spitze A; die Seitenlinien DA und FA werfen ihren Schatten in DU und FU, demnach iſt DUF der horizontale Schatten. Wenn aber über R*f* eine verticale Ebene *fgkl* ſtehet, ſo iſt BWV der Schatten von AB. (155 §.) Um das auf die verticale Ebene fallende Stück des Schattens der Pyramide zu finden, ſucht man anfangs den Punct U, in der horizontalen Grundfläche, wohin der Schatten der Spitze A fallen würde, wenn die verticale Ebene nicht da wäre: hiernächſt aber den Schatten V der Spitze A auf der Ebene *fgkl* nach Vorſchrift des 155 §. Nun ziehet man die Linien DU und FU nur bis dahin, wo ſie *fg*

bey

bey G und H ſchneiden, ſodann aber GV und HV, ſo iſt der völlige Schatten der Pyramide gezeichnet.

158 §.

Wäre HDCG 76 Fig. ein grader Cylinder, ſo müſte man MB und MF ſo ziehen, daß ſie die Grundfläche berührten. Aus ſo viel Puncten des im Schatten liegenden Bogens BDF, als man nöthig fände, könnte man nun lothrechte Linien aufrichten, und die Puncte im Horizont, wie U, V, W, ſuchen, wo ſich ihre Schatten endigen, da dann hiernächſt durch dieſe Puncte die krummlinichte Gränze des Schattens aus freyer Hand leicht durchgeführet wird. Wenn ACDEF ein Kegel wäre, ſo müſten MD und MF die Grundfläche berühren, und der Schatten des Kegels würde übrigens wie der Schatten der Pyramide gezeichnet werden müſſen. Ohne daß neue Regeln nöthig wären, ſiehet man leicht, wie man ſich verhalten müſte, wenn die Körper in die Claſſe ſchiefer Priſmen und Cylinder gehörten.

159 §.

Der Lichtflamme einer angezündeten Kerze bedient man ſich gewöhnlich, den innern Raum eines Zimmers zu erleuchten, und die in einem Zimmer befindlichen Sachen ſind mehrentheils aus priſmatiſchen und cylindriſchen Theilen, oder doch ſolchen zuſammen geſetzt, deren Geſtalt von der Geſtalt eines Priſmen oder Cylinders nicht weit abweicht: demnach kann die bisherige Anleitung genügen, um überhaupt zu überſehen, auf welche Gründe ſich die Regeln von Verzeichnung desjenigen Schattens zurück

füh-

führen laſſen, den ſolche Gegenſtände werfen, die vom Licht einer Kerze erleuchtet werden. Der Zeichner hat hiebey noch zu beobachten, daß derjenige Theil von der Oberfläche des Körpers, welcher vom Licht beſchienen wird, heller, der andre aber dunkel gezeichnet werde, welcher im Schatten liegt. Ferner iſt zu beobachten, daß da, wo Licht und Schatten an einander gränzen, der volle Schatten mit einem Halbſchatten umgeben ſey, weil die Lichtflamme würklich einige Gröſſe hat; (69. 70. §. Optik) deswegen muß die Gränze des Schattens nicht völlig ſcharf abgeſchnitten gezeichnet werden. Weil übrigens nach der verſchiedenen Lage und Entfernung des Lichts von den erleuchteten Gegenſtänden die Erleuchtung des einen ſtärker als die Erleuchtung des andern iſt, ſo muß der Zeichner beym ſo genannten Schattiren auch auf dieſen Umſtand Rückſicht nehmen, und mehr erleuchtete Gegenſtände heller, als andre zeichnen, die weniger erleuchtet ſind. Die eigentlichen Gründe, nach welchen dies mit Sicherheit beurtheilet werden muß, wird die Photometrie vortragen.

160 §.

Wenn in einem Zimmer mehrere angezündete Kerzen vorhanden ſind, ſo wirft jeder in demſelben befindliche Gegenſtand eben ſo viele beſondre Schatten, als Kerzen da ſind: alsdenn muß in der Zeichnung der volle Schatten, wohin keine von den Kerzen Strahlen werfen kann, vom Halbſchatten unterſchieden werden, wohin nur eine oder einige dieſer Kerzen ihre Strahlen werfen können. Für dieſe Fälle hat man keine neue Regeln nöthig, man zeichnet

net den von einer jeden Kerze herrührenden Schatten beſonders den bisherigen Regeln gemäß; alsdenn giebt es ſich von ſelbſt zu erkennen, wie weit ſich der volle Schatten erſtrecke, der am dunkelſten gezeichnet werden muß, damit ſich derſelbe von dem übrigen Halbſchatten unterſcheide.

161 §.

Die bisher betrachteten Fälle ſind alle von der Art, daß die Lage der Spitzen und Ecken oder andrer merkwürdiger Puncte des dunklen Körpers, welcher den Schatten wirft, in der ſchon verfertigten Zeichnung leicht zu erkennen iſt, und von denſelben die ſenkrechten Linien auf die beſchattete Ebene leicht herab gelaſſen werden können. Es giebt andre Fälle, wo dieſe Puncte nicht ſogleich kenntlich ſind, wo auch einige Vorbereitungen nöthig ſind, um die ſenkrechten Linien auf die beſchattete Ebene herab zu laſſen. Dahin gehört unter andern der Fall, wenn man den Schatten einer Kugel, den ſie auf eine gegebene Ebene wirft, zeichnen ſollte. Hier, wo noch die Lichtflamme als ein leuchtender Punct betrachtet wird, iſt der körperliche Schatten der Kugel korbförmig, das heiſt, er iſt ein abgekürzter grader Kegel, wovon die kleinere Grundfläche mit dem Kreiſe der Kugel einerley iſt, der das erleuchtete Stück von dem dunklen abſondert, und deſſen Axe durch den leuchtenden Punct, und den Mittelpunct der Kugel gehet. Der Schlagſchatten auf einer Ebene iſt alſo ein Kegelſchnitt, (59 §.) und gewöhnlich eine Ellipſe, (60 §.) deren Projection auf der perſpectiviſchen Tafel verlangt wird, wenn man den Schlagſchatten zeichnen ſoll. Eigentlich läſt ſich hier noch

keine genaue Theorie ſo wenig von der Geſtalt des Bildes der Kugel ſelbſt, als von der perſpectiviſchen Projection ihres Schlagſchattens vortragen, weil die allgemeine Theorie der Kegelſchnitte noch nicht abgehandelt iſt: es ſoll aber unten das nöthige davon noch am gehörigen Ort beygefüget werden.

162. §.

In den bisher betrachteten Fällen iſt übrigens die Lage des leuchtenden Puncts L gewöhnlich durch die drey rechtwinklichten Coordinaten TP, RM, ML, beſtimmt: das ſind, wie bekannt iſt, die Entfernungen des Puncts L von der Verticalfläche des Auges, von der Tafel, und vom Horizont *efgh*. Die letztere Entfernung beſtimmt zugleich die Entfernung des Puncts L vom Horizont des Auges, weil die Höhe des Auges über dem Horizont *efgh* als bekannt angenommen wird. Wenn man aber bis auf den 5 §. zurück gehet, ſo ſiehet man leicht, daß ſich die Lage eines ſolchen Puncts, wie L, auch auf folgende
38 F. Art beſtimmen lieſſe. Die Ebene OLMS iſt vertical, und ROG horizontal, beyder Durchſchnitt iſt OG, ſo wie OS der Durchſchnitt der Verticalfläche des Auges mit der Verticalfläche OLMS iſt. Man kann OLMS die **Verticalfläche des Puncts L** nennen. Weil nun OR und OG horizontal mithin auf OS ſenkrecht ſind; ſo iſt ROG der Neigungswinkel beyder Verticalflächen des Auges und des Puncts L gegen einander; und dieſer Winkel kann die **Abweichung des Puncts L von der Ebene des Auges** heiſſen. Weiter iſt GOL der ſcheinbare **Abſtand des Puncts L vom Horizont des Auges**, oder die **optiſche Höhe des Puncts L** über

dem

dem Horizont des Auges. (82 §. Opt.) Sind nun die beyden Winkel ROG und GOL nebſt der Entfernung OL bekannt, ſo iſt die Lage des Puncts L beſtimmt, weil der Abſtand OR des Auges als bekannt angenommen wird.

Das Bild K des Puncts L ändert auf der Tafel ſeine Stelle nicht, wenn gleich der Punct L in der graden Linie OL ſeine Stelle ändert: demnach wird die Stelle des Bildes K auf der Tafel durch die Abweichung des Puncts L von der Verticalfläche und dem Horizont des Auges beſtimmt.

162. §.

Die Abweichungen des Puncts L von der Verticalfläche und dem Horizont des Auges ſind gegeben, nebſt dem Abſtand D des Auges von der Tafel, man ſucht die Stelle des dem Punct L zugehörigen Bildes K auf der Tafel. 38 F.

Aufl. Es iſt Rg der Abſtand des Bildes von der Verticallinie, und gK deſſelben Bildes Abſtand von der Horizontallinie des Auges; durch beydes aber wird die Stelle des Bildes K auf der Tafel beſtimmt. Man ſetze demnach $ROG = \alpha$, $GOL = \beta$, ſo findet man $Rg = D \tang \alpha$, und $gK = Og . \tang \beta = D \sec \alpha \tang \beta$.

Durch Zeichnung auf der Tafel wird alſo K auf folgende Art gefunden. Man macht $RO = D$, und $ROg = \alpha$. Aus dem Durchſchnittspunct g mit der Horizontallinie des Auges richtet man eine ſenkrechte Linie auf, trägt gO aus g in ω, und macht 78 F.

 $g\omega K = \beta$,

$g\omega K = \beta$, ſo findet man den Durchſchnittspunct K als das Bild des Puncts L.

163. §.

Wenn die Perſpectiviſche Zeichnung eine von der Sonne erleuchtete Gegend vorſtellt, und man ſtellt ſich eine verticale Ebene vor durchs Auge und den Mittelpunct der Sonne; ſo iſt der Neigungswinkel dieſer Ebene gegen die Ebene des Auges die **Abweichung der Sonne von der Ebene des Auges**, und derſelbe heiſt in der Aſtronomie **der Azimuthal-Winkel der Sonne**: die Neigung einer graden Linie vom Auge in den Mittelpunct der Sonne gezogen gegen den Horizont des Auges aber, heiſt die Höhe der Sonne über dem Horizont des Auges. (82 §. Opt.) Wenn beydes gegeben, oder willkührlich angenommen iſt; ſo läſt ſich nach den Regeln des vor. §. das Bild des Mittelpuncts der Sonne, auf der Tafel finden. Es wird dabey vorausgeſetzt, daß die Sonne ſich hinter der Tafel befinde, da dann ihr Azimuthal-Winkel kleiner als 90° ſeyn wird. Wenn derſelbe 90 oder noch mehrere Grade faſſet; ſo kann das Bild der Sonne nicht mehr auf der Ebene der Tafel gezeichnet werden.

Man ſetze, wie im vor. §. den Azimuthal-Winkel der Sonne $= \alpha$, ihre Höhe über dem Horizont $= \beta$; ſo iſt die Linie vom Auge in den Mittelpunct der Sonne gezogen in dem Fall $\alpha = 90°$ mit der Tafel parallel, und kann dieſelbe gar nicht treffen: in dem Fall $\alpha > 90°$ aber trift ſie rückwärts verlängert die Tafel in einem Punct, der unter der Horizontallinie des Auges liegt, und dieſer Punct kann

zum

zum Unterſcheid von dem vorigen Fall, wenn auf der Tafel ein würkliches phyſiſches Bild der Sonne liegt, das geometriſche Bild des Mittelpuncts der Sonne heiſſen. Die Stelle dieſes geometriſchen Bildes auf der Tafel wird eben ſo gefunden, wie die Stelle des phyſiſchen Bildes vom Mittelpunct der Sonne in dem Fall $\alpha < 90°$ gefunden wird. Es ſind nemlich tang α und ſec α nun negativ, alſo iſt der Abſtand des geometriſchen Bildes von der Verticallinie des Auges $= -D \tang \alpha$, und der Abſtand deſſelben von der Horizontallinie $= -D \sec \alpha \tang \beta$.

Die Zeichnung, vermittelſt der man das geometriſche Bild findet, bleibt demnach ebenfalls den Regeln des vor. §. gemäß. Auf der Seite der Verticallinie des Auges, wo die Stelle der Sonne angenommen wird, zeichnet man den Winkel $RO\gamma = \alpha$, ſo fällt der Durchſchnitt mit der Horizontallinie in g': man macht $g'\omega' = g'O$, und $H\omega'k = \beta$, ſo giebt ſich das geometriſche Bild K' des Mittelpuncts der Sonne unter der Horizontallinie. 78 F.

164. §.

Das Bild S des Mittelpuncts der Sonne iſt auf der Tafel gegeben, oder auch nach Anleitung des vor. §. gefunden; die Zeichnung ſtellt einen horizontalen Proſpect vor, und AB iſt das Bild einer dem Sonnenlicht ausgeſetzten verticalen Linie; man ſoll das Bild ihres Schattens zeichnen. 79 F.

Aufloͤſung. Eine Ebene durch AB und den Mittelpunct der Sonne iſt vertical, und der Schatten von AB liegt in der Durchſchnittslinie dieſer

Ebene mit dem Horizont. Er ſey BC, ſo liegen S, A, C in grader Linie, und die Ebene SABC iſt vertical. Man ſtelle ſich die Ebene TVN horizontal, die Tafel aber über der Grundlinie TN vertical vor, SN ſey auf TN ſenkrecht, und ſchneide RH in M: ferner ſey V der Punct woſelbſt eine Verticallinie durchs Auge den Horizont trift; ſo wird eine Verticalfläche durchs Auge und den Mittelpunct der Sonne die Tafel in SN den Horizont in VN ſchneiden. Wegen der ungemein groſſen Entfernung der Sonne von der Erde (76. 77. §. Opt.) iſt jede durch AS abgebildete Linie mit der vom Auge in den Mittelpunct der Sonne gezogenen parallel; weil nun auch die durch AB abgebildete Linie mit der Verticallinie durchs Auge parallel iſt; ſo ſind die Ebenen SAB und SNV parallel, (324 §. G.) mithin ſind ihre Durchſchnittslinien BC und VN mit dem Horizont (323 §. G.) ebenfalls unter ſich parallel. Demnach laufen die Bilder der letztern in irgend einem Punct der Horizontallinie RH des Auges zuſammen: (17 §.) und weil NM das Bild von VN iſt, wenn man ſich VN hinter der Tafel verlängert vorſtellt, (132 §.) ſo muß auch BC in den Punct M laufen, worin eine grade Linie vom Bilde des Mittelpuncts der Sonne auf die Horizontallinie des Auges ſenkrecht gezogen, letztere ſchneidet.

Dieſe Schlüſſe leiten auf folgende Regeln: Aus dem Bilde S des Mittelpuncts der Sonne ziehe man auf die Horizontallinie des Anges eine ſenkrechte Linie SM, hiernächſt aber SA und MB, die einander in C ſchneiden, ſo iſt BC der Schatten.

Man

Man kann SM als das Bild einer aus dem Mittelpunct der Sonne lothrecht herabgelaſſenen Linie betrachten, und M als das Bild des Puncts, wo ſie die horizontale Grundfläche trift. Die durch BM abgebildete Linie iſt $= AS . \cos \beta$, und weil die Entfernung der Sonne von der Erde als unendlich groß angeſehen werden kann, ſo iſt auch die durch BM abgebildete Linie unendlich groß, ſo lange $\beta < 90°$ iſt. Hieraus fließt ebenfalls, daß M in der Horizontallinie des Auges liegen müſſe, (16 §.) und die Vergleichung mit dem 152 §. ergiebt, daß die jetzige Aufgabe nur als ein beſondrer Fall der Aufgabe des 152 §. zu betrachten ſey. Jene Auflöſung findet hier ihre völlige Anwendung, M iſt als der Hülfspunct anzuſehen, (153 §.) der hier noch kürzer, als im 152 §. gefunden wird.

Wenn man übrigens bey dieſer Zeichnung die Sonne nur als einen leuchtenden Punct betrachtet, da doch ihre ſcheinbare Gröſſe ſo gar geringe nicht iſt, und ihr ſcheinbarer Durchmeſſer ohngefehr einen halben Grad beträgt; ſo iſt wegen des Halbſchattens eben das zu bemerken, was ſchon im 159 §. iſt erinnert worden: das Ende C des Schattens wird nicht ſcharf abgeſchnitten gezeichnet, ſondern ſo daß er ſich unmerklich in das ihn umgebende Licht verliert: und wenn man den 85 §. der Optik hiemit vergleicht, ſo iſt daraus leicht abzunehmen, wie man ſich verhalten müſte, wenn man den Halbſchatten, und die eigentlichen Gränzen deſſelben genau finden wollte.

165 §.

In der zum vor. §. gehörigen Zeichnung iſt angenommen, daß der Azimuthal-Winkel der Sonne 79 F.

α oder TVN $< 90°$ ſey: man zeichnet aber den Schatten eben ſo leicht auch in dem Fall, wenn dieſer Winkel eben ſo groß, oder gröſſer, als 90 Grad wäre. Wächſt TVN, ſo rückt M von R weiter weg, und zwar über alle Gränzen, wenn TVN $= 90°$ wird. Alsdenn iſt BM mithin auch BC mit der Horizontallinie RH des Auges und der Grundlinie des Horizonts parallel. Mit TVN wächſt übrigens auch $\omega M = VN = D \sec x$, und $MS = D \sec\alpha \tan\beta$, wenn gleich β einerley bleibt, und MS wird unendlich groß, wenn $\alpha = 90°$ wird. In allen Fällen iſt BAC das Bild eines Winkels, der die Höhe der Sonne über dem Horizont zu 90° ergänzt, und dieſer Winkel BAC wird ſelbſt $= 90° - \beta$ wenn α oder TVN $= 90°$ wird. Denn nun fällt BC in Bk, ſo daß BK mit Tn parallel iſt, und AB iſt mit RT parallel: mithin iſt die Ebene ABk mit der Tafel parallel, und jeder Winkel in dieſer Ebene erſcheint in ſeiner wahren Gröſſe. Um demnach nun den Schatten zu zeichnen, macht man den Winkel $BAk = 90° - \beta$, ſo wird Bk der Schatten, da dann $Bk = AB \cot\beta$ iſt.

Wächſt aber TVN über 90°, ſo fällt M auf der andern Seite von R in m, und S fällt unter der Horizontallinie in s, da dann s das geometriſche Bild vom Mittelpunct der Sonne iſt. Uebrigens ziehet man wiederum AS und Bm, und wenn beyde einander in c ſchneiden, ſo iſt Bc der Schatten.

166. §.

Dieſe im 164 §. vorgetragene und im 165 §. noch weiter erläuterte Aufgabe iſt allemahl der Grund

der

der Zeichnung, wenn das Bild des Schattens verlangt wird, den ein dunkler von der Sonne beſchienener Körper auf eine horizontale oder jede andre Ebene wirft: eine nähere Vergleichung mit der Aufgabe des 152 §. und mit demjenigen, was daraus bis zum 158 §. weiter iſt hergeleitet worden, wird das geſagte beſtätigen, und zugleich als eine Anleitung dienen, wie man ſich in den gewöhnlichſten Fällen bey der Zeichnung ſelbſt zu verhalten hat. Eine Menge beſondrer Beyſpiele zu geben, verſtattet die Abſicht dieſes Lehrbuchs nicht, auch können die bisher vorgetragenen Vorſchriften einen jeden genügen, der ſich nicht allein in der Geometrie hinlänglich geübt, ſondern auch die darauf bisher gegründete allgemeine Theorie der Perſpectiv recht geläufig gemacht hat. Man bringt ſich in keinem Geſchäfte ohne öftere und mannigfaltige Uebung eine rechte Fertigkeit zuwege, und die rechte Brauchbarkeit allgemeiner Vorſchriften lernt man allereſt durch öftere Anwendungen auf eine Menge beſondrer Fälle kennen. Wer demnach die Perſpectiv ſelbſt ausüben will, der muß practiſche Schriftſteller, welche dem Leſer eine Menge guter Muſter vorlegen, zu Rath ziehen, ihre Vorſchriften, die ſie in beſondern Fällen geben, mit der bisher vorgetragenen Theorie zuſammen halten, und bey würklicher Hand-Anlegung, unter den mancherley Wegen, die man hier gewöhnlich nehmen kann, eine geſchickte, auf richtige Schlüſſe gegründete Wahl zu treffen ſuchen. Auf ſolche Art wird man durch öftere eigene Hand-Anlegung ein geübter Zeichner werden, eben ſo, wie man nur durch häufige Auflöſung mannigfaltiger Rechnungsfragen ein geübter Rechner wird.

 167. §.

167. §.

Zur Probe, wie man ſich verhalten kann, wenn der Schatten eines von der Sonne beſchienenen dunklen Körpers über mehrere Ebenen verbreitet iſt, die einander ſchneiden, mag das folgende Beyſpiel dienen.
75 F. In der 75 Fig. ward nach Anleitung des 134 §. eine Garten-Mauer gezeichnet, die über AC und BD horizontal fortläuft, über CE und DF aber Bergan ſteigt. Wenn nun S das Bild des Mittelpuncts der Sonne iſt, und man ſoll den Schatten dieſer Mauer zeichnen; ſo mache man damit den Anfang, daß man den Schatten ſucht, welchen die verticale Linie C*c* auf die horizontale Grundfläche wirft. In ſolcher Abſicht ziehe man SM auf RO ſenkrecht, imgleichen S*c* und MC, deren Durchſchnittspunct *h* iſt, ſo iſt C*h* der Schatten von C*c*, und *h* der Schatten von *c*. Weil ferner der Schatten von *ca* mit *ca* parallel läuft, ſo ziehe man *hg* ſo, daß dieſe Linie in den Haupt-Augenpunct R läuft, und man erhält den Schatten AC*hg* von dem Stück AC*ca* der Mauer, ſo weit nemlich derſelbe hinter der Tafel liegt. Um auf ähnliche Art den Schatten zu finden, den die lothrechte Linie E*e* auf die ſchiefe Ebene CEFD wirft, erwäge man, wenn SM die Gränzlinie *rω* in N ſchneidet, daß N und E in der ſchiefen Ebene, zugleich aber auch in der Ebene des Schattendreyecks liegen. Wenn demnach NE und S*e* gezogen werden, und einander in *p* ſchneiden, ſo iſt E*p* der Schatten von E*e* und *p* der Schatten von *e*. Wiederum iſt nun der Schatten von *ec* mit *ec* parallel: alſo ziehe man *pq* ſo, daß dieſe Linie in den Augenpunct *r* der ſchiefen Ebene läuft, ſo iſt *pq* der Schatten

von

von *ec*, ſo weit derſelbe auf die ſchiefe Ebene fällt: demnach zieht man noch *q* und *h* zuſammen, ſo iſt *hq* der horizontale Theil deſſelben, und *ghqp* iſt der Schatten von *ace*. Endlich ziehe man noch *pk* mit *ef* parallel, und hiernächſt *kf*, ſo iſt der geſammte Schatten der über ACEF ſtehenden Mauer gezeichnet.

Nachdem *gh* gefunden war, hätte man *hq* auch ſo finden können. Weil AC in der horizontalen Grundfläche liegt; ſo verlängere man AC und E*ce* bis ſie einander in P ſchneiden: alsdenn liegt P in der horizontalen Grundfläche, und wenn man MP, S*e* ziehet, die einander in Q ſchneiden, ſo iſt PQ der Schatten, welchen P*e* auf den Horizont werfen würde, mithin *h*Q der Schatten, welchen *ce* auf den Horizont werfen würde. Wenn aber CD und *h*Q einander in *q* ſchneiden; ſo bleibt nur der Theil *hq* des horizontalen Schattens, weil das übrige Stück auf die ſchiefe Ebene fällt. Um das letztere nun zu finden, ziehet man *qp* in den Augenpunct *r*, und hiernächſt S*e*, ſo giebt ſich der Durchſchnittspunct *p*.

Wer den Augenpunct *r* und die Gränzlinie *rω* bey dieſer Zeichnung nicht brauchen wollte, oder mit der Theorie vom Augenpunct und den Gränzlinien ſolcher Ebenen, welche die Tafel ſchief ſchneiden, nicht bekannt wäre; der könnte um den Punct *p* zu finden, ſo zu Werke gehen. Aus *q* ziehe man eine Linie in den Hauptaugenpunct R, welche PQ in *m* ſchneidet, und richte aus *m* eine lothrechte Linie auf: wenn letztere nun S*e* in *p* ſchneidet, ſo iſt *p* der Schatten von *e*. Denn der Schatten von *e* muß in einer Linie liegen, die durch *q* mit *ce* und CE parallel läuft,

läuft, alſo in der Ebene *pmq*, dieſe Ebene mit EPC parallel und die Ebene des Neigungswinkels der ſchiefen Ebene gegen den Horizont iſt. Eben der Schatten liegt aber auch in der Ebene SMQ, alſo in der lothrechten Linie über *m*; und weil er zugleich in S*e* liegen muß ſo iſt er mit *p* einerley.

Ein noch andrer Weg wäre dieſer: Man ziehe RV # CD bis an *q*R in V, nehme EZ = PV, und ziehe *q*Z; ſo iſt der Durchſchnittspunct *p* mit S*e* der geſuchte Schatten von *e*. Denn eine lothrechte Linie über V geht durch Z, und ZV*q* iſt die Ebene des Neigungswinkels, alſo liegt *g*Z mit CE parallel, und der Schatten von *e* liegt in *q*Z. Weil er aber zugleich in S*e* liegt, ſo fällt er in *p*.

Die Vergleichung wird ergeben, daß die zuerſt gegebene Auflöſung der Aufgabe die bequemſte ſey: man hat nach derſelben nicht nöthig, überflüßige Linien im Horizont zu ziehen, um *q* und *p* zu finden, und dieſen Vortheil gewähret der Gebrauch des Augenpuncts und der Gränzlinie der ſchiefen Ebene. Ein neuer Beweis deſſen, wie vorzüglich brauchbar die im VII. Abſchnitt vorgetragene Theorie auch für die Ausübung ſey, und wie ſehr ſie verdiene, ſelbſt wegen des vortheilhaften Gebrauchs bey der Ausübung, in die Lehrbücher der Perſpectiv aufgenommen zu werden: ihrer eigenen Schönheit, und des Vergnügens, was ſie dem Liebhaber theoretiſcher Unterſuchungen gewähret, nicht zu gedenken.

168 §.

80 F. Noch ein hieher gehöriges Beyſpiel wäre das folgende. An der vertical ſtehenden Mauer PQ iſt eine

eine Leiter ſo gelehnt, daß die Sproſſen mit dem Horizont parallel laufen, und auf der Tafel ſenkrecht ſtehen; in S iſt das Bild der Sonne: man ſoll den Schatten der Leiter zeichnen. Von S läſt man auf die Horizontallinie des Auges SM ſenkrecht fallen, und eben ſo läſt man aus einem willkührlichen Punct E des einen Leiter-Baums AB eine lothrechte Linie EF auf die horizontale Grundfläche herab. Weil AB mit der Tafel parallel iſt, ſo iſt auch die Ebene AEF mit der Tafel, mithin ihre Durchſchnittslinie mit dem Horizont ebenfalls mit der Tafel parallel. Wenn alſo AF mit RM parallel gezogen wird, und AF in F ſchneidet, ſo iſt F der Punct, worin das aus E herab gelaſſene Loth die horizontale Grundfläche trift. Nun ziehe man MF bis an die Grundlinie der Mauer in G, ziehe SE und weil der Durchſchnittspunct mit FG hinter der Mauer fallen würde, ſo richte man Gε ſenkrecht auf bis zum Durchſchnitt mit SE in ε, ſo iſt ε der Schatten von E. (165 §.) Demnach muß Iε der Schatten von IE ſeyn, und wenn Iε die Grundlinie der Mauer in K ſchneidet, SK aber der Leiter-Baum AB in *k*, ſo iſt IK der Schatten von I*k*, und AK der Schatten von A*k*, mithin AKI der Schatten des ganzen Baums.

Weil nun parallele Linien auf den Horizont auch parallele Schlagſchatten werfen; ſo verlängere man KA bis an die Gränzlinie des Horizonts in L, und ziehe CN in den Vereinigungspunct L, hiernächſt aber NV, ſo iſt CNV der Schatten von CV. Wenn endlich *a*, *b*, *c*, E, ϑ, u. ſ. f. die Stellen ſind, wo die Sproſſen durchſtecken, ſo ziehe man S*a*, S*b*, S*c*, SE, S*d*, u. ſ. f. und bemerke die Durchſchnitte dieſer

ſer Linien mit AKI in α, β, γ, ε, δ, u. ſ. f. ſo ſind die leztern Puncte Schatten von a, b, c, E, d, u. ſ. f. Die Schatten der Sproſſen ſind wiederum mit den Sproſſen und unter einander ſelbſt parallel, demnach zeichne man dieſe durch α, β, γ, ε, δ, u. ſ. f. ſo, daß ſie in den Augenpunct R laufen.

169. §.

Es iſt oben im 149 §. einer dreyfachen Art der Erleuchtung dunkler Körper erwähnet, bisher aber ſind nur die beyden erſten Arten bey Verzeichnung des Schattens vorausgeſetzt worden. Beyde kommen darin überein, daß man bey Verzeichnung des Schattens das Licht, wovon die Erleuchtung herrührt, als einen leuchtenden Punct betrachten kann, ohne eben auf die eigentliche Gröſſe deſſelben Rückſicht zu nehmen, und darnach auch den Halbſchatten in der Zeichnung zu beſtimmen. Mit derjenigen Erleuchtung, die von der Sonne herrührt, hat diejenige alle Aehnlichkeit, welche das Mondenlicht verurſacht, nur das jene Erleuchtung weit ſtärker als dieſe iſt. Wollte man demnach den Proſpect einer vom Monden erleuchteten Gegend zeichnen; ſo müſte man ſich bey Zeichnung des Schattens eben ſo verhalten, als wenn die Erleuchtung vom Sonnenlicht herrührte. Nur müſte alles, was im Schatten liegt dunkler, und was erleuchtet iſt, nicht ſo helle gezeichnet werden, als wenn die Erleuchtung von der Sonne käme. Die dritte oben ſchon erwehnte Art der Erleuchtung iſt diejenige, wenn das Tageslicht durch eine Fenſter- oder Thür-Oefnung in ein Zimmer fällt, ohne daß die Sonne ſelbſt hineinſcheinet. Dunkle Körper, welche dieſem Tages-

licht

licht ausgeſetzt ſind, werfen nicht allein einen Schatten, ſondern auch einen Halbſchatten, von ſo beträchtlicher Gröſſe, daß man die eigentlichen Gränzen deſſelben hier etwas genauer ſuchen muß, als in den bisher betrachteten Fällen nöthig geweſen iſt. Ja ſelbſt die Zeichnung des Halbſchattens wird hier ein Mittel die eigentliche Gränze des vollen oder Kern-Schattens zu finden.

170. §.

Die ganze Oefnung, durch welche in Fällen dieſer Art das Licht in das Zimmer fällt iſt hier als ein leuchtender Körper zu betrachten, und aus dem 73 §. der Optik weis man ſchon, daß es in manchen Fällen eine mühſame, und weitläuftige Unterſuchung ſeyn würde, wenn man die wahre Geſtalt und Gröſſe des Schattens und Halbſchattens ſuchen wollte. Wofern die Geſtalt des leuchtenden und dunklen Körpers es verſtattet, eine Fläche anzunehmen, welche beyde zugleich berührt; ſo giebt dieſe die Gränze des vollen körperlichen Schattens ab, auf der Seite, die vom Licht abgewandt iſt: der übrige Raum wohin nicht von allen Puncten des leuchtenden Körpers Licht fallen kann, iſt der Halbſchatten; und derſelbe iſt an jeder gegebenen Stelle deſto heller, je mehr leuchtende Puncte, und deſto dunkler, je weniger leuchtende Puncte dahin ſcheinen können. Derjenige Raum, wohin gar keiner von den leuchtenden Puncten ſcheinen kann, iſt der volle Schatten: demnach kann man ſich dem 73 §. der Optik gemäß auch dieſe Vorſtellung von der Sache machen. Für jeden Punct des leuchtenden Körpers, welcher auf den dunklen Strahlen werfen kann,

giebt

giebt es eine Halbſchatten-Pyramide, und der Raum, den alle dieſe Pyramiden gemein haben, iſt der volle oder Kern-Schatten. Bey der Perſpectiviſchen Zeichnung des Schattens ſucht man gewöhnlich nur die eigentliche Gränze des vollen Schattens richtig zu finden, ohne daß es eben ſo gar ſehr auf die genaue Zeichnung des Halbſchattens ankäme, der ſich ohnehin allemahl in den ihn umgebenden erleuchteten Raum unmerklich verliert.

171 §.

Gewöhnlich haben die Thür- und Fenſter-Oefnungen in Wohn-Zimmern die Geſtalt rechtwinklichter Parallelogramme, wovon zwey Seitenlinien vertical ſtehen, die beyden übrigen aber horizontal laufen. Wenn alsdenn der dunkle von dem hinein ſcheinenden Tageslicht erleuchtete Körper die Geſtalt eines graden Priſmen oder Cylinders hat, oder doch wenigſtens ſeine Geſtalt von der erwehnten nicht eben ſehr abweicht, ſo findet man die Projection des Schattens auf den horizontalen Boden ohne groſſe Schwürigkeit, und folgendes Beyſpiel kann zur Probe dienen, wie man ſich in ähnlichen Fällen zu
81 F. verhalten habe. Es ſey ABCD eine Thüröfnung, und auf dem horizontalen Boden ſtehe das grade Priſma EM. Man ziehe ALl und DEε, ſo ſind Ll und Eε beyde ins unendliche verlängert die Gränzlinie des Halbſchattens, und LαE iſt der Halbſchatten-Winkel: denn es fällt leicht in die Augen, daß die Ebene der Parallelen AB und LM auf der einen Seite, die Ebene der Parallelen CD und EF aber auf der andern Seite, die Gränzen des körperlichen Halbſchattens abgeben.

Nun ſtelle man ſich AB allein als eine leuchtende Linie vor, ziehe AE und BF, AG und BH, AL und BM, ſo geben ſich die Durchſchnittspuncte *e*, *g*, *l*, und wenn dieſe Linie allein leuchtend wäre, ſo würde E*egl*L der volle Schatten ſeyn. Hiebey iſt noch zu bemerken, daß *eg* und EG, imgleichen *gl* und GL parallel ſeyn müſſen. Nachdem alſo AE, AG, AL gezogen, und vermittelſt BF der Durchſchnittspunct *e* gefunden worden, könnte man auch *eg* mit EG, und wiederum *gl* mit GL perſpectiviſch parallel ziehen.

Wenn man ſich ferner CD allein als eine leuchtende Linie vorſtellt, ſo findet man auf eben die Art, daß E$\varepsilon\gamma\lambda$L der volle Schatten ſeyn würde. Beyde Schatten haben den Raum E*eh*λL gemein, und dies iſt der geſuchte volle Schatten des Prisma. Man könnte nemlich für jede verticale Linie zwiſchen AB und CD in der Thüröfnung, eben ſo einen Schatten finden, dieſe würden alle zwiſchen den Gränzen L*l* und Eε liegen, und alle würden den Raum E*eh*λL gemein haben, mithin kann kein Punct der Thür-Oefnung dahin ſcheinen. Rückte AB in CD, und bliebe während der Bewegung beſtändig vertical, ſo würde *g* in grader Linie nach γ rücken, und *g*γ wird mit BC parallel ſeyn.

Wäre PBCQ eine Fenſter-Oefnung, und APQD die Brüſtung unter derſelben, ſo müſte man die verticalen Seitenlinien BP, CQ bis auf den Boden in A und D verlängern, und übrigens ſich bey Verzeichnung des Schattens eben ſo verhalten.

172 §.

Das Tageslicht, was durch eine Fenſter- oder Thüröfnung in ein Zimmer fällt, kann ſich nicht in alle Winkel des Zimmers gleich ſtark ausbreiten. Der Fußboden des Zimmers iſt allemahl weit heller, als die Decke, beſonders im untern Stockwerk eines Gebäudes, weil von oben herab weit mehr Licht, als von unten hinauf fällt. Wie ſtark die Seitenwände erleuchtet ſind, das kommt auf die Lage und Anzahl der Fenſter-Oefnungen an, und eine Wand zwiſchen zweenen Fenſter-Oefnungen mit ihnen in einerley Ebene iſt allemahl weniger erleuchtet, als eine gegen überſtehende, wofern nicht gegen über ebenfalls Fenſter-Ofnungen ſind. Zu einer genauern Theorie von den verſchiedenen Graden der Erleuchtung wird zwar die Photometrie beſondre Anleitungen geben: indeſſen bedarf der Zeichner keiner ſo gar genauen Anwendung jener Theorien, ob ſie ihm gleich bey regelmäßiger Vertheilung des Lichts und Schattens in der Zeichnung vorzüglich gute Dienſte leiſten, wenn er mit ihnen bekannt iſt. Es giebt in jedem Zimmer, das nur in einer Seitenwand Fenſter-Oefnungen hat, Stellen, wohin kein andres, als zurückgeworfenes Licht fallen kann, und dieſe ſieht man als ſolche an, die in vollen Schatten liegen, weil ſie merklich dunkler als die übrigen ſind. Den Grund davon, und die Art dieſen Schatten zu zeichnen, wird man aus folgendem Beyſpiel kennen lernen.

172. §.

Weil jede Mauer einige Dicke hat, ſo muß
82 F. man bey jeder Fenſter- oder Thür-Oefnung die innere

Oef-

Oefnung ABCD von der äuſſern *abcd* unterſcheiden. Durch die äuſſere *abcd* fällt eigentlich das Licht in das Zimmer hinein, und wegen der Dicke der Mauer kann es ſich zu beyden Seiten, imgleichen nach oben und unten nicht gleich ſtark ausbreiten. Man verlängere *ad* und *bc* bis ſie den horizontalen Fuß-Boden in *e* und *f*, die horizontale Ebene der Zimmerdecke aber in *n* und *o* treffen. Eben ſo verlängere man AD und BC nach unten in E und F, nach oben in N und O. Man ziehe *d*A und *e*E, die einander in G ſchneiden, und durch G mit EF die Parallele HI, ſo iſt der Raum zwiſchen *gh* und GI beſchattet. Eben ſo ziehe man *a*D und *n*N, die einander in P ſchneiden, und durch P mit N*o* eine Parallele QS, ſo iſt an der Decke des Zimmers der Raum zwiſchen *kl* und QS beſchattet.

Weiter ziehe man *f*EK und *e*FL, ſo liegt auch der Raum der Winkels *g*EK und *h*FL im Schatten: und wenn in der Ebene der Decke des Zimmers *o*N und *n*O gezogen werden, ſo liegen die Winkel *k*NM und *l*O*m* ebenfalls im Schatten. Die Ebene der Parallelen *of* und EN wird den Fußboden in EK, die Decke in NM, und die Seiten-Wand *pkgq* zur Linken in KM ſchneiden, da dann KM mit EN und *gk* parallel iſt, weil die Ebene E*ed*D mit der Wand *pqgk* parallel iſt. Weil nun der ganze priſmatiſche Raum E*g*KM*k*N beſchattet iſt, ſo liegen die Rechtecke M*kg*K und N*kg*E gleichfalls im Schatten. Wegen der Decke iſt vorhin ſchon bemerkt, daß ſie überhaupt weit ſchwächer als der Fußboden erleuchtet ſey, weil die Erleuchtung von unten nur vom zu-

rück geworfenen Licht herrührt. An der Gränze QS ſind Licht und Schatten ziemlich kenntlich abgeſchnitten, weiter rückwärts aber gegen *ps* zu wird die Erleuchtung wieder ſchwächer.

174. §.

Wenn man auf dem horizontalen Fußboden die Parallelen E*e* und F*f* nach φ und ψ erweitert, ſo erhellet, daß nur diejenigen Sachen, welche zwiſchen dieſen Parallelen auf dem Fußboden ſtehen von allen demjenigen Tageslicht erleuchtet werden, was zwiſchen den Parallelen *ad* und *bc* hineinfällt. Seitwärts ſtehende Sachen, wie das Prisma $\alpha\beta\gamma\delta$ empfangen nur ſo viel Licht, als zwiſchen den Parallelen *ad* und BC dahin durchfallen kann, und es iſt in Anſehung derſelben eben ſo viel, als wenn die Fenſter-Oefnung eine geringere Breite hätte. Will man demnach den Regeln des 170 §. gemäß den Schatten des Prismen zeichnen, ſo muß man ſich dabey ſo verhalten, als wenn *adru* die Oefnung wäre, durch welche das Licht hinein fiele, deswegen müſſen die Linien αk, $\varepsilon\lambda$, $\delta\mu$, für den Halbſchatten $\alpha k\lambda\mu\delta$ in den Punct F, ſo wie die Linien βk, $\xi\lambda$, $\gamma\mu$ in den Punct *r* laufen.

175 §.

Will man bey der Perſpectiviſchen Entwerfung des Proſpects einer Landſchaft vorausſetzen, daß der Himmel mit Wolken bedeckt ſey; ſo muß der Schatten, welcher von den Strahlen der wolkenfrey ſcheinenden Sonne herrührt, und den obigen im 163. u.

f.

f. §. §. gemäß zu zeichnen wäre, wegbleiben. Statt deſſen wird nun die Gegend von der ganzen ſcheinbaren Halbkugel des Himmels erleuchtet, und da giebt es wiederum eine Art von Schatten, deſſen eigentliche Gränzen in jedem Fall zu ſuchen, auch die ſtärkere oder geringere Dunkelheit deſſelben zu beſtimmen, ziemlich umſtändliche Unterſuchungen erfordern würde. Letzteres iſt wiederum eigentlich ein Geſchäfte der Photometrie, und in Anſehung des erſtern können hier einige allgemeine Anmerkungen genügen.

Der Boden, welcher am Fuß einer Mauer liegt, wird nur von dem halben Himmel beſchienen, mithin iſt derſelbe nicht ſo erleuchtet, als andre Stellen, worauf das Licht von dem ganzen Himmel fallen kann: er muß deswegen leicht ſchattirt werden. Wenn zwo Mauren rechtwinklicht zuſammen ſtoſſen, ſo wird der Boden unten in der Ecke nur von dem vierten Theil des Himmels beſchienen, er iſt alſo wiederum weniger erleuchtet, und muß noch ſtärker ſchattirt werden. Eben ſo verhält es ſich mit einer engen Gaſſe, und jedem andern durch umſtehende hohe Gebäude, Bäume, und dergleichen eingeſchloſſenen Platz: er iſt deſto dunkler je kleiner derjenige Theil des Himmels iſt, der ſein Licht dahin werfen kann. Die Geſetze, nach welchen man dieſe verſchiedenen Grade der Erleuchtung unter einander vergleichen kann, wird die Photometrie erklären; und die Kunſt, die Schwärze des Schattens in der Zeichnung nach dieſen Gründen zu mäßigen, iſt eine Sache für den geübten Mahler und Zeichner: ſo wie überhaupt die feinere Ausbildung aller Theile einer

perſpectiviſchen Zeichnung, die Kunſt der Farben, und der natürlichen Austheilung des Lichts und Schattens ein Eigenthum der Mahlerkunſt bleibet, deren Reichthum die Perſpectiv, in wie fern ſie eine geometriſche Wiſſenſchaft iſt, nicht erſchöpfen kann.

Der XII. Abſchnitt.

Regeln zur Prüfung und Beurtheilung perſpectiviſcher Gemählde, auch zur geſchickten Nachahmung guter Muſter.

176 §.

In jedem Perſpectiviſchen Gemählde hängt die Gröſſe und Lage aller Theile gegen einander von der Lage der Horizontallinie, der darauf befindlichen Stelle des Augenpuncts, der Höhe des Auges über dem Horizont des Gemähldes, dem Abſtand des Auges von der Tafel, und der Lage der Tafel gegen den Horizont des Gemähldes ab: und ſo lange man mit der Zeichnung ſelbſt beſchäftiget iſt, kann man der genannten Stücke gar nicht entbehren. Die Horizontallinie des Auges, und die mit ihr parallele Grund-

Grundlinie des Horizonts müſſe gleich anfangs auf der Tafel gezogen ſeyn, und ihr Abſtand von einander iſt die Höhe des Auges. Den Augenpunct nebſt dem Abſtand des Auges braucht man ſogleich bey der Eintheilung der Horizontallinie, und wenn man dieſe eingetheilt vor ſich hat, ſo iſt die Entfernung vom Augenpunct bis zum 45ſten Grad der Abſtand des Auges. Nach völliger Ausarbeitung des Gemähldes aber bleiben dieſe beym Entwurf der Zeichnung als Hülfsmittel gebrauchte Stücke weg, und der Kenner muß die Kunſt verſtehen, dieſe weggelaſſenen Stücke wieder herzuſtellen. Ohne ſie zu wiſſen, läſt ſich nicht mit Sicherheit beurtheilen, ob der Zeichner den Regeln der Perſpectiv getreu geblieben iſt: und wenn jemand zur Uebung ein gutes Muſter nachzeichnen will, ſo muß er vor allen Dingen dieſe Hülfsmittel, nach welchen der Zeichner gearbeitet hat, wieder zu finden wiſſen, weil er dem Meiſter in der Anwendung der Regeln ſeiner Kunſt ſonſt nicht folgen, und ihm die gebrauchten Kunſtgriffe nicht ablernen kann. Eine Uebung dieſer Art iſt einem jeden anzurathen, der ein geſchickter Zeichner zu werden wünſcht. Hat der Zeichner, deſſen Arbeit man ſich zum Muſter nimmt, die Regeln des IX. Abſchnitts zur geſchickten Wahl der Lage des Auges, und andre Maximen, welche dazu gedient haben, der Zeichnung ein ſchönes Anſehen zu geben, in Anwendung gebracht; ſo kann man ſelbigen auf dieſem Wege nachſpüren, und ſich dadurch geſchickt machen, ähnliche und allenfalls noch beſſere Maximen bey eigenen Arbeiten in Anwendung zu bringen.

177. §.

Es würde in manchen Fällen ſchwer ſeyn, das alles was ſich auf die Lage des Auges gegen die Tafel beziehet, aus Betrachtung der Zeichnung wieder zu finden, wenn nicht theils die Natur der abgebildeten Gegenſtände ſelbſt, theils die Gewohnheit, welche bey der Zeichnung perſpectiviſcher Gemählde eingeführet iſt, dazu allerley Hülfsmittel an die Hand gäben, wovon folgende ſehr leicht bey Betrachtung derſelben wahrzunehmen ſind.

1.) Man zeichnet die Gemählde gröſtentheils ſo, daß die untere und obere Gränzlinie mit der Horizontallinie parallel ſind, und die untere Gränzlinie iſt gewöhnlich ſelbſt die Grundlinie des Horizonts. Hiemit iſt alſo die Lage der Horizontallinie bekannt.

2.) Die Tafel wird verticalſtehend angenommen, es müſten denn ganz beſondre Gründe das Gegentheil erfordern. Deswegen ſind die Bilder aller verticalen Linien ſelbſt vertical, und die Horizontallinie ſchneidet ſie ſenkrecht. Auf dem Gemählde wird aber doch gewis eine oder die andere Linie abgebildet ſeyn, wovon man ſicher vorausſetzen kann, ſie ſey vertical, z. E. die Ecklinie eines Gebäudes, ein Baum, ein Menſch, ein Thurm u. ſ. f. Jede ſolche Linie beſtimmt alſo die Lage der Horizontallinie, weil letztere auf jener ſenkrecht ſeyn muß.

3.) Auf manchen Gemählden iſt eine in der Ferne liegende Ebene, oder ein in der Ferne liegendes Gewäſſer abgebildet, und alsdenn iſt die Gränzlinie davon die Horizontallinie ſelbſt. Iſt nun die untere Gränzlinie des Gemähldes damit parallel, ſo

kann man nach der Regel annehmen, dieſe ſey die Grundlinie des Horizonts: und ſo hat man zugleich die Höhe des Auges, welche mit dem Abſtand der Horizontallinie des Auges von der Grundlinie einerley iſt.

178. §.

Wenn Gebäude auf einem Gemählde vorkommen, ſo ſtehen nicht allein die Wände vertical, ſondern ſchneiden einander auch unter rechten Winkeln. Die Grundfläche des Gebäudes wird alsdenn ein Rechteck ſeyn: und wenn, wie es oft vorkommt, eine Seitenlinie davon mit der Grundlinie parallel iſt, ſo läuft die andre in den Augenpunct, der alſo nun leicht gefunden iſt; wenn man die Horizontallinie ſchon vorher gefunden hat. Ueberdem werden wenigſtens die untern Seitenlinien der Fenſter-Rahmen horizontal, alſo mit der Grundlinie der Wand parallel laufen, und der Vereinigungspunct zweyer ſolcher Parallelen liegt allemahl in der Horizontallinie, (17 §.) wenn auch die Wand nicht auf der Tafel ſenkrecht iſt.

Dies führt auf ein andres Mittel, die Horizontallinie zu finden, wenn das im vor. §. angegebene Mittel nicht anwendlich wäre. Hat man zwey Paar ſolcher Parallellinien, ſo verlängere man die zu jedem Paar zugehörige, bis man ihren Durchſchnittspunct findet. Die grade Linie zwiſchen beyden Durchſchnittspuncten iſt die Horizontallinie. Ein Paar ſolcher Parallelen in der horizontalen Grundfläche iſt ſchon hinlänglich, wenn nur auf der Zeichnung ein Bild einer verticalen Linie vorkommt.

Denn der Durchſchnittspunct derſelben liegt in der Horizontallinie, man ziehe alſo durch dieſen Durchſchnittspunct eine Linie, welche das Bild der verticalen Linie ſenkrecht ſchneidet, ſo hat man die Horizontallinie.

179. §.

1.) Jedes auf der horizontalen Grundfläche liegende Parallelogramm wird demnach ein Mittel die Horizontallinie zu finden. Man verlängert jede zwo einander gegen über liegende Seitenlinien, bis man ihren Durchſchnittspunct findet: die Linie durch beyde Durchſchnittspuncte iſt die Horizontallinie.

2.) Weis man, daß das Parallelogramm ein Rechteck, und eine Seitenlinie deſſelben mit der Grundlinie parallel ſey; ſo läuft die gegen überſtehende ebenfalls damit parallel, die beyden übrigen aber ſchneiden einander im Augenpunct: mithin findet man vermittelſt des Rechtecks alsdenn nicht allein die Horizontallinie, ſondern zugleich in derſelben den Augenpunct.

3.) Und wenn bey derſelben zuletzt angenommene Vorausſetzung überdem bekannt iſt, daß das Rechteck ein Quadrat ſey, ſo läuft die Diagonallinie in den 45ſten Grad der Horizontallinie, deſſen Abſtand vom Augenpunct dem Abſtand des Auges von der Tafel gleich iſt. Man hat demnach in dieſem Fall die Horizontallinie, in derſelben den Augenpunct, und zugleich den Abſtand des Auges.

180. §.

Die Lage und Gröſſe eines auf der hori-

rizontalen Grundfläche liegenden in der Zeichnung abgebildeten Winkels iſt bekannt: man ſoll den Augenpunct nebſt dem Abſtand des Auges finden, vorausgeſetzt, daß die Horizontallinie ſchon bekannt ſey.

Aufl. Es ſey f das Bild eines Winkels φ, 83 F. und der durch fP abgebildete Schenkel ſey gegen die Grundlinie der Tafel unter einem Winkel $= \eta$ geneigt. Man verlängere beyde Schenkel des Bildes bis ſie mit der ſchon als bekannt angenommenen Horizontallinie in P und p zuſammen ſtoſſen, und zeichne an Pp die Winkel $pPK = PpK = 90° - \varphi$, ſo giebt ſich der Mittelpunct eines Kreiſes, deſſen Umfang durch P und p gehet, worin dem 144 §. gemäß das Auge ſtehet. Weiter mache man den Winkel $pPO = \eta$, oder welches einerley iſt, den Winkel $pKO = 2\eta$, ſo iſt O die Stelle des Auges: und wenn hiernächſt OR auf die Horizontallinie ſenkrecht geſetzt wird; ſo iſt R der Augenpunct, und RO der Abſtand des Auges. Es muß nemlich vermöge des 18 §. $PR = D\cot\eta$ ſeyn, wenn R der Augenpunct iſt, wenn alſo $RPO = \eta$ gemacht wird, ſo muß PO durch die Stelle des Auges laufen, mithin muß da, wo PO den Umfang des Kreiſes ſchneidet, die Stelle des Auges ſeyn.

Will man die Zeichnung nicht mit Linien überziehen; ſo läſt ſich auch alles durch Rechnung finden. Man ſehe nemlich pP als eine bekannte Linie an, ſetze $pP = c$, und den Abſtand des Mittelpuncts $KL = k$; ſo iſt der Halbmeſſer des Kreiſes durch P, O, p, $= \frac{1}{2}c.\mathrm{coſec}\,\varphi$: überdem iſt auch $k = \frac{1}{2}c.\cot\varphi$ bekannt, und man hat für den Kreis zwiſchen $pR = x$, und

RO $=$ D die Gleichung $x(c+x) = D(2K-D)$ (144 §.) Hier muß nun $x = D\cot\eta - c$ ſeyn, und dieſer Werth in die Gleichung geſetzt giebt $(D\cot\eta - c) D\cot\eta = D(2k-D)$ oder $D\cot\eta^2 - c.\cot\eta = 2k - D$, und daraus folgt $D\operatorname{coſec}\eta^2 = 2k + c.\cot\eta$, mithin $D = 2k\sin\eta^2 + c.\cos\eta\sin\eta$. Weil nun $PR = D\cot\eta$ ſeyn muß, ſo nehme man $PR = 2k\sin\eta\cos\eta + c.\cos\eta^2$, ſo iſt R der Augenpunct. Setzt man $\frac{1}{2}c.\cot\phi$ ſtatt k, ſo iſt $PR = c.\cot\phi\sin\eta\cos\eta + c.\cos\eta^2 = c.(\cot\phi\sin\eta + \cos\eta)\cos\eta$, und $D = RO = c\cot\phi\sin\eta^2 + c.\cos\eta\sin\eta = c(\cot\phi\sin\eta + \cos\eta)\sin\eta$.

Die Richtigkeit dieſer Formuln läſt ſich auch ſo überſehen. Es iſt der Bogen Pp das Maaß eines Winkels $= 2\phi$, und der Bogen pO das Maaß eines Winkels $= 2\eta$, mithin PpO das Maaß eines Winkels $= 2(\eta + \phi)$. Man ſetze den Halbmeſſer des Kreiſes $= r$, ſo iſt $PO = r.\text{chord. A}.2\phi = 2r.\sin(\eta + \phi) = 2r(\sin\eta\cos\phi + \cos\eta\sin\phi$. Ferner iſt $r = \frac{1}{2}c.\operatorname{coſec}\phi = \dfrac{\frac{1}{2}c}{\sin\phi}$, mithin wird $PO = c.(\sin\eta\cot\phi + \cos\eta)$, und das giebt $RO = PO\sin\eta = c.(\sin\eta\cot\phi + \cos\eta)\sin\eta$, und $PR = c.(\sin\eta\cot\phi + \cos\eta)\cos\eta$, wie vorhin.

181. §.

Wenn demnach $efgh$ das Bild eines Parallelogramms von bekannter Lage in der horizontalen Grundfläche iſt, und die Winkel deſſelben ebenfalls bekannt ſind; ſo kann man die Horizontallinie, den Augenpunct, und den Abſtand des Auges finden. Denn die Vereini=

gungs=

gungspuncte P und p der perſpectiviſchen Parallelen ef, gh, und eh, fg, liegen in der Horizontallinie, welche alſo durch dieſe Puncte gezogen werden kann. Wenn nun die durch fe abgebildete Linie gegen die Grundlinie unter dem Winkel η geneigt, und der durch efg abgebildete Winkel $= \varphi$ iſt, ſo verfährt man übrigens nach den eben ertheilten Vorſchriften.

Iſt das Parallelogramm ein Rechteck, mithin $efg = \varphi = 90°$, ſo wird $k = 0$, der Halbmeſſer $r = \frac{1}{2}c$, und die Stelle des Auges liegt in einem Halbkreiſe, deſſen Durchmeſſer Pp iſt. Alsdenn hat man $PR = c \,.\, \cos\eta^2$, und $RO = c \sin\eta \cos\eta = \frac{1}{2}c \sin 2\eta$. 84 F.

182. §.

Die Horizontallinie iſt gegeben, nebſt der Gröſſe zweyer in der horizontalen Grundfläche liegenden durch efg und EFG abgebildeten Winkel, deren Schenkel einander nicht parallel ſind: man ſoll den Augenpunct und den Abſtand des Auges finden. 83 F.

Aufl. Man verlängere die Schenkel der Bilder beyder Winkel bis an die Horizontallinie in P, p, Π, π, und wenn efg das Bild eines Winkels $= \varphi$, EFG aber das Bild eines Winkels $= \psi$ iſt; ſo verzeichne man über der Sehne $Pp = c$ einen Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{cosec}\varphi$ iſt, über $\Pi\pi = e$ aber einen Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \frac{1}{2}e \,.\, \operatorname{cosec}\psi$ iſt, nach Anleitung des vor. §. Weil nun die Stelle des Auges gewiß in beyden Kreiſen zugleich liegt, ſo werden ſie einander gewiß ſchneiden, aber vermöge der bekannten Eigenſchaften des Kreiſes in zweenen

Punc-

Puncten O und *o*. Dafern nun dieſe Durchſchnitspuncte auf verſchiedenen Seiten der Horizontallinie
84 F. liegen, wie in der 84 Fig. ſo iſt die Stelle des Auges nicht zweifelhaft, und man muß denjenigen Durchſchnittspunct O dafür annehmen, der unter der Horizontallinie liegt: (vor der Horizontallinie, wenn man ſich die Ebene des Kreiſes, wie eigentlich geſchehen muß, horizontal vorſtellet,) alsdenn läßt man OR auf die Horizontallinie ſenkrecht fallen; ſo iſt R der Augenpunct, und RO der Abſtand des Auges. Fallen beyde Durchſchnittspuncte O und *o* unter der Horizontallinie wie in der 83 Fig., ſo beſtimmen die data nicht völlig, welcher von beyden Durchſchnittspuncten die Stelle des Auges ſey; wenn man aber nur die Lage eines der Schenkel wie *fe* beyläufig weis, ſo läßt ſich ſchon die eigentliche Stelle des Auges beſtimmen, weil *p*PO dem Abweichungswinkel des durch *fe* abgebildeten Schenkels von der Grundlinie der Tafel gleich ſeyn muß.

Bey der Rechnung kann man ſich ſo verhalten. Es ſey $pR = x$, $KL = k$, $kl = K$, ſo iſt $k = \frac{1}{2}c.\cot\varphi$ und $K = \frac{1}{2}e.\cot\psi$: alsdann aber hat man für den Kreis P*p*O die Gleichung $x(c+x) = (2k - D)D$. (144 §.) Um die Formuln deſto mehr abzukürzen, kann man hier $LR = t$ ſetzen, ſo iſt $t = \frac{1}{2}c + x$, und es wird $x = t - \frac{1}{2}c$. Dieſer Werth ſtatt x gebraucht giebt die Gleichung $(t - \frac{1}{2}c)(t + \frac{1}{2}c) = 2kD - DD$, oder $t^2 = \frac{1}{4}c^2 + 2kD - DD$. Setzt man überdem $lR = w$, ſo hat man eben ſo für den andern Kreis $w^2 = \frac{1}{4}e^2 + 2K.D - DD$. Weiter ſey $Ll = h$, ſo iſt $t + w = h$, und $w = h - t$, folglich wird aus der zweyten Gleichung folgende: $t^2 - 2ht + h^2 = \frac{1}{4}e^2 + 2K.$

D—

D−DD. Die erſte Gleichung zwiſchen t und D von dieſer abgezogenen giebt $h^2 - 2h.t = \frac{1}{4}(e^2 - c^2) + 2(K-k)D$, und daraus folgt ferner $h^2 - \frac{1}{4}(e^2 - c^2) - 2(K-k).D = 2h.t$, oder auch $\frac{h^2 - \frac{1}{4}(e^2 - c^2)}{2h}$

$- \frac{K-k}{h} . D = t$. Man ſetze um abzukürzen,

$\frac{h^2 - \frac{1}{4}(e^2 - c^2)}{2h} = A$ und $\frac{K-k}{h} = n$, ſo hat

man $A - nD = t$, und wenn ferner der Werth $tt = \frac{1}{4}c^2 + 2kD - DD$ gebraucht wird, ſo ergiebt ſich für D die Gleichung $A^2 - 2nA.D + n^2.D^2 = \frac{1}{4}c^2 + 2kD - DD$, oder gehörig geordnet $(n^2 + 1)D^2 - 2(nA + k).D = \frac{1}{4}c^2 - A^2$. Daraus folgt $D^2 - \frac{2(nA+k)}{n^2+1} . D = \frac{\frac{1}{4}c^2 - A^2}{n^2+1}$

und man findet

$$D = \frac{nA + k \pm \surd((nA+k)^2 + (n^2+1)(\frac{1}{4}c^2 - A^2))}{n^2+1};$$

da dann, wenn eine von beyden Wurzeln poſitiv, die andre negativ gefunden wird, wie bey Anwendung der Rechnung auf die 84 Fig. geſchehen würde, die poſitive die geſuchte iſt. Aus D wird hiernächſt vermittelſt der Gleichung $t = \surd(\frac{1}{4}c^2 + 2kD - DD)$ auch $t = LR$ und hiemit der Augenpunct gefunden. Die Gleichung iſt ebenfalls quadratiſch, und man findet zwey verſchiedene Werthe von t, welches daher kommt, weil der Kreis auf der andern Seite von L noch eine Ordinate von eben der Gröſſe wie RO hat, wozu eine eben ſo groſſe der vorigen entgegen

gen geſetzte Abſciſſe gehört. Eine davon aber haben beyde Kreiſe nur gemein, und es iſt in jedem beſondern Fall leicht zu beurtheilen, welche von den beyden Abſciſſen, die man vermittelſt der Gleichung findet, der beyden Kreiſe gemeinſchaftlichen Ordinate zugehöre: das iſt hier die geſuchte.

84 F. Wenn beyde Winkel φ und ψ rechte Winkel ſind, ſo kürzen ſich die Formuln weit mehr ab. Alsdenn hat man $K = k = o$, mithin auch $n = \frac{K - k}{h} = o$. Das giebt $D = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - A^2)}$, und $t = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - D^2)}$, oder $t = A = \frac{h^2 - \frac{1}{4}(e^2 - c^2)}{2h} = \frac{1}{2}h - \frac{(e+c)(e-c)}{8h}$. Die Bogen $PO p$ und $\Pi O \pi$ werden in dieſem Fall Halbkreiſe über Pp und $\Pi\pi$ als ihre Durchmeſſer, und ihr Durchſchnittspunct O iſt die Stelle des Auges.

Uebrigens erhellet, daß durch Auflöſung dieſer Aufgabe zugleich die Lage beyder durch efg und EFG abgebildeten Winkel in der horizontalen Grundfläche gefunden werde. Die Verzeichnung giebt nemlich die Winkel $OPR = \eta$, und $O\Pi R = \varepsilon$ ſelbſt, unter welchen die durch ef, FG abgebildeten Schenkel gegen die Grundlinie der Tafel geneigt ſind. Will man ſie durch Rechnung ſuchen; ſo hat man $\tang \eta = \frac{OR}{PR} = \frac{D}{\frac{1}{2}c + t}$, und $\tang \varepsilon = \frac{OR}{\Pi R} = \frac{D}{\frac{1}{2}e + h - t}$.

183 §.

Es ſind *efgh*, EFGH die Bilder zweyer Parallelogramme, die in der horizontalen Grundlinie nicht einerley Lage haben, und die Winkel dieſer Parallelogramme ſind bekannt: man ſoll die Horizontallinie, den Augenpunct, und den Abſtand des Auges finden.

Aufl. An ſich kann ſchon das Bild eines Pa- 83
rallelogramms *efgh* genügen, dem 181 §. gemäß 85 F.
die Horizontallinie zu finden, weil die Vereinigungspuncte P und *p* der perſpectiviſchen Parallelen *ef*, *gh*, und *eh*, *fg*, in der Horizontallinie liegen. Weis man nun, daß EFGH auch ein Parallelogramm in der horizontalen Grundfläche ſey, ſo müſſen die Vereinigungspuncte Π, π, der Parallelen EF, GH, und EH, FG, ebenfalls in der graden Linie P*p* liegen: widrigenfalls wäre die Zeichnung fehlerhaft. Weil nun überdem die Winkel beyder Parallelogramme als bekannt angenommen werden, ſo kann man aus den Winkeln *efg* und EFG, wie im vor. §. iſt gelehrt worden, auch den Augenpunct nebſt dem Abſtand des Auges finden.

Sind dieſe Parallelogramme Rechtecke, wie in 84 F.
der 84 Fig. ſo wird die Stelle O des Auges durch beyde Halbkreiſe PO*p*, ΠOπ, über P*p* und Ππ als ihre Durchmeſſer, völlig beſtimmt, weil ſie nur einen Durchſchnittspunct unter der Horizontallinie haben.

184 §.

Das Bild *efgh* eines Parallelogramms in 86 F.
der horizontalen Grundfläche iſt gegeben,

auch ſind die Winkel nebſt dem Verhältniß der Seitenlinien dieſes Parallelogramms bekannt: man ſoll die Horizontallinie, den Augenpunct, und den Abſtand des Auges finden.

Aufl. Die Vereinigungspuncte P und p der parallelen Seitenlinien geben die Horizontallinie, und weil der Winkel $efg = \varphi$ bekannt iſt, ſo ſteht das Auge in einem Kreisbogen P O p, deſſen Halbmeſſer $= \frac{1}{2} c . \text{coſec} . \varphi$ (180 §.) Weil ferner das Verhältniß der Seitenlinien gegeben iſt, ſo hat man $\text{tang} . heg = \dfrac{hg . \text{ſin} . efg}{eh - hg . \text{coſ} . efg}$. Dieſen Winkel heg nehme man $= \psi$ an, wie im 182 §. verlängere die Diagonale eg bis Π, ſo fallen hier die Puncte π und p (182 §.) zuſammen, und man ſetzt über $\pi\Pi$ einen Kreisbogen, deſſen Halbmeſſer $= \frac{1}{2} \pi\Pi . \text{coſec} \psi$ iſt. Dieſer Bogen wird den über Pp beſchriebenen in O und p ſchneiden: mithin iſt O die Stelle des Auges, die Linie OR auf PΠ ſenkrecht gezogen, iſt der Abſtand des Auges, und R der Augenpunct.

Dies iſt alſo ebenfalls einer von ſolchen Fällen, wo das geſuchte ganz beſtimmt gefunden wird, weil der eine Werth von D $= 0$ ſeyn muß. Die obigen Formuln im 182 §. ſtimmen auch hiemit ſehr wohl überein. Denn man hat in dieſem Fall $Ll = h = \frac{1}{2}(e + c)$, alſo $2h = e + c$, und $h^2 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{2} ec + \frac{1}{4} c^2$. Das giebt $A = \dfrac{h^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} c^2}{2h}$ (182 §.) $= \dfrac{\frac{1}{2} ec + \frac{1}{2} . c^2}{e + c} = \frac{1}{2} c$. Wenn aber im 182 §.

in

in der Gleichung für D der Werth $\frac{1}{2}c = A$ geſetzt wird, ſo findet man $D = \frac{nA + k \pm (nA + k)}{n^2 + 1}$; mithin wird der eine Werth $= 0$, und der andre $= 2(nA + k)$. Uebrigens bleibt $t = LR = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + 2k \cdot D - DD)}$.

Wäre das Parallelogramm ein Rechteck, ſo hätte man $\varphi = 90°$, mithin $\cot\varphi = 0$, und $\operatorname{coſec}\varphi = 1$: alſo $k = \frac{1}{2}c . \cot\varphi = 0$, K fiele mit L zuſammen, und der Bogen POp würde ein Halbkreis, mithin würde $\operatorname{tang}\psi = \frac{hg}{eh}$, und $D = 2nA$, ſo wie $t = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - DD)}$.

Man kann bey Auflöſung dieſer Aufgabe auch die Diagonale fh brauchen, und ſie bis an die Horizontallinie in q verlängern. Alsdann hat man $\operatorname{tang} gfh = \operatorname{tang}\psi = \frac{gh . \operatorname{ſin} . efg}{fg + gh . \operatorname{coſ} . efg}$: überdem hat gfh eine Lage, die der Lage des Winkels heg entgegen geſetzt iſt. Bey der Zeichnung ſelbſt ändert dies nichts; denn $gfh = \psi$ angenommen führt man durch p und q ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \frac{1}{2}e \operatorname{coſec}\psi$ iſt, $pq = e$ geſetzt, ſo giebt ſein Durchſchnittspunct O mit dem Halbkreiſe über Pp die Stelle des Auges.

Bey der Rechnung muß man aber erwegen, daß nun q der Punct ſey, der vorhin Π hies, und daß derſelbe jetzt linker Hand des Puncts π falle, mithin e in Anſehung von c die entgegen geſetzte Lage habe, und in ſo fern e hier negativ angenommen wer-

den müſſe. Dieſemnach hat man $h = \frac{1}{2}(c - e)$. Uebrigens bleibt $K = \frac{1}{2}e.\cot\psi$, und man hat wie vorhin $D = 2(nA + k)$. Wenn $efg = \phi = 90°$ wäre, ſo würden die Winkel heg und gfh gleich groß ſeyn, und man hätte in beyden Fällen $\tan\psi = \frac{gh}{eh} = \frac{gh}{fg}$.

So wie $pO\Pi$ dem durch heg abgebildeten Winkel ψ gleich, und der halbe Bogen $pM\Pi$ das Maaß deſſelben iſt: eben ſo iſt pOq dem durch $gfh = \psi$ abgebildeten Winkel gleich; und wenn Oq den um K beſchriebenen Kreis in Q trift, ſo iſt der halbe Bogen pQ das Maaß des Winkels ψ, und darauf gründet ſich folgende leichte Verzeichnung. Man zählt im Umfang des Kreiſes um K von p nach Q doppelt ſo viele Grade, als der Winkel ψ faſſet, oder welches einerley iſt, man macht den Winkel $pKQ = 2\psi$, und ziehet die grade Linie Qq, ſo giebt ihr zweyter Durchſchnittspunct O mit dem Kreiſe um L die Stelle des Auges.

185 §.

Man bedient ſich bey perſpectiviſchen Zeichnungen des verjüngten Maaßſtabes eben ſo, wie bey Geometriſchen Zeichnungen: (27 §.) und der geometriſchen Zeichnung wird der Maaßſtab, deſſen ſich der Zeichner bedient hat, um deswillen allemahl beygefügt, damit ein jeder vermittelſt deſſelben alle Theile der Zeichnung nach Gefallen ausmeſſen könne. Dieſemnach wäre es zu eben der Abſicht gleichfalls ganz bequem, wenn man einer perſpectiviſchen Zeichnung den Maaßſtab, deſſen man ſich bedient hat,

gleichfalls beyfügte: nach dieſem Maaßſtabe müſten alsdenn die Linien Pp, $\Pi\pi$, Ll auf der Tafel gemeſ- 83
ſen werden, um die Aufgaben des 183 und 184 §. 86 F.
durch Rechnung aufzulöſen. Hätte man dieſen Maaßſtab, ſo würde, wenn nach Anleitung des vor. §. die Horizontallinie, der Augenpunct und Abſtand des Auges ſchon gefunden worden, auch noch die Höhe des Auges, mithin zugleich die Grundlinie, gefunden werden können: vorausgeſetzt, daß auſſer den vorigen datis noch die geometriſche Länge der durch ef abgebildeten Seitenlinie des Parallelogramms gegeben ſey. Jede andre auf der Tafel befindliche Linie, die eine in der horizontalen Grundfläche liegende Linie von bekannter Gröſſe abbildet, würde zu eben der Abſicht dienen können, und das würde folgende Aufgabe veranlaſſen.

186 §.

Die Horizontallinie, der Augenpunct und 86 F.
Abſtand des Auges ſind ſchon bekannt, auch iſt der Maaßſtab FN gegeben, der bey Verfertigung der perſpectiviſchen Zeichnung iſt gebraucht worden; überdem weis man die geometriſche Länge einer graden Linie in der Grundfläche, die durch eine auf der Tafel gegebene ef abgebildet wird, man ſoll die Höhe des Auges finden.

Aufl. Man verlängere fe bis an die Horizontallinie in P, trage PO aus P in ω, und ziehe ωe, hierauf aber fc mit der Horizontallinie parallel: ſo iſt cf in verkürzten Füſſen ſo lang, als ef in geometriſchen Füſſen. (35 §.) Demnach laſſe man fH

auf die Horizontallinie ſenkrecht fallen, nehme auf dem gegebenen Maaßſtabe FN ein Stück FC von ſo viel geometriſchen Fuſſen, als fc verkürzte und fe vertiefte faſſet; ſo iſt die Höhe des Auges $a = RT = \frac{FC}{fc} \cdot fH$. (35 §.)

Um alſo dieſe Höhe durch Zeichnung zu finden, trage man FC von H nach B, und ziehe durch B mit Hc eine Parallele, welche Hf in G ſchneiden wird, ſo iſt GH die Höhe des Auges, und eine Linie durch G mit der Horizontallinie parallel gezogen iſt die Grundlinie.

Will man lieber rechnen als zeichnen: ſo lege man nur das Lineal an ef, und bemerke den Punct P, damit man Pe meſſen könne: alsdenn iſt $cf = \frac{ef}{Pe} \cdot P\omega = \frac{ef}{Pe} D \operatorname{coſec} \eta$, mithin $a = \frac{Pe}{ef} \cdot \frac{FC}{D \operatorname{coſec} \eta} \cdot fH$.

187. §.

Man ſiehet aus dieſem allen, daß das Bild eines einzigen Parallelogramms, deſſen Seiten und Winkel bekannt ſind, es ſey übrigens ſchiefwinklicht, oder rechtwinklicht, genügen könne, die Horizontallinie, den Augenpunct, den Abſtand des Auges, und überdem auch, wenn der Maasſtab bekannt iſt, den der Zeichner gebraucht hat, die Höhe des Auges zu finden. Weil es aber eben nicht gewöhnlich iſt, daß man den perſpectiviſchen Zeichnungen einen Maaßſtab beyfüget, ſo kann man denſelben nicht als ein

ein datum annehmen: man muß ihm vielmehr ſelbſt aus der Zeichnung wieder zu finden ſuchen, und das bisherige giebt ſchon einige Hülfsmittel dazu an die Hand. Vermittelſt der bisher gelehrten Methoden kann man die Horizontallinie, den Augenpunct, und den Abſtand des Auges finden, ohne daß man den Maaßſtab ſelbſt nöthig hätte, den der Zeichner gebraucht hat. Man findet entweder alles unmittelbar durch Zeichnung; oder wenn man auch durch Rechnung LR und RO ſuchen will; ſo kann man anfangs Pp, Ππ, Ll, nach einem willkührlich gewählten Maaßſtab meſſen, da dann LR und RO in eben dieſem Maaße gefunden werden. Auf ſolche Art findet man zwar die würkliche Länge RO der Diſtanz des Auges: nur weis man noch nicht wie viele Fuſſe dieſe Diſtanz nach demjenigen Maaßſtabe faſſe, den der Zeichner gebraucht hat, weil dieſer Maaßſtab unbekannt iſt. In vielen Fällen iſt die Grundlinie der Tafel in der Zeichnung gleichſam von ſelbſt zu erkennen, oder doch wenigſtens ein Punct, wovon man urtheilen kann, daß er in dieſer Grundlinie liege, die alſo durch dieſen Punct mit der Horizontallinie parallel läuft. In Fällen dieſer Art bedarf es deſſen nicht, daß man die Höhe des Auges ſuche, weil ſie ſich von ſelbſt ergiebt, ſobald man die Horizontallinie hat, die allemahl um die Höhe des Auges von der Grundlinie entfernt iſt. Alsdenn kann man die Aufgabe des vor. §. umgekehrt auflöſen, und aus der bekannten Höhe den Maaßſtab finden, den der Zeichner gebraucht hat, ſobald man die Länge einer Linie in der Grundfläche weis, deren Bild auf der Tafel liegt.

188. §.

Es ſind alle Stücke wie im 186 §. gegeben, nur ſtatt des Maaßſtabes die Höhe des Auges: man ſoll den zur Zeichnung gehörigen Maasſtab finden.

Aufl. In der durch die Höhe des Auges bekannten Entfernung ziehe man die Grundlinie mit der Horizontallinie parallel, falls ſie nicht ſchon in der Zeichnung ſelbſt zu erkennen iſt. Ferner ſey fe das Bild einer Linie in der Grundfläche, deren geometriſche Länge bekannt iſt, und man verlängere wie im 186 §. fe bis an die Horizontallinie in P, nehme $P\omega = PO$, ziehe ωe und ωf bis an die Grundlinie in F und C, ſo iſt FC die geometriſche Länge der durch fe abgebildeten Linie. (25 §.) Weil man nun weis, wie viele Schuhe ſie lang iſt, ſo theile man FC in ſo viele gleiche Theile ein, als dieſe Anzahl ausmacht, ſo iſt jeder Theil ein Schuh des für die Zeichnung gehörigen Maaßſtabes, der ſich alſo nun verfertigen läſt.

Weil man alsdenn auch OR nach dieſem gefundenen Maaßſtab ausmeſſen kann, ſo weis man zugleich, von wie vielen Fuſſen der Zeichner den Abſtand des Auges angenommen hat. Hätte man dieſen Abſtand des Auges nach einem anfangs willkührlich gewählten Maasſtabe durch Rechnung gefunden, ſo könnte man CF in eben dieſem Maaß durch fernere Rechnung ſuchen. Es iſt nemlich $cf = \frac{ef}{Pe}$ $D \operatorname{coſec} \eta$ (186 §.) und $RT = a$, $fH = \alpha$ geſetzt, hat man $FC = \frac{a}{\alpha} \cdot fc, = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{ef}{Pe} \cdot D \operatorname{coſec} \eta$.

Die

Die Rechnung würde nun FC in dem willkührlich gewählten Maaße geben: und weil zugleich bekannt iſt, wie lang FC nach dem Maaße des Zeichners ſey, ſo läſt ſich dieſes aus jenem, mithin auch der Abſtand des Auges im Maaße des Zeichners finden.

189. §.

Wenn zwar alle übrige im 186 §. angezeigte Stücke als bekannt angenommen werden, jedoch aber mit Ausſchlieſſung des Maaßſtabes, welcher bey Verfertigung der Zeichnung iſt gebraucht worden: ſo wird die Höhe des Auges nicht beſtimmt; ob ſich gleich daraus ergiebt, von wie vielen Fuſſen der Zeichner dieſe Höhe angenommen hat. Letzteres beſtimmt aber die Höhe ſelbſt, und ihr Verhältniß zum Abſtand des Auges um deßwillen nicht, weil der Maaßſtab, mithin die eigentliche Länge dieſer Füſſe unbekannt iſt. Man erinnere ſich aus dem 186. und 35 §, daß *fc* in verkürzten Fuſſen ſo lang ſey, als die durch *fe* abgebildete Linie in geometriſchen Fuſſen, und daß *f*H von eben dieſen verkürzten Fuſſen eben ſo viele faſſe, als die Höhe des Auges geometriſche Schuhe faſſet. Demnach theile man *fc* in ſo viele gleiche Theile ein, als die durch *fe* abgebildete Linie geometriſche Schuhe faſſet, nehme die ſo eingetheilte Linie *cf* für einen Maaßſtab an, und meſſe damit *f*H; ſo wird ſich ergeben, wie viele verkürzte Schuhe *f*H faſſet, und eben ſo viele geometriſche Schuhe faſſet die Höhe des Auges. Wie groß aber der Zeichner dieſe Geometriſchen Schuhe angenommen habe, iſt noch unbekannt, weil der Maaßſtab fehlet, mithin muß ſtatt deſſelben noch ein datum mehr bekannt ſeyn, um die Höhe des Au-

ges ſelbſt ſo zu finden, daß man ſie mit der Entfernung des Auges vergleichen, und zugleich den Maaßſtaab ſelbſt wieder herſtellen kann.

190. §.

Es bleiben die im 186 §. als gegeben angenommenen Stücke: ſtatt des Maaßſtabes aber iſt die ſenkrechte Vertiefung δ eines der Endpuncte der durch *ef* abgebildeten Linie bekannt: man ſoll die Höhe des Auges finden.

Aufl. Es wird angenommen, daß man wiſſe, um wie viele Fuſſe, und zwar ſolche Fuſſe, als der Zeichner gebraucht hat, der durch *f* abgebildete Punct hinter der Tafel liegt. Die Anzahl dieſer Fuſſe ſey $= n$, und ein ſolcher Fuß $= p$, ſo iſt $\delta = np$. Weiter ſuche man nach Anleitung des 189 §. wie viele eben ſolcher Fuſſe die Höhe *a* des Auges faſſet. Dieſe Anzahl ſey $= m$, ſo hat man $a = mp$. Weil nun dem 35 §. gemäß die Verkürzung $\frac{\alpha}{a} = \frac{D}{D+\delta}$ ſeyn muß; ſo wird $\alpha = \frac{D}{D+\delta} \cdot a$, und obige Werthe *np* und *mp* ſtatt δ und *a* geſetzt geben $\alpha = \frac{D}{D+np} \cdot mp$, alſo $\frac{\alpha}{D} = \frac{mp}{D+np}$. Dies Verhältniß iſt gegeben, weil α und D gegeben ſind: (hat man D durch Rechnung gefunden, ſo kann nun α in eben dem Maaß ausgemeſſen werden, womit *c*, *e*, *h*, (182 §.) ſind ausgemeſſen worden,) demnach findet man $\frac{\alpha}{D}(D + np) = mp$, oder

$\alpha +$

$$\alpha + \frac{n\alpha}{D} \cdot p = mp, \text{ und } \alpha = \left(m - \frac{n\alpha}{D}\right)p.$$

Das giebt die Länge eines Fuſſes $p = \alpha : \left(m - \frac{n\alpha}{D}\right)$, folglich $a = mp = m\alpha : \left(m - \frac{n\alpha}{D}\right)$, oder $a = \frac{m.\alpha.D}{mD - n\alpha}$.

Wenn man dieſe gefundene Höhe in m gleiche Theile theilt, ſo hat man den Maaßſtab, deſſen ſich der Zeichner bedient hat, ebenfalls gefunden, und kann nunmehro auch D in dem Maaße des Zeichners ausdrücken: es wird nemlich $D = \frac{mD - n\alpha}{m\alpha} \cdot mp$ oder $D = \left(\frac{mD}{\alpha} - n\right) \cdot p$, da dann $\frac{D}{\alpha}$ ſchon ein bekanntes Verhältniß iſt.

191. §.

Das Verhältniß der Seiten zweyer verticalſtehender Rechtecke *afgk*, *cehi* iſt gegeben, man ſoll die Horizontallinie, den Augenpunct, und den Abſtand des Auges finden. 87 F.

Aufl. Wenn die horizontalen Seitenlinien *fg*, *ak*, und *eh*, *ci*, ſich in P und Q vereinigen, ſo iſt PQ die Horizontallinie. Durch *f* ziehe man *fb*, durch *e* aber *ed* mit der Horizontallinie parallel. Ferner ſey das Verhältniß der durch *fa* abgebildeten

Sei-

Seitenlinie zu der durch fg abgebildeten, $= 1 : m$, ſo kann man $fb = m . fa$ finden: alsdenn iſt fb im verkürzten Maaß ſo lang, als fg im vertieften Maaß, (35 §.) und wenn bg bis an die Horizontallinie in p verlängert wird, ſo iſt Pp der Abſtand des Auges von P. Ueberdem ſey das Verhältniß der durch ec abgebildeten Seitenlinie zu der durch eh abgebildeten $= 1 : n$, ſo kann man auch $ed = n . ec$ finden: da dann ed im verkürzten Maaß ſo lang iſt, als eh im vertieften Maaß, und wenn dh bis an die Horizontallinie in q verlängert wird, ſo iſt Qg der Abſtand des Auges vom Vereinigungspunct Q. (35 §.) Demnach verzeichne man aus den Mittelpuncten P und Q mit den Halbmeſſern Pp und Qq ein Paar Halbkreiſe über PQ, ſo wird ihr Durchſchnittspunct O die Stelle des Auges ſeyn, die ſenkrechte Linie OR auf PQ der Abſtand des Auges, und R der Augenpunct.

Durch Rechnung kann man alles ſo finden. Es iſt $Pp = \frac{Pg}{fg} . m . fa$, und $Qq = \frac{Qh}{eh} . n . ec$. Man ſetze ferner $Pp = PO = r$, und $Qq = QO = \varrho$, ſo hat man überdem in dem Dreyeck OPQ auch die Seite PQ; und findet nach dem 175 §. Geom. $PR = \frac{1}{2} PQ + \frac{(OP + OQ)(OP - OQ)}{2 PQ}$; hiernächſt aber $RO = D = \sqrt{(r^2 - PR^2)}$.

Die Auflöſung giebt zugleich die Winkel $OPR = \eta$, und $OQR = \varepsilon$ unter welchen fg und eh die Grundlinie ſchneiden. Wenn überdem die abſolute Gröſſe einer Seitenlinie eines der durch $afgk$, $cehi$

tschi abgebildeten Rechtecke im Maaß des Zeichners bekannt iſt, ſo hat man zugleich die Höhe des Auges in dieſem Maaß. Weis man wie lang die durch *fa* abgebildete Seitenlinie iſt, ſo theile man *fa* in ſo viele gleiche Theile, als die erwehnte dadurch abgebildete Linie in Füſſen ausgedrückt lang iſt. Hiernächſt verlängere man *fa* bis an die Horizontallinie in L, und meſſe *f*L durch *fa* als einen eingetheilten Maaßſtab; ſo iſt die Höhe des Auges im Maaß des Zeichners bekannt, nur weis man die eigentliche Länge dieſes Maaßes noch nicht. Um dieſe zu finden, müſte noch der Abſtand δ der durch *af* abgebildeten Linie von der Tafel bekannt ſeyn. Iſt dieſer Abſtand im Maaß des Zeichners gegeben, ſo kann man eben ſo, wie im 190 §. das Verhältniß zwiſchen der Höhe des Auges *a* und dem Abſtand D finden.

192 §.

Eine grade Linie PQ ſey bey A in einem willkührlichen Verhältniß getheilt, und über PQ ein Dreyeck PMQ geſetzt, deſſen Seitenlinien PM und MQ ſich wie die Stücke AP und AQ der Grundlinie verhalten: man ſucht den Ort der Spitze M dieſes Dreyecks. 88 F.

Aufl. Aus M ſey MS auf PQ ſenkrecht gezogen, und man ſetze AP $=\alpha$, AQ $=\beta$, AS $=x$, SM $=y$; ſo iſt vermöge der Bedingungen der Aufgabe $\frac{MP}{AP}=\frac{MQ}{AQ}$. Weil nun PS $=\alpha+x$ und QS $=\beta-x$ iſt, ſo erhält man

$$\frac{\sqrt{((\alpha+x)^2+y^2)}}{\alpha}=\frac{\sqrt{((\beta-x)^2+y^2)}}{\beta};$$

und

und daraus folgt $(\alpha+x)^2\beta^2+\beta^2y^2=\alpha^2(\beta-x)^2+\alpha^2y^2$. Das giebt ferner $\beta^2y^2+2\alpha\beta^2x+\beta^2x^2=\alpha^2y^2-2\alpha^2\beta x+\alpha^2x^2$, oder $(\alpha^2-\beta^2)y^2+(\alpha^2-\beta^2)x^2=2\alpha\beta(\alpha+\beta)x$, folglich

$$y^2=\frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}x-x^2.$$

Dieſe Gleichung ergiebt, daß M in einem Kreiſe liege, deſſen Halbmeſſer $=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$ iſt, oder auch $=\beta+\frac{\beta^2}{\alpha-\beta}$. Wenn alſo PQ nach C verlängert, und QC $=\frac{\beta^2}{\alpha-\beta}$ genommen wird, ſo iſt C der Mittelpunct eines Kreiſes, in deſſen Umfang die Spitzen aller Dreyecke über PQ liegen, deren Seitenlinien PM und QM ſich wie AP und AQ verhalten.

193. §.

89 F. Das Verhältniß zweyer in der horizontalen Grundfläche liegender Linien, deren Bilder *fg*, *eh*, in verſchiedene Puncte P und Q der Horizontallinie laufen, iſt gegeben: man ſoll den Ort des Auges finden.

Aufl. Durch *f* und *e* ziehe man mit der Horizontallinie Parallelen, nehme *fb* von willkührlicher Länge, aber *fb*:*ed* ſo groß, wie das gegebene Verhältniß der durch *fg*, *eh* abgebildeten Linien. Nun ziehe man *bg*, *dh* bis an die Horizontallinie in *p* und *q*; ſo verhält ſich P*p*:Q*q* wie die Entfernung des Auges von P zur Entfernung des Auges von Q.

Mit

Mit den Halbmeſſern Pp und Qq verzeichne man ein Paar Halbkreiſe über PQ, die ſich in M ſchneiden: ſo erhellet, daß M die Stelle des Auges wäre, wenn fb in verkürzten Füſſen ſo lang wäre, als fg in vertieften Füſſen iſt. Man theile PQ bey A ſo, daß das Verhältniß AP : AQ = Pp : Qq, oder AP : AQ = PM : QM ſey; ſo liegt die Spitze M aller Dreyecke PMQ in einem Kreiſe, der durch A und M gehet, und deſſen Mittelpunct C in PQ liegt. (192 §.) Unter allen dieſen Puncten M wird einer die Stelle des Auges ſeyn, weil unter allen möglichen Verhältniſſen $fb : ed$ = AP : AQ eines ſeyn wird, wovon die beyden Glieder fb, ed, ſo groß im verkürzten Maaß ſind, als fg, eh im vertieften Maaß. Demnach halbire man AM vermittelſt einer darauf ſenkrechten Linie, die PQ in C ſchneidet, ſo iſt C der Mittelpunct des Halbkreiſes AMN, worin das Auge liegt. Uebrigens weis man aus dem 192 §. das AC = $\frac{AP \cdot AQ}{AP - AQ}$ ſey, und QC = $\frac{AQ^2}{AP - AQ}$.

Es ſey das gegebene Verhältniß $fb : ed = m : n$, PQ $= c$, AP $= \alpha$, AQ $= \beta$, AC $= r$; ſo hat man $\alpha : \beta = m : n$, und $\alpha + \beta = c$; mithin $c : \alpha = m + n : m$, und $c : \beta = m + n : n$, woraus $\alpha = \frac{m \cdot c}{m + n}$ und $\beta = \frac{n \cdot c}{m + n}$ gefunden wird. Das giebt ferner

$$QC = \frac{\beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{n^2}{m^2 - n^2} \cdot c, \text{ und}$$

$$AC = \frac{n \cdot c}{m + n} + \frac{n^2 \cdot c}{m^2 - n^2} = \frac{m \cdot n \cdot c}{m^2 - n^2} = r.$$

194 §.

194 §.

89 F. Hat man noch das Bild FG einer dritten Linie in der horizontalen Grundfläche, deren Verhältniß gegen die durch *fg* abgebildete ebenfalls bekannt iſt; ſo ziehe man auch FB mit der Grundlinie parallel, nehme *fb*:FB in dem gegebenen Verhältniß, und ziehe BG bis an die Horizontallinie in *k*. Wenn nun FG in K an die Horizontallinie ſtößt, ſo verzeichne man aus K mit dem Halbmeſſer K*k* einen Bogen, welcher den aus P mit P*p* beſchriebenen in *m* ſchneidet. Weiter theile man PK bey *a* in dem Verhältniß *fb* : FB, halbire *am* mit einer ſenkrechten Linie, welche PQ in *c* ſchneidet, ſo hat man den Mittelpunct eines Kreiſes *amn*, worin ebenfalls das Auge liegt: und wenn derſelbe den vorigen AMN (193 §.) in O ſchneidet, ſo iſt O die Stelle des Auges OR auf PQ ſenkrecht geſetzt iſt der Abſtand des Auges, und R der Augenpunct.

Es ſey $fb:FB=m:\mu$, ſo iſt $Pa:aK=m:\mu$. Man ſetzt $PK=e$, $ac=\varrho$, ſo hat man $KC=$ $\frac{\mu^2}{m^2-\mu^2}\cdot e$, und $ac=\frac{m\mu}{m^2-\mu^2}\cdot e=\varrho$. Beyde Werthe ſind in der Zeichnung negativ, weil μ hier gröſſer als m iſt. Ueberdem hat man $Pa=$ $\frac{m.e}{m+\mu}$, und $aK=\frac{\mu.e}{m+\mu}$. Das giebt

$$Aa=Pa-PA=\frac{m.e}{m+\mu}-\frac{m.c}{m+n}, \text{ und}$$

$Cc=r+\varrho-Aa$. Wird dieſer Abſtand der Mittelpuncte $=L$ geſetzt, ſo findet man

$cR=$

$$cR = \frac{1}{2}h + \frac{(\varrho + r)(\varrho - r)}{2h}.$$ und $OR = \sqrt{(\varrho^2 - cR^2)}$.

195. §.

Die Lage der Horizontallinie iſt bekannt, und überdem das Verhältniß zweyer Theile einer auf der Tafel abgebildeten Linie, die in der horizontalen Grundfläche liegt; man ſoll die Horizontallinie finden.

Aufl. Wenn entweder die Grundlinie bekannt iſt, oder das Bild einer Verticallinie, ſo iſt zwar die Lage der Horizontallinie bekannt, weil ſie mit der Grundlinie parallel, und auf dem Bilde jeder verticalen Linie wie FH ſenkrecht iſt: allein, 89 F.
welche unter allen Parallelen mit der Grundfläche, oder unter allen auf dem Bilde einer verticalen Linie ſenkrechten Linie, die eigentliche Horizontallinie ſey, iſt noch nicht beſtimmt. Es ſey alſo $\alpha\beta$ das Bild einer Linie in der horizontalen Grundfläche, und das Verhältniß $m:n$ der Theile, welche $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ abbilden, ſey gegeben: ſo kann man durch α mit der Horizontallinie eine Parallele ziehen, und auf derſelben $\alpha\delta : \delta\varepsilon = m:n$ nehmen. Nächſtdem ziehe man $\beta\delta$, und $\gamma\varepsilon$, ſo ſind dies Bilder paralleler Linien (204 §. Geom.) die ihren Vereinigungspunct P in der Horizontallinie haben; (17 §.) mithin kann man nun durch P die Horizontallinie ziehen.

196. §.

Die bisherigen Aufgaben können als Proben genügen, wie man ſich zu verhalten hat, wenn man

einen perſpectiviſchen Aufriß nach Regeln beurtheilen will. Nach Beſchaffenheit der Umſtände wird man bald auf dem einen bald auf dem andern Wege die data, welche die Lage des Auges betreffen, wieder finden, und hiernächſt, nachdem ſie gefunden ſind, gute Muſter nachzeichnen können. Bey jeder regelmäßigen perſpectiviſchen Zeichnung eines Proſpects von einer gantzen Gegend muß ein geometriſcher Grundriß zum Grunde liegen, und der bisherige Vortrag wird zugleich begreiflich machen, auf welche Art der geometriſche Grundriß aus dem perſpectiviſchen Aufriß wieder hergeſtellet werden könne. Nachdem die Horizontallinie der Augenpunct und Abſtand des Auges gefunden ſind, kann man die Horizontallinie gehörig eintheilen und als Winkelmeſſer brauchen. Die Höhe des Auges giebt den Maaßſtab der Linien ab: und mehreres wird nicht erfordert, um den Grundriß zu zeichnen, beſonders alsdenn, wenn die in den Grundriß zu liegende Fläche eben und horizontal iſt, kommen Anhöhen darauf vor, ſo muß man die auf denſelben befindlichen merkwürdigen Puncte auf die horizontale Grundfläche reduciren: man muß von denſelben auf die horizontale Grndfläche lothrechte Linien herab laſſen, und kann dabey ähnliche Maximen anwenden, wie in den Fällen, wenn man bey Zeichnung des Schattens die Hülfspuncte ſucht. (152 u. f. §.) Dieſe auf die Grundfläche reducirten Stellen werden hiernächſt in den Grundriß gebracht, auch hat man aus den perſpectiviſchen Höhen ſolcher Puncte über der Grundfläche zugleich ihre wahren Höhen über derſelben; ſolchemnach laſſen ſich alle Abmeſſungen der perſpectiviſchen Zeichnung auf die wahren Geometriſchen

Ab-

Abmeſſungen zurück führen. M. ſ. Hn. Lamberts Freye Perſpectiv im 8ten Abſchnitt, woſelbſt von dieſen umgekehrten Aufgaben der Perſpectiv ebenfalls gehandelt wird.

Der XIII. Abſchnitt.

Allgemeine Theorie der Orthographiſchen Projectionen auf der vortical ſtehenden Tafel.

197 §.

Unter denjenigen Stücken, welche als gegeben angenommen werden müſſen, bevor man den Anfang machen kann, eine perſpectiviſche Zeichnung zu entwerfen, war die Entfernung des Auges von der Tafel eines der vornehmſten; und von dieſer hängt zugleich die Entfernung des Auges von jedem Punct des abzubildenden Gegenſtandes ab, ſobald die Lage des letztern gegen die Tafel, den Horizont und die Verticalfläche des Auges gleichfalls beſtimmt iſt. Es ſey M der abzubildende Punct, $MN = \delta$, $TN = \Delta$, $GM = a$, ſeine Entfernungen von der Tafel, 38 F. der Verticalfläche und dem Horizont des Auges, $OR = D$, der Abſtand des Auges von der Tafel, $OM = E$ deſſelben Abſtand von dem abzubildenden Punct: ſo erhellet leicht aus Betrachtung der Figur,

daß $SM = \sqrt{(\Delta^2 + (D+\delta)^2)}$ ſey, und $E = OM = \sqrt{(a^2 + SM^2)}$, mithin $E = \sqrt{(a^2 + \Delta^2 + (D+\delta)^2)}$. Demnach hängen D und E ſo von einander ab, daß beyde zugleich wachſen und abnehmen vorausgeſetzt, daß a, Δ, δ, einerley bleiben: wenn D ohne Aufhören wächſt, ſo wächſt auch E ohne Aufhören, und beyde Entfernungen werden zugleich unendlich groß. Dieſelbe Gleichung giebt $(D+\delta)^2 = E^2 - a^2 - \Delta^2$, alſo $D = \sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)} - \delta$, und D muß mit E wachſen, wenn man wiederum vorausſetzt, daß a, Δ, δ einerley bleiben. Zugleich nähert ſich das Verhältniß $E:D$ der Gleichheit, und beyde Entfernungen werden zuletzt gleich groß.

198. §.

Dieſe Betrachtung könnte auf die Folge leiten, daß es einerley ſey, ob man in den oben bewieſenen Grundformuln der Perſpectiv D oder E brauchen wolle, und daß man in allen Formuln, die D enthalten, nur $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta)} - \delta$ ſtatt D ſetzen dürfe, wenn man nicht D ſondern E als gegeben annehmen will. Ob nun dieſes gleich an ſich ſeine Richtigkeit hat, ſo iſt doch bey dieſer Verwechſelung Behutſamkeit nöthig, wenn man hiernächſt unterſuchen will, was für Aenderungen mit dem Bilde auf der perſpectiviſchen Tafel vorgehen, wenn D oder E wächſt oder abnimmt. Die Vorausſetzung, daß D wachſe, kann ſo angenommen werden, daß die übrigen data, nemlich a, Δ, δ insgeſammt einerley bleiben. Wenn nemlich O in der ſenkrechten Linie OR weiter von der Tafel wegrückt,, ſo wächſt D, und a ſowohl als Δ bleiben nebſt δ ungeändert: indeſſen ändern ſich doch die Winkel $GOM = OMS$ und $TSM = SMN$.

Dieſe

Dieſe Winkel nehmen ab, wenn RO = D wächſt, und verſchwinden, wenn D unendlich groß wird.

Man nehme dagegen an, daß O in der Linie MO weiter von M wegrücke; ſo wächſt nicht allein MO = E, ſondern zugleich OS = a, und VR = NT = △, wenn gleich NM = δ einerley bleibt: bey dem allen aber bleiben nun die Winkel GOM = OMS und TSM = SMN unverändert, die im vorigen Fall mit D zugleich Aenderungen litten. Hieraus iſt alſo zu erſehen, daß zwar D nicht allein wachſen könne, ohne daß zugleich E wachſe, und umgekehrt; daß es aber bey dem allen doch nicht ſchlechthin einerley Folgen habe, wenn man das eine, oder das andre annimmt.

199. §.

Setzt man voraus, das Auge ſey von dem abzubildenden Gegenſtande unendlich weit entfernt; ſo heiſt das Bild deſſelben auf der perſpectiviſchen Tafel eine orthographiſche Projection. (2 §.) Gewöhnlich ſagt man unbeſtimmt: wenn das Auge unendlich weit entfernt iſt, ſo ſey die Projection orthographiſch; man ſetzt auch wohl, um die Formuln für die orthographiſche Projection zu finden D = ∞. Allein die im vorigen §. angeführten Gründe werden es rechtfertigen, wenn ich beſtimmter ſage, bey der Vorausſetzung E = ∞ ſey die Projection orthographiſch, wiewohl auch die Vorausſetzung D = ∞ zuweilen mit der andern E = ∞ auf einerley Folgen führen kann, nachdem man die Rechnung ſo oder anders einleitet. An ſich iſt es nicht ſchlechthin einerley, ob man in der 38 Fig. annimmt, es ſollte RO = D = ∞ werden, oder ob man MO = E = ∞

annimmt. In jenem Fall werden MO, MS, OR, OG, ST, SM, MN insgeſammt parallel, MO und MS fallen mit MN zuſammen, das Bild I fällt in N, und es iſt nun eben ſo viel, als wenn das Auge zugleich im Horizont AB ſtünde. Eben daſſelbe ergeben die Formuln des 10 §, $D = \infty$ geſetzt, und man findet $NI = \frac{\delta}{D + \delta} . NR = 0$, mithin fällt I in N; auch wird $TW = \frac{D}{D + \delta} \cdot \Delta = \Delta = TN$, und $WI = \frac{\delta}{D + \delta} . a = 0$, welches ebenfalls anzeigt, daß I in N falle. Zu bemerken iſt hiebey noch, daß dieſe Folgen eigentlich deswegen ihre Richtigkeit haben, weil Δ und a ſich nicht ändern, mithin die Puncte R und T auf der Tafel, ſo wie auch NR unverändert bleiben.

Will man $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)} - \delta$ ſtatt D ſetzen, ſo hat man $NI = \frac{\delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} . NR$,

$TW = \frac{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)} - \delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} . \Delta$, und

$WI = \frac{\delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} . a$. Weil aber nunmehro a und Δ, ſo wie $NR = \sqrt{(a^2 + \Delta^2)}$ mit E zugleich wachſen, ſo leitet die Vorausſetzung $E = \infty$ nicht auf dieſelben Folgen, wie die vorige $D = \infty$. Dem Ausdrucke $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}$ ſiehet man es nicht ſogleich an, was derſelbe in der Vorausſetzung $E = \infty$ für einen Werth annimmt, weil a und Δ zugleich

gleich mit E ohne Aufhören wachſen. Indeſſen bleibt $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}$ allemahl $= D + \delta$, auch bleibt δ unverändert, alſo wird dieſer Ausdruck wenigſtens in allen ſolchen Fällen unendlich groß, wenn es auch D wird. Alsdenn bleiben NI und WI unbeſtimmt, weil Zähler und Nenner unendlich groß werden, und TW wird unendlich groß, wie auch der Sache gemäß iſt: aber $NW = \frac{\delta}{D + \delta} \cdot \Delta$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} \cdot \Delta$$ bleibt unbeſtimmt.

200. §.

Um nun die Werthe von NW, WI, NI für den Fall $E = \infty$ zu finden, iſt es am beſten, wenn man D durch E und die Winkel NMS, SMO ausdrückt, die ſich nicht ändern, wenn gleich O in der Linie MO weiter wegrückt, wie ſchon im 198 §. bemerkt iſt. Wenn die Lage des abzubildenden Puncts M, mithin auch die durch den Punct M auf die Tafel ſenkrecht geſetzte Verticalfläche LMNV als bekannt angenommen wird, ſo dienen die beyden Winkel NMS, SMO, mit der Entfernung SO zuſammen die Lage des Auges zu beſtimmen. Alsdenn iſt der Winkel SMO die optiſche Höhe des Auges über dem Horizont AB aus dem Punct M geſehen, (82 §. Opt. 163 §. Perſp.) und NMS = TSM der Abweichungs-Winkel der Ebene OSM von der Verticalfläche LMNV. Geſetzt nun, daß auch das Auge in MO unendlich weit wegrücke, ſo bleibt doch in allen Fällen, die Lage deſſelben durch die Winkel NMS und SMO beſtimmt. Künftig werde ich alle-

mahl $NMS=\alpha$, $SMO=\beta$, $MO=E$ ſetzen, und $WNI=\zeta$: wenn man nun durch S mit TC eine Parallele zieht, und MN bis an dieſe Parallele in n verlängert; ſo hat man $OS=a=E\sin\beta$, $SM=E\cos\beta$, $Sn=TN=\Delta=SM\sin\alpha=E\cos\beta\sin\alpha$, $Mn=D+\delta=SM\cos\alpha=E\cos\beta\cos\alpha$, $\tang\zeta=\frac{a}{\Delta}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}=\operatorname{coſec}\alpha\tang\beta$. Man hat demnach ſtatt D, a, und Δ folgende Werthe

$$D=E\cos\alpha\cos\beta-\delta$$
$$a=E\sin\beta$$
$$\Delta=E\sin\alpha\cos\beta$$

insgeſammt durch E und beſtändige Gröſſen, die von E nicht abhängen, ſo wie auch $\tang\zeta=\operatorname{coſec}\alpha\tang\beta$ nur von den beſtändigen Winkeln α und β abhängt.

Will man nun die Lage des Bildes I auf der Tafel durch NW und WI beſtimmen, ſo hat man $NW=\frac{\delta}{D+\delta}\cdot\Delta=\frac{\delta}{\cos\alpha\cos\beta}\sin\alpha\cos\beta=\delta\tang\alpha$, und $WI=\frac{\delta}{D+\delta}\cdot a=\frac{\delta}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\sin\beta=\delta\sec\alpha\tang\beta$. Die Richtigkeit beyder Formuln erſiehet man auch ſogleich aus Betrachtung der Zeichnung.

Weil der Punct N als bekannt angenommen wird, ſo wird die Lage des Bildes auch durch den Winkel ζ, deſſen Tangente $=\operatorname{coſec}\alpha\tang\beta$, und $NI=NW\sec\zeta=WI\operatorname{coſec}\zeta=\delta\tang\alpha\sec\zeta=\delta\sec\alpha\tang\beta\operatorname{coſec}\zeta$ beſtimmt, oder $NI=\delta\tang\alpha\sqrt{(1+\operatorname{coſec}\alpha^2\tang\beta^2)}=\delta\sqrt{(\tang\alpha^2+\sec\alpha^2\tang\beta^2)}$.

201. §.

Bey der orthographiſchen Projection giebt es keinen Augenpunct und keine Gränzlinie auf der Tafel: die Gränzlinie nebſt dem Augenpunct liegen unendlich hoch über der Grundlinie. Demnach werden hier die Bilder aller auf der Grundlinie CE ſenkrechten Linien, wie NM im Horizont AB iſt, geometriſch parallel. 90 F.

So wie dieſes ſchon aus Betrachtung der Sache ſelbſt fließt, wenn man den 8 §. vergleicht, ſo erhellet es auch daraus, weil tang ζ = tang β coſec α von α und β allein abhängt, N mag in CE liegen, wo man will. Stellt man ſich in der 90 Fig. einen von M verſchiedenen Punct *m* im Horizont AB, und eine von NM verſchiedene ſenkrechte Vertiefung *nm* vor, ſo iſt die Linie, welche von dieſem Punct *m* in das unendlich entfernte Auge läuft, mit MO parallel, mithin behalten α und β einerley Gröſſe, und *ni* mit NI gegen die Grundlinie einerley Lage.

202 §.

Wofern die Ebene MOS, (die Verticalfläche durchs Auge und den abzubildenden Punct) nicht ſelbſt auf der Tafel ſenkrecht iſt; ſo wird ſie alle auf der Tafel ſenkrechte Verticalflächen, eben ſo wie die Verticalfläche LMNV durch den abzubildenden Punct und zwar unter einerley Winkel ſchneiden; ſo wie auch MO durch alle dieſe Verticalflächen laufen wird. Um nun die Lage eines jeden Puncts, wie M im Horizont AB, oder auch eines jeden andern Puncts L beſtimmt anzugeben, muß man unter allen auf der Tafel ſenkrechten Verticalflächen eine, wie z. E. 90 F.

ORST als die erſte betrachten; hiebey muß man ſich MO über O hinaus ins unendliche verlängert vorſtellen, O aber ſey nun nicht mehr das Auge, ſondern der Punct, worin MO die für die erſte angenommene Verticalfläche trift. Ueberdem muß der Punct T, worin die erſte Verticalfläche die Grundlinie der Tafel ſchneidet, mithin auch auf der Tafel die Verticallinie TR, worin die Tafel ſelbſt von der erſten Verticalfläche geſchnitten wird, und die ich die erſte Verticallinie nennen werde, als bekannt angenommen werden. Alsdenn ſind TN $=\Delta$, NM $=\delta$ der Abſtand des Puncts M von der erſten Verticalfläche, und von der Tafel: und wenn LM auf AB ſenkrecht iſt, ſo wird die Lage des Puncts L durch Δ, δ, und ML $=\alpha$ beſtimmt.

203. §.

90 F. Man ziehe OR auf die Tafel ſenkrecht, und RH in der Tafel horizontal, ſo iſt die Ebene ORH horizontal, und wenn OS auf AB ſenkrecht geſetzt, OG aber mit SM parallel gezogen wird, ſo liegt OG im Horizont ORH, und der Punct g, worin OG die Tafel trift, in der Horizontallinie RH. Nach dieſer Vorbereitung wird der Winkel ROg $=$ TSW $=$ WMN $=\alpha$, und gOI $=$ OMS $=\beta$. Ich werde künftig ORH den Haupt-Horizont nennen, RH die erſte oder die Haupt-Horizontallinie der Tafel, O die auf den Haupt-Horizont reducirte Stelle des Auges, R den reducirten Augenpunct, OR den reducirten Abſtand des Auges, und OS $=$ RT die reducirte Höhe des Auges.

Wird

Wird nun bey dieſer Unterſuchung $OR = D$ geſetzt, ſo hat man $\frac{\Delta}{D+\delta} = \tan\alpha$, (200 §.) folglich $D = \Delta \cot\alpha - \delta$: und wenn man ferner $OS = RT = a$ ſetzt; ſo hat man $\frac{a}{D+\delta} =$

$\frac{a}{\Delta \cot\alpha} = \sec\alpha \tan\beta$, (200 §.) mithin $a = \Delta \cot\alpha \sec\alpha \tan\beta = \Delta \operatorname{cosec}\alpha \tan\beta = \Delta \tan\zeta$. (200 §.)

Uebrigens hat man noch $Rg = D \tan\alpha$ und $gI = D \sec\alpha \tan\beta$, alſo auch $Rg = \Delta - \delta \tan\alpha$, und $gI = (\Delta \operatorname{cosec}\alpha - \delta \sec\alpha) \tan\beta$. Beyde Gleichungen beſtimmen die Lage des Bildes I, eben ſo wie $NW = \delta \tan\alpha$, und $WI = \delta \sec\alpha \tan\beta$. (200 §.) Auch wird I gefunden, wenn man $TN = \Delta$ nimmt, den Winkel $TNI = \zeta$ ſo groß macht, daß ſeine Tangente $= \operatorname{cosec}\alpha \tan\beta$ iſt, hiernächſt aber $NI = \delta \sqrt{(\tan\alpha^2 + \sec\alpha^2 \tan\beta^2)}$, oder $NI = \delta \tan\alpha \sec\zeta$.

204. §.

Wenn man annimmt, daß die Lage des Puncts M durch Δ und δ beſtimmt ſey, ſo iſt es einerley, ob die Lage des Auges durch die Winkel α und β beſtimmt wird, oder durch die Entfernungen D und ω. Denn aus der Gleichung $D = \Delta \cot\alpha - \delta$, oder $\cot\alpha = \frac{D+\delta}{\Delta}$ mit der zweyten $a = \Delta \operatorname{cosec}\alpha \tan\beta$ oder $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{a}{\Delta \tan\beta}$ verbunden kann man α

und

und β finden, wenn D und a beſtimmt ſind. Die erſte giebt $1+\cot\alpha^2 = \operatorname{coſec}\alpha^2 = \frac{\Delta^2+(D+\delta)^2}{\Delta^2}$, und dies dem Werth $\operatorname{coſec}\alpha^2$ in der zweyten gleich geſetzt giebt $\operatorname{tang}\beta = \frac{a}{\sqrt{(\Delta^2+(D+\delta)^2)}}$; dieſer Werth wiederum in der zweyten Gleichung gebraucht giebt $\operatorname{coſec}\alpha = \frac{\sqrt{(\Delta^2+(D+\delta)^2}}{\Delta}$, oder $\sin\alpha$ $= \frac{\Delta}{\sqrt{(\Delta^2+(D+\delta)^2)}}$. Beyde Werthe laſſen ſich auch ganz leicht aus Betrachtung der Figur herleiten.

205. §.

Dieſe Schlüſſe vorausgeſetzt lieſſe ſich aus der gegebenen Lage des Puncts M im Horizont AB das Bild I deſſelben auf der Tafel völlig ſo, wie im 10 §. finden, wenn auf der Tafel die erſte Verticallinie, in derſelben der Fußpunct T des Auges gegeben wäre, und überdem die reducirte Entfernung D und reducirte Höhe des Auges a, oder auch ſtatt dieſer beyden Linien die Winkel α und β: es wäre nemlich $TN = \Delta$, $\operatorname{tang}\zeta = \frac{a}{\Delta}$, und $NI = \delta \operatorname{tang}\alpha \operatorname{ſec}\zeta$ $= \delta \cdot \frac{\Delta}{D+\delta} \cdot \frac{NR}{\Delta} = \frac{\delta}{D+\delta} \cdot NR$, woraus eben die Verzeichnung, wie im 10 §. folgt. Was aber die fernern Anwendungen betrift, die von der Aufgabe des 10 §. oben ſind gemacht worden, ſo er=

erfordert die Natur der orthographiſchen Projection einige Hauptveränderungen derſelben, welche nunmehro genauer erwogen werden müſſen.

206. §.

Wenn die Entfernung des Auges von dem abzubildenden Gegenſtande endlich iſt, ſo laufen alle Geſichts-Strahlen, welche von jedem Punct dieſes Gegenſtandes, den das Auge wahrnehmen kann, ins Auge kommen, in demſelben als einen Punct zuſammen, und ſind insgeſammt in dem Raum der oben im 1 §. ſo genannten Strahlen-Pyramide enthalten. Aus dieſer Pyramide wird ein prismatiſcher oder cylindriſcher Körper, wenn das Auge unendlich weit hinaus rückt, und alle Geſichtsſtrahlen werden parallel. (2 §.) Eben dieſer letztere Umſtand iſt das Haupt-Merkmahl der orthographiſchen Projection, wodurch ſie ſich von der ſcenographiſchen, d. i. derjenigen unterſcheidet, wobey die Entfernung des Auges von der abzubildenden Sache von endlicher Gröſſe angenommen wird. Bey letzterer ſind die Gröſſen a und D von Δ und δ ganz unabhängig, aber die Winkel α und β hängen von Δ und δ ab. Dagegen hängen a und D (in der §. 203 feſtgeſetzten Bedeutung gebraucht) bey der orthographiſchen Projection von Δ und δ ab, und die Winkel α und β ändern ſich nicht mit Δ und δ. Wenn es alſo gleich vermöge des 204 §. einerley iſt, ob D und a oder α und β gegeben ſind, wenn man nur die orthographiſche Projection eines einzigen Puncts M ſucht: ſo muß man doch eigentlich α und β als data anſehen, ſobald von mehrern Puncten, die in einerley Horizont AB liegen, die orthographiſchen

Pro-

Projectionen geſucht werden ſollen. Hieraus würde folgende Regel flieſſen, wenn man das einem jeden Punct M im Horizont AB zugehörige Bild I auf eben die Art, wie im 10 §. ſuchen wollte.

Für jeden Punct M, deſſen Lage durch ein andres Δ und δ gegeben wäre, müſte man D und a aus α und β nach dem 203 §. beſonders ſuchen: hiernächſt könnte man allererſt das zugehörige Bild nach dem 10 §. durch Zeichnung finden.

Auf ſolche Art würde man für jeden Punct M, deſſen Lage durch ein andres Δ und δ gegeben wäre, eine eigene Horizontallinie, und einen eigenen reducirten Augenpunct haben. Allein dieſe Umſtändlichkeit läſt ſich vermeiden: man kann die Kunſt orthographiſch-perſpectiviſche Bilder zu zeichnen, ſo weit die Natur der orthographiſchen Projection es verſtattet, mit der Kunſt ſcenographiſch-perſpectiviſche Bilder zu zeichnen, auf ganz ähnliche Regeln zurück führen, und bey Auflöſung der eben erwehnten Aufgabe durch Zeichnung die Aehnlichkeit mit der im 10 §. gegebenen Auflöſung beybehalten, ohne daß man mehr als einen reducirten Augenpunct nöthig hätte.

207 §.

Die Lage des Auges gegen den Horizont eines abzubildenden Puncts iſt durch die Winkel α und β beſtimmt; auch ſind die Entfernungen Δ und δ dieſes Puncts von der erſten Verticalfläche und der Tafel gegeben: man ſoll die orthographiſche Projection deſſelben durch Zeichnung auf der Tafel finden. Aufl.

Aufl. Man nehme die Horizontallinie RH, 91 F.
in derſelben den reducirten Augenpunct R, nebſt der Höhe RT des Haupthorizonts über dem Horizont des abzubildenden Puncts willkührlich an, und ziehe durch T die Grundlinie mit RH parallel. Ferner nehme man den reducirten Abſtand des Auges D = RO willkührlich an, mache $ROg = \alpha$, trage gO in $g\omega$, mache $g\omega G = \beta$ und ziehe gG durch gH ſenkrecht, ſo hat man den Durchſchnittspunct G. Nach dieſer Vorbereitung nehme man RF = RO = D, und ziehe RG und FG, man nehme ferner $TN = \Delta$, $NM = \delta$, und ziehe durch N und M mit GR und GF parallele Linien; ſo wird ihr Durchſchnittspunct I das geſuchte Bild ſeyn.

Beweis. Wenn man ſich vorſtellt, daß die Zeichnung eben ſo, wie in der 39 Fig. dem 10 §. gemäß gemacht werden ſollte; ſo ſind N und M eben die Puncte, welche in der 39 Fig. N und G waren; dagegen giebt es hier keinen eigentlichen Augenpunct, weil derſelbe in der Linie GR unendlich weit hinaus liegt, auch würde die Diſtanzlinie RF (39 Fig.) hier unendlich groß ſeyn, und der Diſtanzpunct F ebenfalls in GF unendlich weit hinaus liegen. Deswegen muß man die Lage beyder Linien, die von N und M aus in unendlich entfernte Puncte laufen, auf andre Art ſuchen; da dann die Sache darauf ankommt, daß $TN = \Delta$, $TNI = \zeta$, und $NI = \delta \tang \alpha \sec \zeta$ ſeyn muß.

Es iſt aber vermöge der Zeichnung $Rg = D \tang \alpha$, und $gG = D \sec \alpha \tang \beta$, mithin wird

$$\tang gRG = \frac{gG}{RG} = \frac{\sec \alpha \tang \beta}{\tang \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

. $\frac{\operatorname{coſ}\alpha}{\operatorname{ſin}\alpha}$. tang β = coſec α tang β = tang ζ. (200 §.) Weiter iſt TN = Δ gemacht, und NI mit GR parallel gezogen, mithin iſt TNI = ζ und das geſuchte Bild liegt in NI. (200 §.) Ueberdem iſt RG = Rg ſec ζ = D tang α ſec ζ, und RF = D vermöge der Zeichnung: alſo RG = RF tang α ſec ζ. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke RGF und IMN aber hat man RF : RG = NM : NI, und es iſt NM = δ gemacht: folglich erhält man NI = δ tang α ſec ζ = $\delta\sqrt{(\text{tang}\,\alpha^2 + \text{ſec}\,\alpha^2\,\text{tang}\,\beta^2)}$, und der Punct I iſt das geſuchte Bild. (200 §.)

208 §.

So wie demnach auf der perſpectiviſchen Tafel, wenn die Projection orthographiſch iſt, alle Geſichtslinien in einem unendlich entfernten Augenpunct zuſammen laufen: ſo laufen auch alle Durchſchnittslinien (11 §.) in einem unendlich entfernten Diſtanzpunct des Auges zuſammen. Uebrigens ſchreibt man auch hier der Perſpectiviſchen Vertiefung NI (91 Fig.) eben ſo viele vertiefte Fuſſe zu, als der dazu gehörigen geometriſchen Vertiefung NM geometriſche Fuſſe zugeſchrieben werden: hier ſind aber alle vertiefte perſpectiviſche Fuſſe gleich lang, wie die geometriſchen Fuſſe, weil ſich NI wie NM oder δ verhält; auch können, nachdem die Lage des Auges angenommen wird, die perſpectiviſchen Fuſſe gröſſer, als die geometriſchen ſeyn, weil das Verhältniß des geometriſchen Fuſſes zum perſpectiviſchen = 1 : tang α ſec ζ, oder = 1 : $\sqrt{(\text{tang}\,\alpha^2 + \text{ſec}\,\alpha^2\,\text{tang}\,\beta^2)}$ iſt. Die Eintheilung der perſpectiviſchen Vertiefung NI auf der Tafel iſt demnach leicht bewerkſtelliget, wenn

man MN nach dem geometriſchen Maaß eintheilet, und durch die Theilungspuncte mit MI oder GF Parallelen ziehet.

209 §.

Das Bild I*p* oder IK jeder mit der Tafel pa- 91 F.
rallelen Linie MP oder ML iſt der abgebildeten Linie 38
ſelbſt gleich, wenn die Projection orthographiſch iſt, weil IMP*p*, IMLK Parallelogrammen werden. Auch geben dies die Formuln des 12. und 13. §, wenn man $D = \infty$ ſetzt. Demnach iſt die perſpectiviſche Höhe IK der geometriſchen Höhe ML gleich, wenn die Projection orthographiſch iſt, und man kann alle perſpectiviſche Höhen, ſo wie auch alle mit der Grundlinie parallel laufende Linien, nach dem geometriſchen Maaße meſſen und eintheilen, weil dabey alle Verkürzung wegfällt.

210 §.

Die Lage der ſchrägen Vertiefung AF iſt 42 F.
gegeben: man ſoll die Lage des Bildes A*f* auf der Tafel finden.

Aufl. Man ſtelle ſich FO ins unendliche verlängert vor, nehme aber, wie im 202 §. ORTS für die erſte Verticalfläche an, welche die Geſichtslinie in O ſchneidet, und ORH ſey wie im 203. der Haupt-Horizont, R der reducirte Augenpunct, OR = D, RT = *a* in der Bedeutung des 203. §. Ferner ſey OP mit A*f* parallel, ſo liegt OP im Haupthorizont, und P in der Horizontallinie RH; und weil die Tafel von der Ebene der Parallelen AF, OP in AP geſchnitten wird, ſo iſt AP ins unendliche verlängert das Bild von AF gleichfalls ins unendliche

verlängert. Man ſetze $TA = f$, und $TAF = \eta$, ſo hat man $ROP = 90° - \eta$, und $RP = D \cot \eta$. Man nehme AF von willkührlicher Länge, ſetze FN auf TA ſenkrecht, ſo iſt NR ins unendliche verlängert das Bild von NF ins unendliche verlängert, und f, beyder Linien AP und MR Durchſchnittspunct iſt das Bild von F.

Nun ſey $TA = f$, $TN = \Delta$, $FN = \delta$ ſo iſt $f = \Delta + \delta \cot \eta$. Ueberdem iſt $D = \Delta \cot \alpha - \delta$ und $a = \Delta \operatorname{coſec} \alpha \operatorname{tang} \beta$, und wenn $TAf = \zeta$ geſetzt wird, ſo hat man $\operatorname{tang} \zeta = \dfrac{a}{f + D \cot \eta}$. Es wird aber $f + D \cot \eta = \Delta + \Delta \cot \alpha \cot \eta$, folglich erhält man $\operatorname{tang} \zeta = \dfrac{\operatorname{coſec} \alpha \operatorname{tang} \beta}{1 + \cot \alpha \cot \eta}$.

Wenn $\eta = 90°$ iſt, ſo wird $\operatorname{tang} \zeta = \operatorname{coſec} \alpha \operatorname{tang} \beta$, wie im 200 §, welches auch der angenommenen Vorausſetzung gemäß iſt. Uebrigens hängt $\operatorname{tang} \zeta$ allein von α, β, und η, gar nicht von f oder Δ ab, mithin ſchneiden die Bilder aller ſchrägen und einander parallelen Vertiefungen die Grundlinie unter einerley Winkel und ſind ebenfalls parallel. Man ſtelle ſich in der 41 Fig. vor, daß das Auge O in FO unendlich weit hinaus rücke, ſo rücken R und P ebenfalls von der jetzigen Stelle fort, P entfernt ſich von B und A immer weiter, und kann zuletzt als ein unendlich weit entfernter Vereinigungspunct der Bilder der Parallelen FG und CD betrachtet werden: das heiſt, die Bilder ſelbſt werden parallel.

Um nun die Lage des Bildes durch Zeichnung
91 F. zu finden, verfahre man, wie im 207 §. Die Winkel

kel α und β ſind gegeben, RO = D und RT = a, werden willkührlich angenommen. Hierauf macht man ROg = α, $g\omega = gO$, $g\omega G = \beta$ zieht durch g eine Linie auf RH ſenkrecht, ſo hat man den Durchſchnittspunct G. Dieſe Vorbereitung bleibt einerley, man mag das Bild einer ſenkrechten, oder ſchrägen Vertieſung ſuchen. Iſt die letztere nun unter dem Winkel η gegen die Tafel geneigt; ſo nimmt man RP = D cot η und zieht GP. Ferner nimmt man TA = f, und zieht Af mit GP parallel, ſo iſt Af ins unendliche verlängert das geſuchte Bild.

Man hat nemlich $gP = Rg + RP = D(\tang\alpha + \cot\eta)$, $gG = D\sec\alpha\tang\beta$, und das giebt

$$\tang gPG = \frac{gG}{gP} = \frac{\sec\alpha\tang\beta}{\tang\alpha + \cot\eta} = \frac{\sec\alpha.\cot\alpha.\tang\beta}{1 + \cot\alpha\cot\eta} = \frac{\operatorname{coſec}\alpha\tang\beta}{1 + \cot\alpha\cot\eta} = \tang\zeta:$$

und weil Af mit GP parallel gezogen worden, ſo iſt auch TAf = ζ.

211 §.

Man kann P als den reducirten Vereinigungspunct, der Bilder aller horizontalen Parallel-Linien betrachten, welche gegen die Tafel unter dem Winkel η, und gegen die erſte Verticalfläche unter dem Winkel $90° - \eta$ geneigt ſind. Eigentlich liegt dieſer Vereinigungspunct in GP unendlich weit über P hinaus, indeſſen hat hier der Punct P einen ähnlichen Nutzen, wie der würkliche Vereinigungspunct bey dem ſcenographiſchen Projectionen hatte, und wenn man auf der Tafel mit Vortheil orthographiſche Bilder zeichnen will, ſo dient über-

haupt folgende Vorbereitung. Man zieht die Horizontallinie und Grundlinie in willkührlicher Entfernung mit einander parallel, nimmt in jener den reducirten Augenpunct R willkührlich an, ſo wie auch den Punct O in RT. Hierauf ſucht man G nach der im 206. und 210 §. ertheilten Vorſchrift, und theilt hiernächſt die Horizontallinie zu beyden Seiten von R eben ſo wie im 20 §. im Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer OR = D ein.

Um nun das Bild einer Linie zu haben die durch A geht, und von der Tafel um 50° abweicht, zieht man GP in den 40ſten Grad der Horizontallinie, und durch A mit GP eine Parallele.

Uebrigens kann man OP als den reducirten Abſtand des Auges vom Vereinigungspunct P der Bilder aller derjenigen Parallelen betrachten, die von der Tafel um den Winkel η abweichen: und weil der Punct G auf der Tafel gefunden ſeyn muß, bevor man mit der Zeichnung anfangen kann, ſo werde ich ihn kurz den Hülfspunct nennen.

212 §.

42 F. Die ſchräge geometriſche Vertiefung AF iſt gegeben, man ſoll die zugehörige perſpectiviſche Vertiefung Af finden.

Aufl. Man erhält wie im 24. §. $Af = \frac{AF}{D\,\mathrm{coſec}\,\eta + AF} \cdot AP$, oder auch $Af = \frac{AF\,\mathrm{ſin}\,\eta}{D + AF\,\mathrm{ſin}\,\eta} \cdot AP$. Iſt nun $FN = \delta$, auf XY

ſenk-

ſenkrecht, ſo hat man $\delta = AF \sin\eta$, und $Af = \frac{\delta}{D+\delta} \cdot AP = \frac{\delta}{D+\delta} \cdot a \operatorname{coſec}\zeta$. Es iſt aber

$\frac{a}{D+\delta} = \operatorname{ſec}\alpha \operatorname{tang}\beta$ (203 §.) und $\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{coſec}\alpha \operatorname{tang}\beta}{1+\cot\alpha\cot\eta}$, alſo $\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\zeta(1+\cot\alpha\cot\eta)$

$\sin\alpha$, und $\frac{a}{D+\delta} = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\zeta(1+\cot\alpha\cot\eta)$.

Folglich wird $Af = \delta \operatorname{tang}\alpha(1+\cot\alpha\cot\eta)\operatorname{ſec}\zeta$, oder $Af = AF \sin\eta \operatorname{tang}\alpha(1+\cot\alpha\cot\eta)\operatorname{ſec}\zeta$.

Will man $\operatorname{ſec}\zeta$ durch α und β ausdrucken, ſo hat man $\operatorname{ſec}\zeta = \frac{\sqrt{((1+\cot\alpha\cot\eta)^2 + \operatorname{coſec}\alpha^2 \operatorname{tang}\beta^2)}}{1+\cot\alpha\cot\eta}$, und man findet $Af = AF\sin\eta\sqrt{((\operatorname{tang}\alpha+\cot\eta)^2 + \operatorname{ſec}\alpha^2 \operatorname{tang}\beta^2)}$.

Aus dieſer Formul ergiebt ſich wiederum, daß die perſpectiviſche Vertiefung Af der Geometriſchen AF proportional ſey, ſo lange η einerley iſt, und das leitet auf eine ähnliche Art, das geſuchte durch Zeichnung zu finden, wie im 207 §. die ſenkrechte Vertiefung gefunden ward. Nachdem nemlich die Lage Af der geſuchten Vertiefung gefunden iſt, (210 §.) nimmt man $P\Omega = PO = D\operatorname{coſec}\eta$, ziehet ΩG, nimmt AF ſo lang, als die gegebene geometriſche Vertiefung, ziehet durch F mit $G\Omega$ eine Parallele, welche Af in f ſchneidet, ſo iſt Af die perſpectiviſche Vertiefung. 91 F.

Es iſt nemlich $PG = Pg \sec \zeta$, und $Pg = RP + Rg = D(\cot\eta + \tang\alpha)$. Ferner iſt $P\Omega = PO = D \operatorname{coſec}\eta$, alſo $D = P\Omega \sin\eta$. Das giebt $PG = P\Omega . \sin\eta (\cot\eta + \tang\alpha) \sec\zeta = P\Omega \sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta) \sec\zeta$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke $P\Omega G$ und AFf hat man ferner $P\Omega : PG = AF : Af$, folglich wird $Af = AF \sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta) \sec\zeta$.

Wenn Af bis e verlängert iſt, und man nimmt an, daß L und l die Länge der durch Ae und Af abgebildeten Linien bezeichnen, λ aber die durch fe abgebildete Linie; ſo iſt $\lambda = L - l$, und man findet $fe = Ae - Af = \lambda \sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta) \sec\zeta$. Weil dieſe Länge des Bildes von der Vertiefung der Endpuncte der abgebildeten Linie hinter der Tafel nicht abhängt, auch nicht von ihrer Entfernung von der erſten Verticalfläche; ſondern auſſer α und β allein von η; ſo folgt, daß die Bilder gleich groſſer und gegen die Tafel unter einerley Winkel geneigter Linien einerley Länge haben.

213 §.

92 F. Man ziehe durch G ein Paar grade Linien, welche die Horizontallinie in P und p ſchneiden, und mit den Seitenlinien Af, Bf des Dreyecks ABf, deſſen Grundlinie AB in der Grundlinie der Tafel liegt, parallel ſind; der durch BAf abgebildete Winkel ſey $= \eta$, der durch AfB abgebildete $= \varphi$, ſo iſt der durch TBf abgebildete $= \eta + \varphi$. Nun müſſen auf der Horizontallinie von P aus gegen die Linke zu ins unendliche fort ſo viele Grade liegen, als der Winkel η faſſet; von p aber gegen die Linke fort ſo viele, als $\eta + \varphi$ faſſet; mithin liegen zwiſchen P und

p ſo viele Grade, als die Gröſſe des Winkels φ ausmachen, den A*f*B = PG*p* abbildet. Demnach kann hier die eingetheilte Horizontallinie auf ähnliche als ein Winkelmeſſer dienen, wie ſie bey den ſcenographiſchen Projectionen diente.

Soll zum Ex. an *ef* bey *f* ein Winkel von 40° gezeichnet werden, ſo zieht man GP mit *fe* parallel, zählt von P nach *p* 40 Grade, zieht G*p*, und darauf *fh* ♯ G*p*, ſo iſt *efh* das Bild eines Winkels von 40 Graden.

Soll man *efh* meſſen, ſo zieht man durch G mit den Schenkeln *fe*, *fh* parallele Linien bis an die Horizontallinie in P und *p*, ſo viele Grade nun zwiſchen P und *p* liegen, ſo viele faſſet der durch *efh* abgebildete Winkel.

214. §.

Jede grade Linie auf der Tafel, wie BI oder $\alpha\beta$ zu meſſen, oder auf ihr ein Stück von gegebener Länge abzuſchneiden. 91 F.

Aufl. Man ziehe mit ihr durch den Hülfspunct G eine Parallele bis an die Horizontallinie. Wenn nun dieſe

1.) Den Augenpunct R trift, wie hier die mit BI parallel gezogene Linie GR, ſo trage man OR aus R nach F und ziehe FG. Ferner ziehe man durch B mit der Horizontallinie, durch I aber mit FG eine Parallele, und wenn beyde einander in C ſchneiden, ſo iſt BI im perſpectiviſchen Maaß ſo lang als BC im geometriſchen.

Soll man auf BI ein Stück von gegebener Länge auftragen, ſo nimmt man auf BC ſo viele

Fuſſe, als dieſe Länge ausmachen ſoll, und ziehet CI mit GF parallel, ſo hat BI die verlangte Länge.

2.) Wenn die durch G mit der gegebenen Linie $\alpha\beta$ parallel gezogene nicht in den Augenpunct läuft, wie GP, ſo trägt man PO aus P in Ω, und ziehe ΩG. Weiter ziehe man durch α mit der Horizontallinie, durch β mit ΩG eine Parallele; wenn ſich dieſe nun in γ ſchneiden, ſo meſſe man $\alpha\gamma$ im Geometriſchen Maaß, ſo weis man zugleich, wie lang $\alpha\beta$ im perſpectiviſchen Maaß ſey.

Soll man auf $\alpha\beta$ ein Stück von verlangter Länge auftragen, ſo nimmt man auf $\alpha\gamma$ ſo viele geometriſche Fuſſe, als die gegebene Länge faſſen ſoll, und zieht $\gamma\beta$ mit GΩ parallel, ſo erhält $\alpha\beta$ die verlangte Länge.

Beweis. Wenn λ die Länge der durch $\alpha\beta$ abgebildeten Linie bezeichnet; und Kürze halber $\sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta) \sec\zeta = \mu$ geſetzt wird, ſo muß $\alpha\beta = \mu\lambda$ ſeyn. (212 §.) Ueberdem iſt $P\varphi = \mu . P\Omega$. (212 §.) Weil nun der Vorſchrift gemäß, um $\alpha\beta$ zu meſſen das Dreyeck $\alpha\beta\gamma \sim GP\Omega$ gemacht wird, ſo hat man $PG : P\Omega = \alpha\beta : \alpha\gamma$, d. i. $\mu : 1 = \mu\lambda : \alpha\gamma$, mithin wird $\alpha\gamma = \lambda$. Und in dem umgekehrten Fall hat man $P\Omega : PG = \alpha\gamma : \alpha\beta$, d. i. $1 : \mu = \lambda : \alpha\beta$, weil der Vorſchrift gemäß $\alpha\gamma = \lambda$ gemacht wird, mithin wird $\alpha\beta = \mu\lambda$.

Wofern die gegebene Linie, wie BI mit GR parallel iſt, ſo iſt $\eta = 90°$, und das iſt von der allgemeinen Regel nur ein beſondrer Fall.

215 §.

Die Aufgabe des vor. §. vermittelſt des Proportional-Cirkels aufzulöſen.

Aufl.

Aufl. Die Proportion $P\Omega : PG = \alpha\gamma : \alpha\beta$ oder $OP : GP = \alpha\gamma : \alpha\beta$ giebt $\alpha\beta = \frac{GP}{OP} \cdot \alpha\gamma$.

Wenn alſo $\alpha\beta$ in perſpectiviſche Fuſſe getheilt wäre, und $\alpha\gamma$ in geometriſche; ſo wäre jeder perſpectiviſche Fuß $= \frac{GP}{OP} \cdot$ eines geometriſchen Fuſſes. Dieſemnach meſſe man OP im geometriſchen Maaß: ſo viele geometriſche Füſſe nun OP lang iſt, in eben ſo viele gleiche Theile muß man GP eintheilen, ſo wird $\alpha\gamma$ nach dem leztern Maaßſtab gemeſſen ſo lang ſeyn, als $\alpha\beta$ im geometriſchen Maaß iſt. Hiernächſt kann auch jedes andre Stück der Linien $\alpha\beta$ nicht allein, ſondern auch jeder andern, die mit ihr parallel läuft, nach eben dieſem Maaß gemeſſen werden. Nun wird die Vergleichung mit dem 40. §. leicht ergeben, wie der Proportionalcirkel bey dieſem Geſchäfte gebraucht werden könne. Alles, was auf $\alpha\beta$ und jeder damit parallelen Linie zu meſſen vorkommt, muß nach einem Maaßſtab gemeſſen werden, nach welchem GP ſo lang iſt, als OP im geometriſchen Maaß. Dieſemnach trägt man GP auf dem geöfneten Proportional-Cirkel auf die Zahl von Schuhen, die OP faſſet, und ſiehet noch zwiſchen welche zwo gleiche Zahlen nun $\alpha\beta$ fällt, ſo weis man wie lang $\alpha\beta$ ſey. Soll man aber $\alpha\beta$ von gegebener Länge machen, ſo kann man auch dieſe gegebene Länge von dem Proportional-Cirkel mittelſt des Hand-Cirkels auf $\alpha\beta$ auftragen.

216. §.

Es giebt viele Fälle, wo man ſich mit Vortheil der bisher vorgetragenen Regeln für die ortho-

graphiſche Projection bedient, um eine Sache perſpectiviſch zu entwerfen. Am gewöhnlichſten geſchicht es, wenn der ganze Umfang der abzubildenden Sache in Vergleichung mit dem Abſtand des Auges ſehr klein iſt, alsdenn ſind die Strahlen, welche die Sache ins Auge ſchickt, beynahe parallel, und weil es auf die geringe Abweichung nicht ankommt, ſo nimmt man an, daß ſie vollkommen parallel seyn. Weil übrigens bey der orthographiſchen Projection alle ſcheinbare Verkürzung und Schmählerung wegfällt; ſo wählt man ſie bey Zeichnung einzelner Gegenſtände vornemlich um deswillen häufig, weil man dabey gewöhnlich die Deutlichkeit des Bildes, wobey alle Theile ſo viel möglich auseinander geſetzt erſcheinen, mehr als das völlig natürliche der Erſcheinung des Bildes zur Abſicht hat. Daher werden faſt alle Aufriſſe von Maſchinen, auch wohl Gebäude nach ihrem äuſſerlichen Anſehen, orthographiſch-perſpectiviſch gezeichnet. Auch braucht man dieſe Projections-Art wohl bey Feſtungen und Städten, wenn alles ohne ſcheinbare Schmählerung ins Auge fallen ſoll.

217. §.

Hiebey kommt es nun allerdings auch auf eine geſchickte Wahl der Lage des Auges an, und man kann dasjenige, was davon im IX. Abſchnitt geſagt iſt, leicht auf dieſe beſondre Art der Projection anwenden. Die Beſtimmung der Entfernung des Auges von der Tafel oder der abzubildenden Sache, nebſt allen Regeln, die ſich darauf beziehen, fallen hier weg, weil die Entfernung ſchon beſtimmt, und hier unendlich groß iſt: es kommt nur auf die Wahl der

der Winkel α und β an. Bey ebenen horizontal liegenden Figuren, können α und β ſo angenommen werden, daß alles wie ein geometriſcher Grundriß erſcheint, und überhaupt wird eine ebene Figur eben nicht leicht orthographiſch perſpectiviſch gezeichnet. Gewöhnlich iſt es ein Körper deſſen Bild gezeichnet werden ſoll, und alsdenn frägt ſich nur von welcher Seite betrachtet, ihn das Bild darſtellen ſoll, und wie weit er zugleich von oben betrachtet aus einander geſetzt erſcheinen ſoll. Jene Betrachtung beſtimmt den Winkel α, dieſe den Winkel β.

218. §.

Was den erſten Umſtand betrift, ſo muß der Winkel α ſo angenommen werden, daß die Stücke, welche vornemlich ins Auge fallen ſollen, von andern nicht bedeckt werden, auch deſto mehr auseinander geſetzt erſcheinen, je mehr es darauf ankommt, daß ſie in dem Bilde vorzüglich mehr deutlich als die übrigen erſcheinen.

Weil die verſchiedene Entfernung der Theile hinter der Tafel keine ſcheinbare Schmählerung verurſacht, ſo kommt auf dieſen Umſtand hier nichts an, mehr aber auf die optiſche Höhe des Auges über demjenigen Horizont, worauf der abzubildende Körper ſtehet. Stünde das Auge in dieſem Horizont, ſo würde es den Körper nur von einer Seite, von oben gar nicht, ſehen können: ſtünde es aber völlig grade über dieſem Horizont 90° hoch, ſo würde es die lothrechten Seitenflächen und Seitenlinien des Körpers nicht ſehen. Deswegen müſſen dieſe beyden Lagen des Auges vermieden werden, es muß

we-

weder $\beta=0$, noch auch $\beta=90°$ ſeyn. Dieſem nach muß das Auge ſo hoch über dem Horizont erhaben werden, daß es den Körper von oben ſo gut als von der Seite wahrnehmen kann: oder wenn der Körper auf die eine Art mehr als auf die andre auseinander geſetzt erſcheinen ſoll, ſo wird ebenfalls die Gröſſe des Winkels β ſich darnach richten müſſen.

219. §.

Wenn das Auge von der erſten Verticalfläche gar nicht abweicht, oder der Winkel $\alpha=0$ iſt; ſo wird $\operatorname{tang}\zeta=\frac{\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{tang}\beta}{1+\cot\alpha\cot\eta}$ (210 §.)

$$=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha+\cos\alpha\cot\eta}=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\cot\eta}=\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\eta,$$

und Af (212 §.) $=AF\sin\eta\sqrt{(\cot\eta^2+\operatorname{tang}\beta^2)}$ $=AF\sqrt{(\cos\eta^2+\sin\eta^2\operatorname{tang}\beta^2)}$. Wird überdem die Höhe des Auges $\beta=45°$ angenommen, ſo iſt $\operatorname{tang}\beta=1$, mithin $\operatorname{tang}\zeta=\operatorname{tang}\eta$, oder $\zeta=\eta$, und $Af=AF$. Bey dieſer Vorausſetzung alſo verwandelt ſich die orthographiſche Projection einer jeden horizontalliegenden ebenen Figur in einen Geometriſchen Grundriß, weil die Bilder aller Linien, mit den Linien ſelbſt einerley Lage und Gröſſe behalten. Weil nun die verticalen Höhen ebenfalls allemahl ihre natürliche Gröſſe behalten, ſo iſt dies unter allen perſpectiviſchen Zeichnungsarten die leichteſte. Man bedient ſich derſelben wohl, um auf dem Grundriſſe einer Stadt oder Feſtung auch die Häuſer und Feſtungswerke aufzuſtellen, welches ſehr leicht durch verticale Parallellinien geſchicht, die

aus

aus jedem merkwürdigen Punct der Grundfläche aufgerichtet, und nach dem natürlichen Maaßſtabe ſo groß gemacht werden, als die Höhen der Gegenſtände über dieſe Puncte der Grundfläche ſind. Practiſche Zeichner nennen dieſe Projections-Art die Vogel-Perſpectiv: auch wird ſie die Cavalier-Perſpectiv genannt.

220. §.

Beſtehet der abzubildende Körper aus Rechtecken, die ihn als Seitenflächen einſchlieſſen, ſo entwirft man das Bild deſſelben gemeiniglich ſo, daß eine Seitenlinie deſſelben, wie z. E. AD mit der Grundlinie parallel liegt, damit dieſelbe, und alle mit ihr parallel laufende Linien ohne weitere Umſtände nach dem natürlichen Maaßſtabe können ausgemeſſen werden. Um die Lage des Auges zu beſtimmen giebt man ſich eben nicht viele Mühe, weil es nur darum zu thun iſt, daß alle Theile des Bildes recht deutlich aus einander geſetzt erſcheinen ſollen. Dieſerwegen iſt bey der Zeichnung ſelbſt beynahe alles willkührlich, wie man aus dem folgenden Beyſpiel eines viereckten Gefäſſes wird abnehmen können. 93 F.

Man zieht AD, welches die Seitenlinie iſt, die ganz ins Auge fallen ſoll, mit der Horizontallinie parallel, giebt ihr die gehörige Länge nach dem angenommenen natürlichen Maaßſtabe, und nach eben demſelben zeichnet man auch die Höhe A*a*. Der anliegenden Seitenlinie AB giebt man eine ſolche Lage, daß ſie nicht allein hinlänglich ins Auge falle, ſondern auch die obere Oefnung des Gefäſſes aus einander geſetzt erſcheine, und kein zu ſehr verzogenes

Viereck vorſtelle. Man kann in ſolcher Abſicht den Winkel BAL zwiſchen 40 und 50 Grade groß machen. Eben dieſer Seitenlinie AB giebt man nun die gehörige Länge ebenfalls nach einem willkührlich gewählten Maasſtabe, deſſen Abtheilungen eben ſo groß, gröſſer oder kleiner ſeyn können, als die Abtheilungen des erſtern, welchen man für AD brauchte, nachdem man will, daß ſie länger oder kürzer, und mit derſelben die obere Oefnung des Gefäſſes weiter oder enger erſcheinen ſoll. Nun wird das Parallelogramm ABCD als die Grundfläche gezeichnet, und über jedem Winkelpunct die perſpectiviſche Höhe aufgerichtet, und zwar ſo, daß alle nach einerley Maaßſtab gleich groß gemacht werden; ſo giebt ſich die obere Oefnung von ſelbſt.

221. §.

93 F. Soll keine Seitenlinie des abzubildenden Gefäſſes mit der Grundlinie parallel laufen; ſo muß man zuförderſt auf der Tafel eine Horizontallinie, nebſt der erſten Verticallinie RT ziehen, und jene für einen willkührlich angenommenen Halbmeſſer RO = D im Verhältniß der Tangenten eintheilen. Hiernächſt nimmt man die Winkel α und β den Umſtänden gemäß an, falls ſie nicht gegeben ſind, und ſucht den Hülfspunct G. Nun muß die Lage einer Seitenlinie, wie AB gegen die Tafel und erſte Verticalfläche gegeben ſeyn. Sie ſchneide die Tafel unter einem Winkel von 70° mithin die erſte Verticalfläche unter einem Winkel von 20°; ſo muß man GP in den 20ſten Grad der Horizontallinie ziehen. Weil ferner BAD ein rechter Winkel ſeyn ſoll, ſo zieht man GΠ in den 70ſten Grad: und nun muß AB

AB mit GP, AD mit GΠ parallel gezogen werden. Soll man das Gefäß allein zeichnen, ſo iſt es gleichviel, wo man den Punct A auf der Tafel annimmt, und man kann ihn, um die wenigſten Umſtände zu haben, auf G annehmen. Sollen aber Bilder von mehrern Gegenſtänden in beſtimmter Lage und Entfernung gegen einander gezeichnet werden, ſo muß man die Entfernung des Puncts A von der Tafel und der erſten Verticalfläche wiſſen: oder wenn BA in K an die Tafel ſtößt, ſo muß TK$=f$, und die ſchräge Vertiefung KA bekannt ſeyn. Damit man nun den Linien KA, AB, AD, die gehörige Länge geben könne, ſuche man nach dem 215 §. für die mit GP und GΠ parallele Linien den Maaßſtab. Es wird nemlich in dieſem Exempel, wo RO$=$10 Fuß angenommen iſt, OP$=$ 10$\frac{1}{2}$ Fuß, und OΠ$=$28 Fuß. Demnach theile man GP in 21 gleiche Theile, ſo werden dies halbe Füſſe für die mit GP parallele Linien ſeyn; eben ſo theilt man GΠ in 28 gleiche Theile, ſo hat man den Fußmaaßſtab für die Linien, die mit GΠ parallel laufen. Nun ſey TK$=f=$ 19 Fuß, KA$=$ 3 Fuß, AB$=$4 Fuß, AD$=$8 Fuß; ſo trägt man von T nach K 19 geomeriſche Fuſſe, zieht KB mit GP parallel, nimmt KA$=$ 3 Fuß, AB$=$ 4 Fuß nach dem Maaßſtab GP. Weiter zieht man AD mit GΠ parallel, und macht AD$=$ 8 Fuß nach dem Maaßſtab GΠ. Endlich verzeichnet man das Parallelogramm ABCD, und richtet aus den Winkelpuncten gleiche Höhen A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, nach dem geometriſchen Maaße auf; ſo giebt ſich das übrige des Bildes von ſelbſt.

222. §.

93 F. n. 2. Es iſt auf der Tafel das Bild AB einer horizontal liegenden graden Linie von bekannter Länge und Lage gegeben: auch iſt auf der Tafel die Lage der Horizontallinie, oder ſtatt deſſen die Lage des Bildes einer verticalen Linie, wie *tr* bekannt: man ſoll die Abweichung des Auges von der Verticalfläche nebſt der Höhe deſſelben über dem Horizont der durchs AB abgebildeten Linie finden.

Aufl. Es ſey die Länge des Bildes $AB = \lambda$, die Länge der abgebildeten Linie $= L$, ihre Neigung gegen die Tafel $= \eta$, die Neigung des Bildes gegen die Grundlinie oder Horizontallinie der Tafel $= \zeta$, die Abweichung des Auges $= \alpha$, die Höhe $= \beta$; ſo hat man $\tan\zeta = \frac{\sec\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \cot\eta}$ (210 §.) und

$\lambda = L . \sin\eta (\tan\alpha + \cot\eta) \sec\zeta$. (212. 214. §.)

Die letzte Gleichung giebt $\tan\alpha = \frac{\lambda . \cos\zeta}{L \sin\eta}$

$- \cot\eta = \frac{\lambda . \cos\zeta - L \cos\eta}{L \sin\eta}$; alſo $\sec\alpha =$

$\frac{\sqrt{(L^2 \sin\eta^2 + (\lambda \cos\zeta - L \cos\eta)^2)}}{L \sin\eta}$, und

$$\frac{\tan\alpha + \cot\eta}{\sec\alpha} = \frac{\lambda \cos\zeta}{\sqrt{(L^2 \sin\eta^2 + (\lambda \cos\zeta - L \cos\eta)^2)}}.$$

Demnach erhält man aus der erſten Gleichung

$$\tan\beta = \frac{(\tan\alpha + \cot\eta) \tan\zeta}{\sec\alpha}$$

=

$$= \frac{\lambda \sin\zeta}{\sqrt{(L^2 \sin\eta^2 + (\lambda \cos\zeta - L \cos\eta)^2)}}.$$

Will man das geſuchte durch Zeichnung finden, ſo kann man ſich ſo verhalten. Man ziehe eine Horizontallinie PΠ deren Lage als bekannt angenommen wird, nehme den Hülfspunct G nach Gefallen an, und ziehe GP bis an die Horizontallinie mit AB parallel. Weiter ziehe man AL mit der Horizontallinie parallel, mache AL = L, ziehe BL, und GΩ mit BL parallel, ſo iſt PΩ der reducirte Abſtand des Auges vom Vereinigungspunct P, und $P\Omega = D \operatorname{coſec}\eta$. Nun mache man den Winkel $\Omega PO = \eta$, nehme $PO = P\Omega$, und ziehe OR auf die Horizontallinie ſenkrecht, ſo iſt R der reducirte Augenpunct. Noch ziehe man Gg auf die Horizontallinie ſenkrecht, hiernächſt aber Og, ſo iſt $ROg = \alpha$: wenn man alsdenn $g\omega = gO$ nimmt, und ωG ziehet, ſo wird $\Omega\omega G = \beta$.

Wenn man nemlich $RO = D$ ſetzt, ſo iſt $RP = D \cot\eta$ und $Rg = D \operatorname{tang} ROg$, mithin $gP = Rg + RP = D(\operatorname{tang} ROg + \cot\eta)$. Weil ferner das Dreyeck $GP\Omega \backsim ABL$, ſo hat man $\frac{AB}{AL} = \frac{GP}{\Omega P} = \frac{GP}{OP}$, weil $OP = \Omega P$ gemacht iſt, mithin $\frac{\lambda}{L} = \frac{gP . \sec\zeta}{D \operatorname{coſec}\eta}$, oder $\frac{\lambda \cos\zeta}{L \sin\eta} = \frac{gP}{D}$ $= \operatorname{tang} ROg + \cot\eta$, d. i. $\operatorname{tang} ROg = \frac{\lambda \cos\zeta}{L \sin\eta} - \cot\eta$, mithin $ROg = \alpha$. Ueberdem iſt 93 F. n. 2.

$gP = gG . \cot \zeta$ und $g\omega = gG . \cot . g\omega G$, folglich $gP : g\omega = \cot \zeta : \cot g\omega G = tg . g\omega G : tg . \zeta$. folglich $tg . g\omega G = \frac{gP . \text{tang}\,\zeta}{g\omega}$. Aber $g\omega = gO = D \sec\alpha$,

also wird $\text{tang} . g\omega G = \frac{(\text{tang}\,\alpha + \cot\eta)\ \text{tang}\,\zeta}{\sec\alpha}$,

und $g\omega G = \beta$.

223 §.

93 F. Weil es ganz gleichgültig iſt, wo man den
n. 1. Hülfspunct G annehmen will; ſo hätte man auch G auf A annehmen können. In der 93 Figur. num 1., wo der durch BAL abgebildete Winkel $\eta = 90°$ angenommen iſt, könnte A ſelbſt als der Hülfspunct betrachtet werden. Wenn alsdenn AB verlängert die Horizontallinie in R trift: ſo wird R der reducirte Augenpunct. Man verlängere DA bis L und mache AL ſo viele geometriſche Fuſſe lang, als die durch AB abgebildete Linie faſſet, ziehe BL, und hiernächſt AF mit BL parallel, ſo iſt RF der reducirte Abſtand des Auges. Demnach mache man RO = RF, ziehe Ag auf RF ſenkrecht, und darnächſt Og, ſo iſt $ROg = \alpha$. Weiter nehme man $g\omega = gO$, und ziehe ωA, ſo iſt $g\omega A = \beta$.

Es iſt bey dieſen umgekehrten Verfahren, wenn man aus dem gegebenen Bilde auf der Tafel die Abweichung des Auges von der Verticalfläche, und ſeine Höhe über dem Horizont ſucht, an ſich gleichgültig, ob man dieſelbe Horizontallinie, und denſelben reducirten Augenpunct findet, welche der Zeichner gebraucht hat, oder nicht. In der Lage und Erſcheinung der Bilder gegen einander hängt davon

nichts

nichts ab, was für eine Horizontallinie, und was für ein reducirter Augenpunct dabey iſt angenommen worden. Auch hängt nichts davon ab, wie weit die Gegenſtände hinter der Tafel angenommen ſind: alſo kommt auch nichts darauf an, die Grundlinie wieder zu ſuchen, die der Zeichner gebraucht hat. Weis man indeſſen, wie weit ein Punct, wie A, von der Tafel, und der erſten Verticalfläche entfernt iſt, ſo kann man auch leicht, die von dem Zeichner gebrauchte Grundlinie, und erſte Verticallinie wieder finden. Hat man nemlich Δ und δ, ſo zieht man AN mit GR parallel, und macht AN nach dem Maaßſtab GR, (der nach dem 215 §. eingetheilt wird) ſo viele Fuſſe lang, als δ faſſen ſoll, ſo liegt N in der Grundlinie. Ferner wird NT$=\Delta$ genommen, ſo iſt T der Fußpunct des Auges, durch welchen die erſte Verticallinie gehet.

224 §.

Wenn man die verſchiedenen Fälle durchgehen will, wie nach Anleitung der Regeln des XII. Abſchnitts aus der bekannten Gröſſe einiger Linien und Winkel des Bildes die bey der Verzeichnung angenommene Lage des Auges wieder gefunden werden kann; ſo ergiebt ſich leicht, welche von den dort umſtändlich erörterten Hülfsmitteln, und mit welcher Veränderung, ſie hier ihre Anwendung finden. Die Lage der Horizontallinie iſt das erſte, was man auch hier zuförderſt kennen muß, ehe und bevor man die Winkel α und β, welche die Lage des Auges beſtimmen, ſuchen kann. Die im 177 §. angezeigten Hülfsmittel werden auch hier gewöhnlich dienen, die Lage der Horizontallinie zu finden, weil nicht leicht

eine Zeichnung dieſer Art vorkommen wird, worinn nicht verticale Linien vorkommen ſollten. Das Hülfsmittel des 178 §. aber fällt hier weg, weil die Bilder paralleler Linien hier keinen Vereinigungspunct haben.

Wird nun vorausgeſetzt, daß die Lage der Horizontallinie ſchon bekannt ſey, ſo laſſen ſich die Aufgaben des 180. 182. 184. §. auch für die orthographiſche Projection leicht mit einiger Aenderung anwenden. Das geſuchte ſind hier allemahl die Winkel α und β, ſtatt deſſen daß es dort die Linien RP oder LR und RO waren.

225. §.

94 F. Die Lage eines Schenkels nebſt der Gröſſe eines durch *abc* auf der Tafel abgebildeten Winkels iſt gegeben: man ſucht die Lage des Auges, die Lage der Horizontallinie als bekannt angenommen.

Aufl. Man ziehe eine Horizontallinie PΠ, und nehme einen Hülfspunct G beliebig an. Aus demſelben ziehe man GP, *Gp*, bis an die Horizontallinie mit *ba*, *bc* parallel und *Gg* auf die Horizontallinie ſenkrecht. Der durch *abc* abgebildete Winkel ſey $=\varphi$, und der durch *ba* abgebildete Schenkel ſey gegen die Grundlinie unter dem Winkel $=\eta$ geneigt. Auf der Sehne P*p* ſetze man einen Kreisbogen, deſſen Halbmeſſer $=\frac{1}{2}c.\text{coſec}\varphi$, P$p=c$ geſetzt. Weiter mache man den Winkel *p*PO$=\eta$, ſo giebt ſich der Durchſchnittspunct O mit dem Kreiſe, als die reducirte Stelle des Auges. Wird alsdenn OR auf PΠ ſenkrecht geſetzt, und O*g* gezogen, ſo hat

man

man RO$g=\alpha$; und wenn ferner $g\omega=g$O genommen, und ωG gezogen wird, ſo erhält man R$\surd$G$=\beta$.

Durch Rechnung lieſſen ſich die Winkel α und β ſo finden. Man ſetze P$g=g$, gG$=h$, ſo ſind dieſe Linien auf der Tafel gegeben. Weiter iſt R$g=g$P$-$PR, PR$=c.(\cot\varphi \sin\eta+\cos\eta)\cos\eta$, und RO $=c(\cot\varphi\sin\eta+\cos\eta)\sin\eta$ (180 §.) alſo wird

$$\tan\alpha=\frac{Rg}{RO}=\frac{g-c.(\cot\varphi\sin\eta+\cos\eta)\cos\eta}{c.(\cot\varphi\sin\eta+\cos\eta)\sin\eta}$$

$$=\frac{g-c.\sin(\eta+\varphi)\cos\eta}{c.\sin(\eta+\varphi)\sin\eta},\quad \text{und}\quad \sec\alpha$$

$$=\frac{\surd(c^2\sin(\eta+\varphi)^2\sin\eta^2+(g-c.\sin(\eta+\varphi)\cos\eta)^2)}{c.\sin(\eta+\varphi)\sin\eta}.$$

Das giebt ferner $g\omega=g$O$=$RO $\sec\alpha=\surd(c^2\sin(\eta+\varphi)^2\sin\eta^2+(g-c.\sin(\eta+\varphi)\cos\eta)^2)$, und

$$\tan\beta=\frac{gG}{g\omega}=\frac{h}{c(\cot\varphi\sin\eta+\cos\eta)\sin\eta\sec\alpha}.$$

Man wird leicht wahrnehmen, wie die Auflöſung der Aufgabe des 182 §. ſich anwenden laſſe, wenn die Projection orthographiſch iſt. Es ſey der durch abc abgebildete Winkel $=\varphi$, der durch ABC abgebildete $=\psi$, und PΠ horizontal. Wenn GP, Gp, mit ba, bc, ſo wie Gπ, GΠ, mit BA, BC parallel gezogen ſind, und man auf Pp, $\Pi\pi$, Kreisbogen ſetzt, deren Halbmeſſer $\frac{1}{2}$Pp.coſecφ, und $\frac{1}{2}\Pi\pi$.coſecψ ſind; ſo ſchneiden beyde einander, und einer von beyden Durchſchnittspuncten, wie O, iſt die reducirte Stelle des Auges. Weiter werden nun auch α und β, wie vorhin leicht durch Zeichnung gefunden, um ſie durch Rechnung zu finden, ſucht man,

wie im 182 §. $LR = t$, und $RO = D$; ſo hat man $Rg = g - \frac{1}{2}c - t$, $\tan\alpha = \frac{Rg}{D}$, und $\tan\beta =$

$$\frac{h}{\sqrt{(D^2 + Rg^2)}} = \frac{h}{D\sec\alpha}.$$ Weil endlich die Aufgabe des 184 §. nur ein beſondrer Fall von der Aufgabe des 182 §. iſt; ſo wendet man ihre Auflöſung ebenfalls leicht an, wenn die Projection orthographiſch iſt.

226. §.

Den orthographiſchen Abbildungen wird gewöhnlich der geometriſche Maaßſtab beygefüget, und wenn auch dies nicht wäre, ſo könnte man ihm leicht herſtellen, wenn nur die Länge einer einzigen verticalen, oder mit der Horizontallinie parallelen Linie auf der Tafel bekannt wäre: denn alle ſolche Linien werden nach dem geometriſchen Maaßſtab gemeſſen. (209 §.) Wäre die Länge einer durch AB (93 F.) abgebildeten Linie bekannt, die nicht mit der Tafel parallel läuft, ſo läſt ſich der geometriſche Maaßſtab ebenfalls herſtellen, wenn die Lage des Auges vermittelſt eines von den im vor. §. angezeigten Mitteln gefunden iſt, oder doch ſonſt als bekannt angenommen werden kann.

Man nehme den Hülfspunct G nach Gefallen an, ziehe GP mit AB parallel, und Gg auf die Horizontallinie ſenkrecht. Ferner mache man den Winkel $GgO = \alpha$, $gG\omega = 90° - \beta$, und trage $g\omega$ auf gO, ziehe hiernächſt PO. Nun theile man AB in ſo viele gleiche Theile, als Fuſſe die Länge AB aus-

ausmachen, und ſehe zu, wie viele ſolcher Theile PG faſſet. In eben ſo viele gleiche Theile muß man OP eintheilen, ſo hat man den geſuchten Maaßſtab.

Man kann auch PO in PΩ tragen, hiernächſt ΩG, und darauf BL mit ΩG, ſo wie AL mit der Horizontallinie parallel ziehen: alsdenn iſt AL im Geometriſchen Maaß ſo lang als AB im perſpectiviſchen, und der geſuchte Maaßſtab iſt ebenfalls gefunden.

Der XIV. Abſchnitt.

Theorie der orthographiſchen Projectionen auf der ſchiefliegenden Tafel.

227. §.

Man wird ſich noch aus dem VII. Abſchnitt erinnern, daß die Regeln der perſpectiviſchen Zeichenkunſt nicht bloß auf die vertical ſtehende Tafel eingeſchränkt ſind, ſondern vielmehr mit einer geringen Veränderung noch ihre Anwendung finden, wenn gleich die Tafel gegen den Horizont der abzubildenden Figur eine ſchiefe Lage hat. Es iſt der Mühe werth, zu unterſuchen, nach welchen Regeln ſich auch orthographiſch-perſpectiviſche Bilder auf der ſchiefliegenden Tafel zeichnen laſſen. Zu dem Ende gehe man auf die 64 Figur und dasjenige zu-

rück, was darüber im 86 und den folgenden §§. umſtändlich iſt geſagt worden, und vergleiche damit die
64 F. Schlüſſe des 200 §. ſo hat man in der 64. Figur $rtH = Ort = \psi$, $tGL = GLC = \alpha$, $GLO = \beta$; und wenn $LO = E$ geſetzt wird, ſo findet man $OG = a = E \sin\beta$, und $GL = E \cos\beta$. Zieht man Gg mit Ct parallel, ſo wird $Lg = LC + tG = LC + ts - Gs = \delta + D \operatorname{cosec}\psi . - a \cot\psi$; überdem iſt auch $Lg = LG \cos\alpha = E \cos\beta \cos\alpha$, mithin findet man $D \operatorname{cosec}\psi + \delta = E \cos\beta \cos\alpha + a \cot\psi$, oder $D \operatorname{cosec}\psi + \delta = E \cos\alpha \cos\beta + E \sin\beta \cot\psi$. Noch wird $Ct = Gg = \Delta = GL \sin\alpha = E \cos\beta \sin\alpha$, und das giebt $\tang tCr = \tang\zeta = \frac{rt}{Ct} = \frac{a \operatorname{cosec}\psi}{E \cos\beta \sin\alpha}$

$$= \frac{\sin\beta \operatorname{cosec}\psi}{\cos\beta \sin\alpha} = \tang\beta \operatorname{cosec}\alpha \operatorname{cosec}\psi,$$ woraus

hiernächſt $Cr = tr . \operatorname{cosec}\zeta = a \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta = L$ (95 §.) $= E \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta$ gefunden wird. Dieſemnach kann man auch hier wie im 200 §. die Gröſſen D, a, Δ, und ζ durch E, α, β, ausdrücken, wozu aber hier noch der gleichfalls gegebene Winkel ψ kommt. Man hat nemlich $D \operatorname{cosec}\psi + \delta = E(\cos\alpha \cos\beta + \sin\beta \cot\psi)$, oder $D = E(\cos\alpha \cos\beta \sin\psi + \sin\beta \cos\psi) - \delta \sin\psi$, $\tang\zeta = \operatorname{cosec}\alpha \tang\beta \operatorname{cosec}\psi$. Uebrigens bleibt

$$a = E \sin\beta$$
$$\Delta = E \sin\alpha \cos\beta.$$

Wenn nun Cl die perſpectiviſche Vertiefung iſt, die der ſenkrechten Vertiefung CL zugehört, ſo hat man

$$Cl = \frac{\delta . L}{D \operatorname{cosec}\psi . + \delta} (97\ §.) = \frac{\delta . \sin\beta \cos\psi \operatorname{cosec}\zeta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\beta \cot\psi}$$

=

$= \frac{\delta . \text{tang}\beta \,\text{ſec}\alpha \,\text{coſec}\zeta \,\text{coſec}\psi}{1 + \text{tang}\beta \,\text{ſec}\alpha \,\text{cot}\psi}$; oder auch

$(\text{tang}\,\beta = \frac{\text{tang}\,\zeta}{\text{coſec}\alpha \,\text{coſec}\psi}$ geſetzt)

$$Cl = \frac{\delta . \text{tang}\alpha \,\text{ſec}\zeta}{1 + \text{tang}\alpha \,\text{tang}\zeta \,\text{coſ}\psi}.$$

Man ſiehet hieraus, daß die Sätze des 201 §. hier ebenfalls ihre Anwendung finden, wenn man annimmt, das Auge ſey von L unendlich weit entfernt: weil alsdenn für jeden Punct L im Horizont die Winkel α und β einerley bleiben.

228. §.

Wenn nun gleich der Geſichtsſtrahl LO ins unendliche fortläuft, ſo kann man doch wie im 203 §. in demſelben einen willkührlichen Punct O annehmen, und von demſelben OR und OG auf die Tafel und den Horizont ſenkrecht fällen, ſo wird die Ebene GORt als die erſte Verticalfläche, und R als der reducirte Hauptaugenpunct zu betrachten ſeyn. Weiter ſey Or mit Gt parallel, durch r aber pn mit CD parallel gezogen, ſo iſt die Ebene Opn horizontal, und wird hier als der Haupthorizont betrachtet, worauf man die Stelle des Auges, und was davon abhängt, reducirt. Noch ſey On mit GL parallel, und LS vertical; ſo liegt On im Hauptshorizont, und zugleich in der Verticalfläche OGLS, welche die Tafel in Sq ſchneidet: mithin iſt rOn = tGL = α, nOL = GLO = β. 64 F.

Nun war im 227. §. Ct = Gg = $\triangle$ Lg = D coſecψ − a cotψ + δ, alſo hat

 man

man $\frac{\Delta}{D \operatorname{coſec}\psi - a\cot\psi + \delta} = \operatorname{tang}\alpha$, und das giebt $D\operatorname{coſec}\psi + \delta = \Delta\cot\alpha + a\cot\psi$. Weiter iſt $\frac{a}{(D\operatorname{coſec}\psi - a\cot\psi + \delta)\sec\alpha} = \operatorname{tang}\beta$, oder $\frac{a}{\Delta\cot\alpha\sec\alpha} = \operatorname{tang}\beta$, mithin $a = \Delta\operatorname{coſec}\alpha \operatorname{tang}\beta$. Dieſer Werth ſtatt a gebraucht giebt $D\operatorname{coſec}\psi = \Delta\cot\alpha + \Delta\operatorname{coſec}\alpha\operatorname{tang}\beta\cot\psi - \delta$ oder $D = \Delta(\cot\alpha\sin\psi + \operatorname{coſec}\alpha\operatorname{tang}\beta\cos\psi) - \delta\sin\psi$. Weiter iſt $rn = D\operatorname{coſec}\psi\operatorname{tang}\alpha$, und wenn man $rnq = \xi$ ſetzt, (106 §.) ſo iſt $\operatorname{tang}\xi = \frac{rq}{rn}$

$$= \frac{\sec\psi\operatorname{coſec}\psi}{\operatorname{coſec}\psi\operatorname{tang}\alpha} = \sec\psi\cot\alpha.$$ Noch ſetze man $Onl = \nu$, ſo wird $\operatorname{tang}.\nu = \frac{Oq}{On} = \frac{\sec\psi}{\operatorname{coſec}\psi\sec\alpha}$, oder $\operatorname{tang}\nu = \operatorname{tang}\psi\cos\alpha$. Nun hat man im Dreyeck Onl aus den Winkeln $Onl = \nu$, $lOn = \beta$, und der Seite $On = D\operatorname{coſec}\psi\sec\alpha$ auch die Seite

$$nl = \frac{On.\operatorname{tang}\beta}{\sin\nu + \operatorname{tang}\beta\cos\nu}$$ (453. §. Geom.)

$$= \frac{D\operatorname{coſec}\psi\sec\alpha\operatorname{tang}\beta\sec\nu}{\operatorname{tang}\nu + \operatorname{tang}\beta}$$

$$= \frac{D\operatorname{coſec}\psi\sec\alpha(\sqrt{(1 + tg\psi^2\cos\alpha^2)}}{\operatorname{tang}\psi\cos\alpha + \operatorname{tang}\beta}.$$

Wenn ψ, α und β nebſt Δ und δ gegeben ſind, ſo hat man $D = \Delta.(\cot\alpha\sin\psi + \operatorname{coſec}\alpha\operatorname{tang}\beta\cos\psi)$

$\operatorname{coſ}\beta) - \delta \sin\psi$, mithin auch rn, nl, und tang. rnl $= \text{tang}\,\xi = \sec\psi \cot\alpha$. Die Formul für nl wird kürzer, wenn man den Winkel ξ hinein bringt. Es iſt nemlich $\sec\xi = \sqrt{(1 + \sec\psi^2 \cot\alpha^2)}$, und wenn man $\operatorname{coſec}\alpha^2 - \cot\alpha^2$ ſtatt 1 ſetzt, ſo iſt $\sec\xi = \sqrt{(\operatorname{coſec}\alpha^2 + (\sec\psi^2 - 1)\cot\alpha^2)}$ oder $\sec\xi = \frac{\sqrt{(1 + \text{tang}\psi^2 \operatorname{coſ}\alpha^2)}}{\sin\alpha}$. Nun multiplicire man den Werth von nl im Zähler und Nenner mit $\cot\beta$, und ſetze $\sin\alpha \sec\xi$ ſtatt $\sqrt{(1 + \text{tang}\,\psi^2 \operatorname{coſ}\alpha^2)}$ ſo wird $nl = \frac{D \operatorname{coſec}\psi\, \text{tang}\,\alpha \sec\xi}{1 + \cot\beta\, \text{tang}\,\psi \operatorname{coſ}\alpha}$. Vorhin war $rn = D \operatorname{coſec}\psi\, \text{tang}\,\alpha$, alſo hat man auch $\frac{nl}{rn}$

$$= \frac{\sec\xi}{1 + \cot\beta\, \text{tang}\,\psi \operatorname{coſ}\alpha}.$$

229 §.

Die Lage des Auges gegen den Horizont eines abzubildenden Puncts iſt durch die Winkel α und β beſtimmet, auch ſind die Entfernungen Δ und δ dieſes Puncts von der erſten Verticalfläche und der Grundlinie der gegen den Horizont unter dem Winkel ψ geneigten Tafel gegeben: man ſoll die orthographiſche Projection deſſelben durch Zeichnung auf der Tafel finden. 95 F.

Aufl. Man ziehe eine grade Linie XY als die Grundlinie der Tafel und nehme den Punct R als den reducirten Hauptaugenpunct willkührlich an, ziehe durch denſelben Rt auf die Grundlinie ſenk-

recht,

recht, und RO auf Rt ſenkrecht: nehme hierauf RO$=$D willkührlich an, mache RO$r=90°-\psi$, und ziehe durch r die Horizontallinie mit der Grundlinie parallel. Weiter mache man $rOq=90°$ oder RO$q=\psi$, nehme $ro=r$O und mache $ron=\alpha$, ziehe nq und ſetze darüber ein Dreyeck $n\omega q$, deſſen Seite $n\omega=no$, und $q\omega=q$O. Ferner ſetze man an $n\omega$ den Winkel $n\omega l=\beta$, ziehe rl, nehme $r\Omega=ro$ und ziehe $l\Omega$. Endlich nehme man tC$=\Delta$, CD$=\delta$, und ziehe durch C mit lr, durch D aber mit $l\Omega$ Parallelen, die ſich in λ ſchneiden, ſo iſt λ das geſuchte Bild.

Beweis. Vermöge der Verzeichnung iſt $rn=\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{tang}\,\alpha$, $rq=\mathrm{D}\,\mathrm{ſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\psi$, alſo

$$\mathrm{tang}.rnl=\frac{rq}{rn}=\frac{\mathrm{ſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\psi}{\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{tang}\,\alpha}=\mathrm{ſec}\,\psi\,\mathrm{cot}\,\alpha,$$

folglich $rnl=\xi$. (228. §.) Ueberdem iſt $nq^2=rn^2+rq^2=\mathrm{D}^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2\,\mathrm{tang}\,\alpha^2+\mathrm{D}^2\,\mathrm{ſec}\,\psi^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2$,

$$\text{und } \mathrm{ſec}\,\psi^2.\mathrm{coſec}\,\psi=\frac{1}{\mathrm{ſin}\,\psi^2.\mathrm{coſ}\,\psi^2}=\frac{1}{\mathrm{ſin}\,\psi^2}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{coſ}\,\psi^2}=\mathrm{ſec}\,\psi^2+\mathrm{coſec}\,\psi^2;$$ alſo $nq^2=\mathrm{D}^2(\mathrm{coſec}\,\psi^2\,\mathrm{tang}\,\alpha^2+\mathrm{ſec}\,\psi^2+\mathrm{coſec}\,\psi^2)=\mathrm{D}^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2\,\mathrm{ſec}\,\alpha^2+\mathrm{D}^2\,\mathrm{ſec}\,\psi^2=n\omega^2+q\omega^2$ (vermöge der Verzeichnung. Demnach iſt $n\omega q=90°$, (112 §. G.)

$$\text{und tang}\,\omega nl=\frac{\omega q}{\omega n}=\frac{\mathrm{ſec}\,\psi}{\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{ſec}\,\alpha}=\mathrm{tang}\,\psi$$

$\mathrm{coſ}\,\alpha$. Es wird alſo $\omega nl=\nu$, (228 §.) und vermöge der Zeichnung iſt $n\omega l=\beta$. Das giebt $nl=$

$$\frac{n\omega.\mathrm{ſin}\,\beta}{\mathrm{ſin}\,(\beta+\nu)}=\frac{\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{ſec}\,\psi\,\mathrm{ſin}\,\beta}{\mathrm{ſin}\,(\beta+\nu)},$$

und

und $\frac{nl}{rn} = \frac{\text{coſec}\alpha\,\text{ſin}\beta}{\text{ſin}(\beta+\nu)} = \frac{\text{coſec}\alpha\,\text{ſin}\beta}{\text{ſin}\beta\,\text{coſ}\nu + \text{coſ}\beta\,\text{ſin}\nu}$

$= \frac{\text{coſec}\alpha\,\text{ſec}\nu}{1 + \cot\beta\,\text{tang}\nu} = \frac{\text{coſec}\alpha\sqrt{(1 + tg.\psi^2 \text{coſ}\alpha^2)}}{1 + \cot\beta\,tg\psi\,\text{coſ}\alpha}$.

Der Zähler wird $= \frac{1}{\text{ſin}\alpha}\sqrt{(\text{ſin}\,\alpha^2 + \text{coſ}\alpha^2}$ $\text{ſec}\psi^2) = \sqrt{(1 + \cot\alpha^2\,\text{ſec}\psi^2)} = \text{ſec}\xi$, alſo $\frac{nl}{rn} = \frac{\text{ſec}\xi}{1 + \cot\beta\,tg\psi\,\text{coſ}\alpha}$, und $\frac{rn}{nl}\,\text{ſec}\xi =$ $1 + \cot\beta\,\text{tang}\psi\,\text{coſ}\alpha$. Im Dreyeck rnl aber iſt $\text{tang}\,nrl = \frac{nl.\text{ſin}\xi}{rn - nl\,\text{coſ}\xi} = \frac{\text{tang}\xi}{\frac{rn}{nl}\,\text{ſec}\xi - 1}$,

alſo wird $\text{tang}.nrL = \frac{\text{ſec}\psi\cot\alpha}{\cot\beta\,\text{tang}\psi\,\text{coſ}\alpha} =$ $\text{tang}\beta\,\text{coſec}\alpha\,\text{coſec}\psi = \text{tang}\zeta$ (227 §.) und es iſt $nrl = \zeta$.

In eben dem Dreyeck hat man $rl =$ $\frac{rn\,\text{ſin}\xi}{\text{ſin}(\zeta+\xi)} = \frac{D\text{coſec}\psi\,\text{tang}\alpha\,\text{ſin}\xi}{\text{ſin}\zeta\,\text{coſ}\xi + \text{coſ}\zeta\,\text{ſin}\xi} =$ $\frac{r\Omega.\text{tang}\alpha\,\text{ſec}\zeta}{1 + \text{tang}\zeta\cot\xi}$. Aber $\cot\xi = \frac{1}{\text{ſec}\psi\cot\alpha}$ $= \text{tang}\alpha\,\text{coſ}\psi$, alſo $rl = \frac{r\Omega.\text{tang}\alpha\,\text{ſec}\zeta}{1 + \text{tang}\alpha\,\text{tang}\zeta\,\text{coſ}\psi}$.
Endlich iſt das Dr. $r\Omega l \backsim$ Dr. $CD\lambda$, alſo $r\Omega : rl$ $= CD : C\lambda$, und $CD = \delta$ vermöge der Zeichnung, alſo

alſo wird $C\lambda = \dfrac{\delta . \tan\alpha \sec\zeta}{1 + \tan\alpha \tan\zeta \cos\psi}$, und λ iſt das geſuchte Bild. (227 §.)

Es iſt hier $C\lambda$ das Bild der ſenkrechten Vertiefung des durch λ abgebildeten Puncts hinter der Tafel, und weil die Länge dieſes Bildes der Länge δ der abgebildeten Linie ſelbſt proportional iſt; ſo finden die Sätze des 208 §. auch hier ihre Anwendung. Die perſpectiviſchen vertieften Fuſſe ſind gleich lang, wie die geometriſchen, und $C\lambda$ wird in perſpectiviſche Fuſſe getheilt, wenn man CD in geometriſche theilt, und durch die Theilungspuncte mit $D\lambda$ parallele Linien ziehet.

Um die Lage und Gröſſe der Vertiefung $C\lambda$ zu finden, leiſtet der Punct l eben die Dienſte, wie G im 211 §. er ſoll demnach auch hier der Hülfspunct heiſſen. Im folgenden werde ich vorausſetzen, daß er allemahl auf die hier gewieſene Art auf der Tafel geſucht ſey, bevor man die Zeichnung einer orthographiſchen Projection anfängt.

230 §.

64 F. Die Lage der ſchrägen Vertiefung KL iſt gegeben: man ſoll die Lage des Bildes Kl auf der Tafel finden.

Aufl. Wenn Op mit KL parallel gezogen wird, ſo liegt Op im Horizont Orn, und es wird $rOp = CLK$, $Orp = CKL$. Man ſetze $CKL = \varepsilon$, ſo hat man $rp = D\,\mathrm{coſec}\,\psi \cot\varepsilon$. Nun mag das Auge O in LO ſo weit man will wegrücken, ſo bleiben doch alle Geſichtsſtrahlen, die von einem Punct der

Linie

Linie KL ins Auge kommen in der Ebene OKL, welche mit der Ebene der Parallelen Op, KL einerley iſt, und letztere ſchneidet die Tafel in Kp, alſo muß das Bild l eines jeden Puncts L der Linie KL in Kp liegen. Nun ſetze man $tKp = \zeta$, $tK = f$, ſo hat man $\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{rt}{tK + rp} = \frac{a\,\mathrm{cosec}\,\psi}{f + D\,\mathrm{cosec}\,\psi\,\cot\varepsilon}$;

Man ſetze noch $CL = \delta$, $tC = \Delta$, ſo iſt $f = \Delta + \delta\cot\varepsilon$, und man hat $\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{a\,\mathrm{cosec}\,\psi}{\Delta + (D\,\mathrm{cosec}\,\psi + \delta)\cot\varepsilon}$.

Weiter iſt $a = \Delta\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta$, und $D\,\mathrm{cosec}\,\psi + \delta = \Delta\cot\alpha + a\cot\psi = \Delta\cot\alpha + \Delta\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\cot\psi$ (228 §.), alſo wird

$$\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{cosec}\,\psi}{1 + (\cot\alpha + \mathrm{cosec}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\cot\psi)\cot\varepsilon}.$$

Wenn $\varepsilon = 90°$ iſt, ſo hat man $\mathrm{tang}\,\zeta = \mathrm{cosec}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{cosec}\,\psi$, wie im 227 §. auch hängt ζ nicht von f oder Δ ab: mithin ſind die Bilder aller parallelen Vertiefungen ebenfalls parallel, wenn α, β, ψ, ε einerley ſind, es bleiben aber bey der orthographiſchen Projection α und β einerley, wo auch K in der Grundlinie angenommen wird.

Um nun die Lage des Bildes durch Zeichnung 95 F.
zu finden, theile man die durch r laufende Horizontallinie in dem Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer $D\,\mathrm{cosec}\,\psi$ ein, nehme $rp = D\,\mathrm{cosec}\,\psi\cot\varepsilon$, und nachdem der Hülfspunct l, wie im vor. §. gefunden worden, ziehe man pl, nehme $tK = f$, und ziehe $K\lambda \parallel lp$, ſo iſt geſchehen, was verlangt würde.

Beweis.

Beweis. Es iſt $np = rn + rp = D \operatorname{coſec}\psi$ $(tg.\alpha + \cot\varepsilon)$, und $nl = \frac{D \operatorname{coſec}\psi \, tg\alpha \, \sec\xi}{1 + \cot\beta \, tg\psi \, \operatorname{coſ}\alpha}$, (229 §.) alſo $\frac{nl}{np} = \frac{\operatorname{tang}\alpha \sec\xi}{(1 + \cot\beta \, tg\psi \, \operatorname{coſ}\alpha)(tg\alpha + \cot\varepsilon)}$ $= \frac{\sec\xi}{(1 + \cot\beta \, tg\psi \, \operatorname{coſ}\alpha)(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)}$, oder auch $\frac{nl}{np}$

$$= \frac{\sec\xi}{1 + \cot\alpha \cot\varepsilon + \cot\beta \, tg\psi \, \operatorname{coſ}\alpha (1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)},$$

mithin $\frac{np}{nl} \sec\xi - 1 = \cot\alpha \cot\varepsilon + \cot\beta \, tg\psi \, \operatorname{coſ}\alpha$ $(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)$. Im Dreyeck npl aber, wo $pnl = \xi$, hat man $\operatorname{tang} npl = \frac{nl . \operatorname{ſin}\xi}{np - nl . \operatorname{coſ}\xi} =$ $\frac{\operatorname{tang}\xi}{\frac{np}{nl} \sec\xi - 1}$, und $\operatorname{tang}\xi = \sec\psi \cot\alpha$, alſo wird

$$\operatorname{tang} npl = \frac{\sec\psi \cot\alpha}{\cot\alpha \cot\varepsilon + \cot\beta \, tg\psi \, \operatorname{coſ}\alpha (1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\beta \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\alpha}{1 + (\cot\alpha + \operatorname{tang}\beta \cot\psi \operatorname{coſec}\alpha)\cot\varepsilon} = \operatorname{tang}\zeta,$$

mithin $npl = tKL = \zeta$.

231. §.

Die Länge der ſchrägen Vertiefung KL 64 F. iſt gegeben: man ſoll die Länge des zugehörigen Bildes Kl finden.

Aufl. Es iſt $Kl = \frac{KL.L}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + KL}$ (97 §.) $= \frac{KL.\,\mathrm{ſin}\,\varepsilon}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi + KL\,\mathrm{ſin}\,\varepsilon} \cdot L =$
$\frac{\delta}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta} \cdot L$, $KL\,\mathrm{ſin}\,\varepsilon = CL = \delta$ geſetzt, und $L = Kp = a\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta$. Es war aber $a = E\,\mathrm{ſin}\,\beta$, und $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta = E(\mathrm{coſ}\,\alpha\,\mathrm{coſ}\,\beta + \mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{cot}\,\psi)$, (227 §.) alſo wird $Kl = \frac{\delta.\,\mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta}{\mathrm{coſ}\,\alpha\,\mathrm{coſ}\,\beta + \mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{cot}\,\psi}$
$= \frac{\delta\,\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{ſec}\,\alpha\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta}{1 + \mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{ſec}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\psi}$. Der im vor. §. gefundene Werth von $\mathrm{tang}\,\zeta$ aber giebt $\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\alpha = \mathrm{tang}\,\zeta + \mathrm{cot}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\varepsilon\,tg\,\zeta + \mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{cot}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\varepsilon\,tg\,\zeta$, und daraus findet man $\mathrm{tang}\,\beta(\mathrm{coſec}\,\psi - \mathrm{cot}\,\psi\,\mathrm{cot}\,\varepsilon\,tg\,\zeta) = tg\,\zeta\,\mathrm{ſin}\,\alpha(1 + \mathrm{cot}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\varepsilon)$, mithin $\mathrm{tang}\,\beta = \frac{\mathrm{tang}\,\zeta\,\mathrm{ſin}\,\alpha(1 + \mathrm{cot}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\varepsilon)}{\mathrm{coſec}\,\psi - \mathrm{cot}\,\psi\,\mathrm{cot}\,\varepsilon\,tg\,\zeta}$.
Man ſetze dieſen Werth in die vorhin gefundene Gleichung $Kl = \frac{\delta\,\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{ſec}\,\alpha\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta}{1 + \mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{ſec}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\psi}$, ſo wird der Zähler $= \frac{\delta\,\mathrm{ſec}\,\zeta\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{coſec}\,\psi\,(1 + \mathrm{cot}\,\alpha\,\mathrm{cot}\,\varepsilon)}{\mathrm{coſec}\,\psi - \mathrm{cot}\,\psi\,\mathrm{cot}\,\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\zeta}$

 =

$$= \frac{\delta \sec\zeta \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)}{1 - \cos\psi \cot\varepsilon \tang\zeta}$$, und der Nenner

$$= 1 + \frac{\tang\zeta \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)}{1 - \cos\psi \cot\varepsilon \tang\zeta}$$

$$= \frac{1 + \tang\zeta \tang\alpha \cos\psi}{1 - \cos\psi \cot\varepsilon \tang\zeta},$$ mithin

$$Kl = \frac{KL \sin\varepsilon \sec\zeta \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon)}{1 + \tang\zeta \tang\alpha \cos\psi}$$, $KL \sin\varepsilon$ ſtatt δ geſetzt.

Bey der Zeichnung bleibt das Verfahren dem im 229 §. vorgeſchriebenen ganz ähnlich. Nachdem der Hülfspunct l gefunden iſt, zählt man von r nach p ſo viele Grade, als der Winkel $90 - \varepsilon$ faſſet, nimmt $p\Pi = op$, ziehet lp und $l\Pi$. Hiernächſt nimmt man $tK = f$, $KP =$ der gegebenen ſchrägen Vertiefung KL, ziehet $K\lambda$ mit lp, $P\lambda$ mit $l\Pi$ parallel, und wenn λ der Durchſchnittspunct iſt, ſo wird $K\lambda$ das geſuchte Bild ſeyn.

Beweis. Im Dreyeck npl iſt $pl = \frac{np \,.\, \sin\xi}{\sin(\zeta + \xi)} = \frac{D \operatorname{coſec}\psi\,(\tang\alpha + \cot\varepsilon) \sin\xi}{\sin\zeta \cos\xi + \cos\zeta \sin\xi}$

$$= \frac{D \operatorname{coſec}\psi \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon) \sec\zeta}{1 + \tang\zeta \tang\alpha \cos\psi}$$, weil

$\cot\xi = \cos\psi \tang\alpha$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke $pl\Pi$ und $P\lambda K$ aber hat man $p\Pi : pl = KP : K\lambda$, mithin $D \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon : \frac{D \operatorname{coſec}\psi \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon) \sec\zeta}{1 + \tang\zeta \tang\alpha \cos\psi} = KL : K\lambda$,

und

und man findet

$$K\lambda = \frac{KL \sin\varepsilon \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon) \sec\zeta}{1 + \tang\zeta \tang\alpha \cos\psi},$$

wie erfordert wird.

Wenn die durch $K\lambda$ abgebildete Linie $= L$ geſetzt wird, und diejenige, welche $K\lambda$ abbildet, $= l$,

$$\text{ſo iſt } \Lambda\lambda = \frac{(L - l) \sin\varepsilon \tang\alpha\,(1 + \cot\alpha \cot\varepsilon) \sec\zeta}{1 + \tang\zeta \tang\alpha \cos\psi}.$$

Demnach iſt nicht allein jede perſpectiviſche Vertiefung der zugehörigen Geometriſchen proportional, ſondern auch überhaupt verhält ſich jedes Bild einer graden Linie auf der Tafel wie die abgebildete Linie.

Wenn $\varepsilon = 0$ iſt, ſo hat man $\cot\varepsilon = \infty$, alſo $\tang\zeta = 0$, und wenn man $L - l = b$ annimmt, ſo wird $\Lambda\lambda = b.\cos\varepsilon \sec\zeta = b$. Demnach iſt das Bild jeder mit der Grundlinie parallelen Linie der abgebildeten Linie ſelbſt gleich. Aus der Natur der Sache iſt auch für ſich begreiflich, daß das Bild jeder mit der Tafel parallelen Linie, der abgebildeten Linie ſelbſt gleich ſeyn müſſe. Uebrigens finden die Lehren des 208 §. hier eben ſo, wie im 229 §. ihre Anwendung. Alle perſpectiviſche Fuſſe ſind gleich lang und $K\lambda$ wird in perſpectiviſche Fuſſe getheilt, wenn man KP in geometriſche Fuſſe theilt, und durch die Theilungspuncte mit $P\lambda$ Parallelen ziehet.

232. §.

Hat man die Horizontallinie für den Halbmeſſer $Or = or = D \cos\sec\psi$ gehörig eingetheilt, und den Hülfspunct l den Vorſchriften des 229 §. gemäß geſucht; ſo dient jene wiederum eben ſo, wie im 213 §.

zum Winkelmeſſer für alle auf der Tafel abgebildete in einerley Horizontalfläche liegende Winkel. Auch finden hiernächſt die Auflöſungen der Aufgaben des 214. und 215 §. bey Zeichnungen auf der gegen den Horizont ſchiefliegenden Tafel ihre Anwendung mit der einzigen Veränderung, daß hier D coſec ψ das iſt, was dort D war. Dieſerwegen iſt es nicht nöthig, das daſelbſt ſchon geſagte hier zu wiederhohlen, weil die Sache niemanden weiter Schwierigkeiten machen kann, der bishieher den ganzen Zuſammenhang aller vorgetragenen Lehren gehörig überdacht hat.

233. §.

Wenn $\alpha = 0$ iſt, ſo hat man $\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{tang}\beta \operatorname{cosec}\psi}{(1 + \operatorname{tang}\beta \cot\psi)\cot\varepsilon} = \frac{\operatorname{cosec}\psi \operatorname{tang}\varepsilon}{\cot\beta + \cot\psi}$: und wenn L die Länge einer Linie iſt, der das Bild λ zugehört, ſo hat man $\lambda = L \cos\varepsilon \sec\zeta = L\sqrt{\left(\cos\varepsilon^2 + \frac{\operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^2}{(\cot\beta + \cot\psi)^2}\right)}$, oder $\lambda = L\sqrt{\left(\cos\varepsilon^2 + \frac{tg\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^2}{(1 + tg\beta \cot\psi)^2}\right)}$. Iſt nun überdem $\beta = 90° - \psi$, ſo hat man $\operatorname{tang}\beta = \cot\psi$; demnach wird $\operatorname{tang}\zeta = \frac{\cot\psi \operatorname{cosec}\psi}{(1 + \cot\psi^2)\cot\varepsilon}$ $= \frac{\cot\psi}{\operatorname{cosec}\psi \cot\varepsilon} = \cos\psi \operatorname{tang}\varepsilon$, und $\lambda = L . \cos\varepsilon \sec\zeta = L \cos\varepsilon \sqrt{(1 + \cos\psi^2 \operatorname{tang}\varepsilon^2)} = L\sqrt{(\cos\varepsilon^2 + \cos\psi^2 \sin\varepsilon^2)} = L\sqrt{(1 - \sin\psi^2 \sin\varepsilon^2)}$. Bey dieſen

ſen angenommenen Vorausſetzungen ſind alle Geſichtsſtrahlen, die von den Puncten der abzubildenden Figur ins Auge kommen, auf der Tafel ſenkrecht, und eben dieſe Projections-Art hat anfangs den Nahmen der orthographiſchen Projection veranlaſſet, der aber nunmehro allgemeiner in jedem Fall gebraucht wird, wenn alle Geſichtslinien parallel ſind, geſetzt, daß ſie auch die Tafel unter einem ſchiefen Winkel ſchneiden. Wer nach der allgemeinen im 15 §. überhaupt angezeigten Methode die Scenographie eines Körpers zeichnen will, der hat zuförderſt eine eigentliche orthographiſche Projection des Körpers auf die Grundfläche nöthig, damit hiernächſt aus allen merkwürdigen Puncten derſelben die perſpectiviſchen Höhen aufgerichtet werden können, die den Höhen des Körpers über den im Horizont abgebildeten Puncten zugehören.

Noch iſt der Fall merkwürdig, wenn bey der Vorausſetzung $\alpha = 0$, zugleich $\beta = 90° - \frac{1}{2}\psi$ iſt. Alsdann hat man $\cot\beta = \tang \frac{1}{2}\psi = \operatorname{coſec}\psi - \cot\psi$, (457 §. Geom.) mithin $\frac{\operatorname{coſec}\psi}{\cot\beta + \cot\psi} = 1$, das giebt $\tang\zeta = \tang\varepsilon$, und $\lambda = L\sqrt{(\operatorname{coſ}\varepsilon^2 + \operatorname{ſin}\varepsilon^2)} = L$. Alſo verwandelt ſich die Projection in einen geometriſchen Grundriß, wie im 219 §. und der dort betrachtete Fall iſt unter dieſen allgemeinern mit enthalten, weil daſelbſt $\psi = 90°$ und $\beta = 45°$ war.

234. §.

Wenn $\psi = 0$ iſt, das heiſt, wenn die Tafel mit dem Horizont parallel liegt, ſo hat man allemahl $\tang\zeta = \tang\varepsilon$, und wenn L und λ die Bedeu-

tung des vor. §. behalten, ſo wird

$$\lambda = \frac{L \sin\varepsilon \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\varepsilon) \sec\varepsilon}{1 + \tang\varepsilon \tang\alpha}$$

$$= \frac{L \cos\varepsilon (\tang\alpha + \cot\varepsilon) \sec\varepsilon}{\tang\alpha + \cot\varepsilon} = L.$$

Demnach behalten wiederum alle Linien ihre Gröſſe und Lage auf der Tafel, und die Projection jeder horizontal liegenden Figur iſt mit dem geometriſchen Grundriß derſelben einerley. Von der Richtigkeit dieſer Reſultate der Formuln kann man ſich auch durch leichte aus der Natur paralleler Linien hergeleitete Schlüſſe überzeugen. Dieſe Projectionsart iſt alſo in Abſicht der horizontal liegenden Figuren einerley mit der im 219 §. und noch allgemeiner am Ende des 233 §. betrachteten, wo $\beta = 90° - \frac{1}{2}\psi$ angenommen ward, da dann im 219. §. zugleich $\psi = 90°$ war. Bey der letztern Projectionsart ſind zugleich die Bilder verticaler Linien auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht, und den abgebildeten Höhen ſelbſt gleich: ob, und unter welchen Umſtänden, auf der ſchiefliegenden Tafel die perſpectiviſchen Höhen den wahren Höhen gleich werden können? das muß nunmehro noch unterſucht werden. Ueberhaupt ſiehet man wohl, daß die im VIII. Abſchnitt vorgetragene Theorie von den Bildern verticalſtehender Linien auf der ſchiefliegenden Tafel auch alsdenn ihre Anwendung finden müſſe, wenn die Projection orthographiſch ſeyn ſoll, diejenigen Veränderungen ausgenommen, welche aus der Vorausſetzung der unendlich groſſen Entfernung des Auges flieſſen.

235 §.

Wenn man alſo zuerſt bis auf den 103 §. zu- 64 F.
rück gehet, ſo wird man ſich daraus zurück erinnern, daß die Bilder aller auf dem Horizont AB lothrechter grader Linien ihren Vereinigungspunct q in der graden Linie Rr haben, die durch beyde Augenpuncte R und r läuft, und daß Rq = D$\sec\psi$ ſey. Wenn das Auge unendlich weit wegrückt, mithin auch D ins unendliche wächſt, vorausgeſetzt, daß α und β einerley bleiben, ſo rückt q ebenfalls ins unendliche fort, ſo wie die ganze Linie rq von C ins unendliche wegrückt, daraus folgt, daß die orthographiſchen Bilder verticaler Linien auf der ſchiefliegenden Tafel keinen Vereinigungspunct haben, mithin auf der Tafel parallel ſind.

Man betrachte von nun an, ſo wie bey den vorigen Unterſuchungen über die orthographiſchen Projectionen geſchehen iſt, O als die auf dem Horizont Orn reducirte Stelle des Auges, ſo kann man den Winkel $rnq = \xi$ aus der Gleichung $\tang\xi = \sec\psi \cot\alpha$ finden. (228 §.) Derſelbe hängt bey einerley Lage der Tafel nur von α ab, und weil α für die orthographiſche Projection einerley bleibt, wo auch L im Horizont AB angenommen wird, ſo ſchneiden die Bilder aller verticalen Linien die Horizontallinie rn unter einerley Winkel, mithin ſind ſie parallel. Uebrigens war $rn = D\,\mathrm{coſec}\psi\,\tang\alpha$, und $D = \Delta(\cot\alpha \sin\psi + \mathrm{coſec}\alpha\,\tang\beta\cos\psi) - \delta\sin\psi$; demnach wird $rn = \Delta(1 + \sec\alpha\,\tang\beta\cot\psi) - \delta\,\tang\alpha$.

Verlängert man rl und Ωl bis an die Grundlinie in c und d, ſo iſt qn das Bild einer verticalen Linie, die von der erſten Verticalfläche um den Ab-

 ſtand,

ſtand, *tc*, von der Grundlinie der Tafel aber und den Abſtand CD entfernt iſt, *l* iſt das Bild des Puncts, worin dieſe Linie den Horizont durchbort: und wenn aus *c* über der Grundlinie eine ſenkrechte Linie aufgerichtet wird, die *ql* in S ſchneidet, ſo iſt S das Bild des Puncts, worin die verticale Linie, deren Bild in *q*S liegt, die Tafel durchbort. (105 §.) Alsdenn iſt $qS = vq \cdot \text{coſec}\,\xi$, und $vq = (D\,\text{coſe}\,\psi + \delta)$ $\text{ſec}\,\psi - a\,\text{coſec}\,\psi$ (106 §.) $= \Delta(\cot\alpha\,\text{ſec}\,\psi + \text{coſec}\,\alpha$ $\tan\beta\,\text{coſec}\,\psi) - a\,\text{coſec}\,\psi$ (228 §.) $= \Delta\cot\alpha\,\text{ſec}\,\psi$, mithin $qS = \Delta\cot\alpha\,\text{ſec}\,\psi\,\text{coſec}\,\xi$.

236. §.

Die Entfernungen Δ und δ einer verticalen Linie von der erſten Verticalfläche, und von der Grundlinie der Tafel ſind gegeben, man ſoll die Lage ihres Bildes auf der ſchiefliegenden Tafel durch Zeichnung finden.

Aufl. Man ziehe die Linie *qn*, worin der Hülfspunct *l* liegt, nach Vorſchrift des 229 §., ſo iſt das geſuchte Bild mit *qn* parallel. Demnach darf nur noch ein Punct geſucht werden, der in dieſem Bilde liegt, und dazu kann entweder der Punct λ dienen, als das Bild desjenigen Puncts, worin die verticale Linie die horizontale Grundfläche durchbort; oder auch der Punct *s*, worin ſelbige die Tafel trift. Jener Punct λ wird aus Δ und δ nach Vorſchrift des 229 §. gefunden: um S zu finden nehme man $tC = \Delta$, mache $tC\delta = 90° - \psi$, $C\delta = \delta$, und ziehe durch δ eine Linie auf $C\delta$ durch C aber eine andre auf *t*C ſenkrecht, ſo iſt beyder Durchſchnittspunct *s* der geſuchte. Wird nun durch *s* oder λ mit

qn eine Parallele λr gezogen, ſo liegt das geſuchte Bild in derſelben.

237 §.

Die wahre Höhe LW einer verticalen Li- 64 F.
nie iſt gegeben: man ſoll die zugehörige perſpectiviſche Höhe lw finden.

Aufl. Im 111. §. war $lw = \frac{\Lambda . D\sec\psi}{(D\sec\psi + SW) D\sec\psi + SL} . LW$, oder $LW = \frac{\Lambda . D\sec\psi . LW}{(D\sec\psi + \delta\tan\psi)(D\sec\psi + \delta\tan\psi - LW)}$: mithin auch

$$LW = \frac{\Lambda . D\operatorname{cosec}\psi . LW\cot\psi}{(D\operatorname{cosec}\psi + \delta)(D\operatorname{cosec}\psi + \delta - LW\cot\psi)}.$$

Uberdem iſt $\Lambda = qS = \Delta\cot\alpha\sec\psi\operatorname{cosec}\xi$, (235 §.) ferner $D\operatorname{cosec}\psi + \delta = \Delta(\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha\, tg\beta\cot\psi)$: (228 §.) und wenn man annimmt, daß D unendlich groß werde, ſo wird $\frac{D\operatorname{cosec}\psi}{D\operatorname{cosec}\psi + \delta - LW\cot\psi} = 1$. Demnach erhält man in dieſer Vorausſetzung

$$lw = \frac{\cot\alpha\sec\psi\operatorname{cosec}\xi}{\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha\tan\beta\cot\psi} . LW . \cot\psi$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}\psi\operatorname{cosec}\xi}{1 + \sec\alpha\tan\beta\cot\psi} . LW.$$

Eben die Formul würde man auch ſo finden. Wenn O unendlich weit wegrückt, ſo wird Ww mit Ll parallel, mithin erhält man $SL : LW = Sl : lw$, und es iſt $SL = \delta\tan\psi$, $Sl =$

$$Sl = \frac{SL}{D\sec\psi + SL} \cdot \Lambda \; 108 = \frac{\delta \tan\psi}{D\sec\psi + \delta \tan\psi} \cdot \Lambda = \frac{SL \cot\psi}{D \operatorname{cosec}\psi + \delta} \cdot \Lambda;$$

alſo hat man

$$1 : LW = \frac{\cot\psi \cot\alpha \sec\psi \operatorname{cosec}\xi}{\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha \tan\beta \cot\psi} : lw,$$

mithin

$$lw = \frac{\operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\xi}{1 + \sec\alpha \tan\beta \cot\psi} \cdot LW,$$

wie vorhin.

Dieſe Länge des Bildes iſt wiederum der Länge der abgebildeten Linie proportional, und ſie hängt weder von Δ noch δ ab. Mithin fällt auch hier alle ſcheinbare Verkürzung weg, und gleiche Theile dieſer Linie erſcheinen gleich groß. Es ſind demnach die perſpectiviſchen Fuſſe und andre Abtheilungen des Bildes gleich groß, wie die Abtheilungen der abgebildeten Linie, obgleich jene mit dieſen nicht einerley Gröſſe haben.

Will man dieſe perſpectiviſche Höhe durch Zeich-
95 F, nung finden, ſo ziehe man durch q mit der Horizontallinie eine Parallele, nehme $qQ = qO = D\sec\psi$, ziehe Ql bis an die Horizontallinie in e, nehme ef der gegebenen wahren Höhe LW gleich, und ziehe durch f mit le eine Parallele, welche ln in w ſchneidet, ſo iſt lw die geſuchte Höhe. Soll nun eine eben ſo groſſe Höhe über einem andern Punct λ errichtet werden, der nach dem 229. §. gefunden iſt: ſo ziehet man dem 236 §. gemäß durch λ mit ln eine Parallele, und macht $\lambda\mu = lw$.

Beweis. Eine Horizontallinie durch S ſchneide Ql in L und fw in W, ſo hat man $qQ : ql = SL$

: Sl

$: Sl = LW : lw$, und es iſt $qQ = D\sec\psi$, $ql = \frac{D\sec\psi}{D\sec\psi + SL} \cdot \Lambda$ (109. 111. §.), mithin

$$1 : \frac{\Lambda}{D\sec\psi + SL} = LW : lw,$$ und es wird

$$lw = \frac{\Lambda . LW}{D\sec\psi + SL} = \frac{\triangle \cot\alpha \sec\psi \operatorname{cosec}\xi}{D\sec\psi + \delta\tang\psi}.$$

$$LW = \frac{\triangle \cot\alpha \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\xi}{D\operatorname{cosec}\psi + \delta} . LW$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\xi}{1 + \sec\alpha \tang\beta \cot\psi} . LW,$$ wie erfordert wird.

Die Linie ln kann als ein allgemeiner Maaßſtab für alle perſpectiviſche Höhen dienen. Man theile nemlich en in geometriſche Fuſſe ein, und ziehe durch alle Theilungspuncte mit el parallele Linien, ſo wird durch ſelbige ln in perſpectiviſche Fuſſe getheilt, und nach dieſem Maaßſtabe kann jede andre Höhe gemeſſen und aufgetragen werden.

238. §.

Wenn $\alpha = 0$ iſt, ſo hat man $\operatorname{cosec}\xi = \surd(1 + \cos\psi^2 \tang\alpha^2)$ (229 §.) $= 1$. Demnach ſind alsdenn alle perſpectiviſche Höhen auf der Grundlinie ſenkrecht, und man hat überdem $lw = \frac{\operatorname{cosec}\psi}{1 + \tang\beta\cot\psi} . LW = \frac{\operatorname{cosec}\psi \cot\beta}{\cot\beta + \cot\psi} . LW.$ Iſt überdem $\beta = 90° - \psi$, ſo hat man $\tang\beta = \cot\psi$, und es wird

$lw =$

$hw = \frac{\text{coſec}\,\psi}{1 + \cot\psi^2} = LW \sin\psi$. Dies iſt der Fall, wenn alle Geſichtslinien auf der Tafel ſenkrecht ſind. (233 §.) Wofern aber, bey eben der Vorausſetzung $\alpha = 0$, der Winkel $\beta = 90° - \frac{1}{2}\psi$ angenommen wird, ſo hat man $\cot\beta = \tan \frac{1}{2}\psi = \text{coſec}\,\psi - \cot\psi$, (457 §. Geom.) alſo

$\frac{\text{coſec}\,\psi}{\cot\beta + \cot\psi} = 1$, und es wird

$hw = \frac{\text{coſec}\,\psi \cot\beta}{\cot\beta + \cot\psi} \cdot LW = LW \cot\beta$, oder

$hw = LW\, tg\, \frac{1}{2}\psi$. Wenn nun $\psi = 90°$ iſt, ſo hat man $hw = LW$ wie im 219 §.

239. §.

96 F. Iſt $\psi = 0$, mithin die Tafel mit dem Horizont parallel, ſo hat man $\text{coſec}\,\xi = \text{ſec}\,\alpha$, und es wird $hw = \frac{\text{coſec}\,\xi}{\text{ſec}\,\alpha \tan\beta} \cdot LW = LW \cot\beta$.

Man nimmt in dieſem Fall eine grade Linie *rq* für das Bild derjenigen an, worin die horizontale Grundfläche von der erſten Verticalfläche geſchnitten wird, zeichnet an derſelben einen Winkel $rql = \alpha$, zieht durch *q* eine grade Linie *qm* auf *ql* ſenkrecht, nimmt auf der erſtern ein Stück *qm* von ſo vielen geometriſchen Fuſſen, als man nöthig findet, macht $qmn = 90° - \beta$, und zieht durch die Theilungspuncte in *qm* mit *mn* Parallelen, ſo theilen dieſe *qn* in perſpectiviſche Fuſſe ein, und *qn* wird der Maaßſtab für alle perſpectiviſche Höhen. Eine Horizontallinie hat man hier nicht, weil *r* unendlich weit hinauf

rückt, die Puncte R und q aber fallen zuſammen. Man bedarf auch bey der Zeichnung des Grundriſſes keiner eingetheilten Horizontallinie, weil die Projection des horizontalen Grundriſſes dem geometriſchen Grundriß gleich und ähnlich bleibt. (234 §.) Eben ſo wenig hat man eine eigentliche Grundlinie, weil die Tafel und die horizontale Grundfläche einander gar nicht ſchneiden.

240 §.

Hat man nur eine einzige Sache abzubilden, ſo iſt in dem zuletzt betrachteten Fall der mit der Grundfläche parallel liegenden Tafel die Stelle gleichgültig, wo man es hinzeichnen will. Wofern man aber mehrere Sachen in gegebener Lage gegen einander, und gegebener Entfernung von einander abzubilden hat, ſo kann man im geometriſchen Grundriß ein paar grade Linien ziehen, die einander ſenkrecht ſchneiden, und eine davon als diejenige betrachten, worin die horizontale Grundfläche von der erſten Verticalfläche geſchnitten wird: man kann dieſe zum Unterſcheid die Perpendicullinie, und die andre, worauf ſie ſenkrecht iſt, die Grundlinie nennen. Hiernächſt läſt ſich die Lage aller Puncte in der horizontalen Grundfläche durch ihre Entfernungen von dieſen beyden auf einander ſenkrechten Linien beſtimmen. Die Bilder dieſer beyden Linien ſchneiden einander auf der Tafel ebenfalls ſenkrecht, und die Bilder aller Puncte der Grundfläche ſind auf der Tafel von den erwehnten Bildern der Grundlinie und Perpendicullinie eben ſo weit entfernt, als es die Puncte der Grundfläche von den dadurch abgebildeten Linien ſelbſt ſind. Die perſpectiviſchen Höhen müſ-

müſſen alsdenn das Bild der Perpendicullinie unter einem Winkel = α ſchneiden. In der 96. Figur ſtellet *rs* die Perpendicullinie *tu* die Grundlinie vor, $rql = \alpha$ iſt der Abweichungswinkel des Auges, $qnm = \beta$ die Höhe des Auges, AG aber das Bild eines graden Parallelepipedi, wovon die Grundfläche ABCD ein Quadrat iſt, jede Seitenlinie deſſelben 2 Fuß, und die Höhe des Körpers 4 Fuß groß.

241. §.

97 F. Auf der verticalſtehenden Tafel iſt die Grundlinie CV, die Horizontallinie KY und in derſelben der reducirte Augenpunct R, ferner der reducirte Abſtand des Auges RO und der Hülfspunct G gegeben; überdem iſt die Lage einer andern Ebene gegeben, welche die horizontale Grundfläche unter dem Winkel ϑ in einer graden Linie ſchneidet, die gegen die Grundlinie der Tafel unter dem Winkel η geneigt iſt: man ſoll die Grundlinie dieſer geneigten Ebene, ihre reducirte Gränzlinie, ihren Angenpunct und ihren Neigungswinkel gegen die Tafel durch Zeichnung finden.

Aufl. Man zeichne zuerſt das Bild TC*p* des Winkels η, der hier 50° groß angenommen iſt, ſo iſt C*p* die Durchſchnittslinie der geneigten Ebene mit der Grundfläche. Ueber C*p* ſtehe eine lothrechte Ebene GBKC, ſo ſchneidet ſelbige die Tafel in der graden Linie CK auf der Grundlinie TC ſenkrecht. Man ſtelle ſich die Ebene OR*pn* horizontal vor, ſo iſt C*p* das Bild einer graden Linie in der Ebene GBK*c*, die mit O*p* parallel läuft, mithin liegt *p* in der

der reducirten Gränzlinie der Ebene GBKC, und man kann dieſe Gränzlinie EF durch *p* auf TC ſenkrecht ziehen. (228 §.) Man zähle von *p* nach *n* 90 Grade, ziehe G*n*, und ſtelle ſich über G*n* ebenfalls eine lothrechte Ebene ALBC vor, welche die vorige in GB ſchneidet; ihre Durchſchnittslinie mit der Tafel ſey AL, ſo iſt AL auf CT ſenkrecht, und die reducirte Gränzlinie PQ der Ebene ALBG läuft durch *n* mit AL parallel. Es iſt nemlich wiederum A*n* das Bild einer mit O*n* parallelen Linie, die in der Ebene ALBG liegt: zur Gränzlinie EF gehört alsdenn der Halbmeſſer O*p*, zur Gränzlinie PQ aber der Halbmeſſer O*n*. Für den letztern Halbmeſſer O*n* alſo ſey PQ gehörig in Grade getheilt, und CGMN ſey eine geneigte Ebene durch C*p*, welche GALB in GM ſchneidet, ſo iſt *n*GM ihr Neigungswinkel ϑ, deſſen Gröſſe die eingetheilte Scale PQ anzeigt, wenn man GM bis an PQ in *m* verlängert. Weil nun G*p* und G*m* in der Ebene CGMN liegen, und O*p*, O*m*, mit den dadurch abgebildeten Linien parallel ſind; (wenn man ſich, wie vorausgeſetzt wird, den Punct O im Horizont der Linie R*n* vorſtellt,) ſo iſt die Ebene O*pm* mit der geneigten Ebene CGMN parallel, mithin *pm* die reducirte Gränzlinie der Ebene CGMN (228 §,) womit ihre Grundlinie CD durch C parallel läuft. Man zieht alſo *rt* durch R auf *pm* oder CD ſenkrecht, ſo hat man den Augenpunct *r*, aus welchem man die Gränzlinie *pm* gehörig eintheilen kann. Es wird nemlich RΩ = RO auf *rt* ſenkrecht geſetzt, ſo iſt Ω*r* der zugehörige Halbmeſſer und Ω*r*R der Neigungswinkel gegen die Tafel.

Wenn

Wenn $\eta = 90°$ iſt, ſo läuft C*p* in den Augenpunct R und AGBL iſt mit der Tafel parallel: alsdenn rückt die Gränzlinie PQ unendlich weit hinaus, und man bedarf derſelben auch nicht, um die Gränzlinie und Grundlinie der geneigten Ebene CGMN zu finden, es wird nemlich AGD $= \vartheta$, und die Lage der Grundlinie CD iſt von ſelbſt bekannt: mit ihr aber läuft die Gränzlinie durch R parallel. (Man vergleiche den 120 §.)

Iſt $\eta = 0$, mithin CG mit TC parallel, ſo fällt *n* in R, und PQ in RT, die Gränzlinie läuft durch *m* mit CT parallel, ſo wie auch DC, letztere aber iſt von TC um den Abſtand $\delta \tang \vartheta$ entfernt, wenn GC und TC um den Abſtand δ von einander entfernt ſind. (Man vergleiche den 119 §.)

242 §.

Die Aufgabe des vor. §. in dem Fall aufzulöſen, wenn die Tafel gegen den Haupt-Horizont unter dem Winkel γ geneigt iſt.

Aufl. Es ſey GMNI die unter dem Winkel ϑ gegen den Haupt-Horizont geneigte Ebene, und der durch ACG abgebildete Winkel $= \eta$. Weiter ſey G der Hülfspunct, und *k* der reducirte Vereinigungspunct für die Bilder der auf dem Haupt-Horizont ſenkrechten Linien, wie GB, IK, und BGIK ſey auf dem Haupt-Horizont ſenkrecht. Man ſtelle ſich die Ebene *opn* mit dem Haupt-Horizont durch AC parallel vor, ſo iſt *op* mit der durch CG abgebildeten Linie parallel, ſo wie *ok* mit der durch BG abgebildeten Linie. Demnach iſt die Ebene *pok* mit der durch BGIK abgebildeten parallel, und *pk* die

reducirte Gränzlinie der Ebene BGIK. Weiter ſey $pCn = 90°$ und die Ebene alBG gleichfalls auf dem Haupt-Horizont ſenkrecht: ſo iſt on mit der durch aG abgebildeten Linie parallel, ſo wie ok mit der durch BG abgebildeten; mithin iſt die Ebene nok parallel mit der durch alBG abgebildeten Ebene, und nk iſt die reducirte Gränzlinie der Ebene alBG. Man kann alſo nun $R\varrho$ auf kn ſenkrecht ſetzen, und $R\Omega = RO$ damit parallel ziehen, ſo iſt $\Omega\varrho$ der Halbmeſſer für die Scale der Winkel auf kn. Wie nun nGM der Ebene MGIN Neigungswinkel ϑ gegen den Haupthorizont iſt; ſo läſt ſich auch der Punct m der Gränzlinie finden, worin GM läuft, wenn man von n nach m ſo viele Grade zählet, als der Winkel ϑ faſſet. Alsdenn iſt om mit der durch Gm abgebildeten Linie parallel, ſo wie op mit der durch Gp abgebildeten, die Ebene pon iſt parallel mit der Ebene GMNI und pm die Gränzlinie der letztern, ſo wie CD mit pm parallel gezogen ihre Grundlinie iſt. Wird nun noch Rr auf pm ſenkrecht und $R\omega$ damit parallel gezogen, ſo iſt ωr der Halbmeſſer für die Scale pm, und $Rr\omega$ der geſuchte Neigungswinkel.

Wenn $\eta = 90°$ iſt, ſo läuft Cp in den Augenpunct r, und die Gränzlinie pm, welche der Neigungsebene aGBl zugehört, läuft durch k mit pn parallel. (Man vergleiche den 120 §.) Wenn aber $\eta = 0$ iſt, ſo fällt n in e, die Gränzlinie kn der Neigungsebene fällt mit $e\Theta$ zuſammen, und die Gränzlinie pm läuft durch m mit pn parallel. (M. ſ. den 119 §.)

243. §.

Eine weitere Vergleichung dieſer allgemeinen Theorie von den orthographiſchen Projectionen mit

der allgemeinern Theorie im VII. und VIII. Abſchnitt wird jeder Liebhaber dieſer Wiſſenſchaft leicht für ſich anſtellen; und wer in der Geometrie kein Fremdling iſt, wird in jedem vorkommenden Fall zu beurtheilen wiſſen, wie ſich unter den mancherley Wegen, die man nehmen kann, eine perſpectiviſche Zeichnung, ſie mag ſcenographiſch oder orthographiſch ſeyn ſollen, zu Stande zu bringen, eine geſchickte Wahl anſtellen laſſe. Dieſerwegen kann die bisherige Anleitung zu orthographiſchen Zeichnungen völlig genügen, obgleich die Abſicht dieſes Lehrbuchs eine zu groſſe Umſtändlichkeit zu vermeiden, es nicht verſtattet, die Anwendung der bisherigen Regeln in vielen beſondern Beyſpielen zu zeigen. Eine kurze Anmerkung, welche die Zeichnung des Schattens betrift, wenn die Projection orthographiſch iſt, wird indeſſen nicht überflüßig ſeyn. Gewöhnlich wird dabey angenommen, daß der abgebildete Gegenſtand von der Sonne erleuchtet ſey, ſo wie man überhaupt um deswillen den Schatten in der Zeichnung gern mit ausdruckt, um aufrecht ſtehende Sachen von liegenden, und jede Fläche von einer andern deſto beſſer zu unterſcheiden. Der innere Raum eines Zimmers wird nicht leicht orthographiſch gezeichnet, er würde auch bey dieſer Zeichnungsart kein natürliches Anſehen haben; deswegen hat man bey der orthographiſchen Projection nicht leicht eine Veranlaſſung, anzunehmen, daß die Erleuchtung vom Kerzenlicht, oder durch eine Oefnung ſcheinenden Tageslicht herrühre. Käme indeſſen der beſondre Fall vor, daß man zu dem einen, oder dem andern ſeine Gründe hätte; ſo würde man die Vorſchriften des XI. Abſchnitts leicht der Natur der orthographiſchen Pro-

jec-

jection, und der bisherigen Anleitung, orthographiſche Bilder zu zeichnen, gemäß verändern und gehörig anzuwenden wiſſen.

244. §.

Den Schatten einer lothrecht ſtehenden Linie $\alpha\beta$ zu zeichnen, wenn die Projection auf der vertical ſtehenden Tafel orthographiſch iſt, und der Azimuthal-Winkel der Sonne mit ihrer Höhe über dem Horizont gegeben iſt. 97 F.

Aufl. Das Bild der Sonne läſt ſich auf der Tafel, wenn die Projection orthographiſch iſt, nicht zeichnen, weil es unendlich hoch über der Horizontallinie erhaben iſt. Man kann aber durch ein ähnliches Verfahren, wie im 163 §. ein reducirtes Bild der Sonne auf der Tafel zeichnen, welches hiernächſt mit dem Hülfspunct G zuſammen dazu dient die Lage und Länge des Schattens zu finden. Man mache nemlich ROp dem Azimuthal-Winkel der Sonne gleich, und ziehe pE durch p auf der Horizontallinie ſenkrecht: man nehme ferner $p\pi = p$O, und mache den Winkel $p\pi$S der Höhe der Sonne gleich, ſo wird S das reducirte Bild der Sonne. Vom Hülfspunct G ziehe man grade Linien in p und S, hiernächſt aber durch α mit Gp durch β mit GP parallele Linien; ſo iſt $\alpha\gamma$ der Schatten der lothrechten Linie $\alpha\beta$.

Beweis. Man ſtelle ſich über G eine lothrechte Linie GB vor, die ihren Schatten in GH wirft, ſo ſteht die Ebene des Dreyecks BGH lothrecht, und weicht von der erſten Verticalfläche um den Azimuthal-Winkel der Sonne ab, der Winkel GHB aber

iſt die Höhe der Sonne. Wenn demnach HG in p läuft, ſo muß ROp der Azimuthalwinkel der Sonne ſeyn. Weiter iſt pS die Gränzlinie für die Ebene GHB, (241 §.) die man für den Halbmeſſer O$p = p\pi$ eintheilen muß: wenn alſo HB mit HS parallel läuft, ſo muß $p\pi$S die Höhe der Sonne ſeyn. Nun mag aber eine andre Verticallinie, wie $\alpha\beta$ ſtehen wo ſie wolle, ſo muß ihr Schatten $\alpha\gamma$ mit GH, und der Lichtſtrahl $\beta\gamma$ mit BH parallel ſeyn, und hier ſind die Bilder paralleler Linien ebenfalls geometriſch parallel.

245 §.

93 F. Dieſe Regel vorausgeſetzt ſiehet man leicht, wie ſich in der 93 Fig. der Schatten des Gefäſſes AbcD zeichnen laſſe. Das Azimuth der Sonne iſt von 50 Grad, und ihre Höhe von 46 Graden angenommen, Aα, Bβ, Dδ ſind mit Gp, $a\alpha$, $b\beta$, Dδ, mit GS parallel, alsdenn wird $\alpha\delta$, mit ad parallel, und eben ſo kann man $\beta\gamma$ mit bc parallel ziehen.

Weil es gemeiniglich willkührlich iſt, wie groß man die Höhe der Sonne annehmen will, ſo kann man auch, nachdem Gp gezogen worden, durch p eine grade Linie ps in willkührlicher Lage ziehen, und die Lage dieſer Linie für die Lage der Sonnenſtrahlen annehmen: da dann $a\alpha$, $d\delta$, $b\beta$, u. ſ. f. mit ps parallel ſeyn müſſen. Es läſt ſich alsdenn auch wenn es nöthig iſt, allemahl finden, wie groß die Höhe der Sonne angenommen ſey. Man ziehe nemlich GS mit ps parallel, und pS auf Rp ſenkrecht, nehme $p\pi$ $=$Op und ziehe πS, ſo iſt $p\pi$S die angenommene Höhe der Sonne.

246. §.

Wenn die Tafel mit dem Horizont parallel liegt, wie in der 96 Fig. angenommen iſt, ſo erſcheint im Horizont alles, mithin auch der Schatten, in ſeiner natürlichen Geſtalt und Gröſſe. Wenn alſo die Ebene ABFE mit der erſten Verticalfläche parallel iſt, ſo mache man den Winkel D$A\alpha$ dem Complement des Azimuths der Sonne gleich, ſetze Aa auf $A\alpha$ ſenkrecht, und mache Aa im geometriſchen Maaß ſo groß, als AE im perſpectiviſchen Maaß iſt. Hiernächſt mache man den Winkel $Aa\alpha$ der Ergänzung der Höhe der Sonne zu 90° gleich, ſo iſt $A\alpha$ der Schatten von AE. Eben ſo kann der Schatten von DH und jeder andern verticalſtehenden Seitenlinien des Körpers gefunden werden. Um übrigens den Schatten des ganzen Priſma zu zeichnen, kann man auch, nachdem $A\alpha$ gefunden iſt, ſo zu Werke gehen. Man ziehe $\alpha\delta$ mit EH, $\delta\gamma$ mit HG, $\gamma\varepsilon$ mit $A\alpha$ gleich und parallel, ſo iſt, wie man leicht ſiehet, der Umfang vom Schatten des Priſmen gezeichnet. 96 F.

Der XV. Abſchnitt.

Allgemeine Theorie der Projectionen des Kreiſes zugleich als Kegelſchnitte betrachtet.

247 §.

99 F. Es ſtelle OABED einen Kegel vor, OC ſeine Axe, ABED ſeine Grundfläche. Jede Seitenlinie dieſes Kegels, wie OA oder OE läßt ſich nicht allein über A und E hinaus, ſondern auch über den entgegen geſetzten Endpunct O hinaus, jenſeits der Spitze des Kegels nach α und β ohne Ende verlängern, und jede dieſer Seitenlinien des Kegels liegt ganz in ſeiner Oberfläche. Demnach ſtelle man ſich nunmehro in der Zeichnung denjenigen Kegel zugleich mit vor, der dem Kegel OABED jenſeits der Spitze O grade entgegen geſetzt iſt, und deſſen Oberfläche jenſeits der Spitze ſich eben ſo, wie die Fläche des erſtern OABED ins unendliche hinaus erſtreckt, und zwar ſo, daß die Flächen beyder Kegel eigentlich als eine einzige zuſammenhängende Kegelfläche anzuſehen ſind. Im 59 §. iſt ſchon bemerkt worden, daß jeder Schnitt durch die Spitze, der zugleich durch einen Punct innerhalb des von der Kegelfläche umgränzten Raums gehet, zwey einander entgegen geſetzte Vertical-Winkel gebe, wie AOE, $\alpha O\beta$, deren Schenkel zu beyden Seiten ſich ins unendliche hin-

hinaus erſtrecken: oder mit andern Worten, zwey grade Linien von unbeſtimmter Länge, die ſich in der Spitze O ſchneiden. Jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt aber bleibt ein Kreis, deſſen Mittelpunct in der Axe des Kegels liegt. Wenn nun die Ebene des Schnitts nicht durch die Spitze des Kegels geht, und mit der Grundfläche auch nicht parallel iſt; ſo hat ſie entweder eine ſolche Lage, daß ſie nur einen von den entgegen geſetzten Kegeln allein ſchneiden kann, wenn ſie gleich nach allen Seiten ohne Ende erweitert würde; oder ſie ſchneidet beyde entgegen geſetzte Kegel zugleich. Im erſten Fall liegt ſie entweder mit einer Seitenlinie des Kegels parallel, oder ſie ſchneidet alle Seitenlinien deſſelben. Alle drey Fälle verdienen eine etwas genauere Erwägung.

248. §.

Es ſey T*e*V die Ebene des Schnitts, TV die 99 F.
Durchſchnittslinie mit der Grundfläche, deren Mittelpunct C iſt, oder die **Fundamentallinie** des Schnitts. (67 §.) Man laſſe CF auf TV ſenkrecht fallen, ſo wird die Ebene OCF die Grundfläche in der Linie AE ſchneiden, die Ebene des Schnitts aber in der graden Linie F*e*, und die letztere Linie F*e* wird zugleich durch den Punct *c* laufen, worin die Axe des Kegels die Ebene des Schnitts durchbort. Es liegen nemlich die drey Puncte F, *c*, *e*, in beyden Ebenen OAE und T*e*V zugleich, mithin in ihrer Durchſchnittslinie: OA und OE ſind Seitenlinien des Kegels in der Ebene OCF, und *e* iſt der Punct, worin der Umfang des Schnitts die Seitenlinie OE ſchneidet. Durch den Punct A ſey in der Ebene der

Grundfläche des Kegels eine grade Linie MN gezogen, die auf CA ſenkrecht iſt, mithin die Grundfläche in A berührt; ſo iſt offenbar, daß die Ebene OMN weder den einen noch den andern Kegel ſchneide, ſondern beyde nur in der graden Linie OA berühre. Der eine Kegel liegt ganz auf der einen, und der andre ganz auf der andern Seite dieſer Ebene. Wird nun die Ebene des Schnitts um TV gedrehet, ſo ändert ſich der Winkel F*e*, und es muß eine ſolche Lage dieſer Ebene geben, wobey der Winkel CF*e* = CAO, folglich F*e* mit AO parallel wird. Man nehme an, F*e* ſey in die Lage Fε gerückt, und Fε mit OA parallel. Weil nun auch MN mit TV parallel iſt, ſo iſt in dem angenommenen Fall nicht allein die Ebene TεV des Schnitts mit der Seitenlinie OA des Kegels, ſondern auch mit der Berührungs-Ebene OMN parallel. Demnach kann die Ebene TεV in der jetzt beſtimmten Lage den entgegen geſetzten Kegel nicht ſchneiden. Weil aber jede Seitenlinie des Kegels OABED die Ebene OMN ſchneidet, nur allein OA ausgenommen; ſo ſchneidet die Ebene T*e*V ebenfalls alle die Seitenlinien, nur OA ausgenommen, und zwar alle auf einer Seite von O. In dem jetzt betrachteten Fall heiſt die Durchſchnittslinie mit der Kegelfläche eine Parabel, und ſie iſt im 92. und 93 §. der Mechanik ſchon für den beſondern Fall betrachtet worden, wenn der Kegel ein grader Kegel iſt. Ihre vornehmſte Eigenſchaft beſtehet darin, daß ihre beyden Aeſte εμ und εν unterhalb der Grundfläche ſich ins unendliche hinaus erſtrecken. Die Durchſchnittsfigur kann ſich nicht ſchlieſſen, weil ſonſt ihr Umfang auch durch die Seitenlinie OA gehen, mithin die Ebene TεV auch die

Sei-

Seitenlinie OA ſchneiden müſte, womit ſie aber parallel angenommen iſt.

249 §.

So lange der Winkel $CFe < CAO$ bleibt, ſo lange wird auch die Ebene TeV alle Seitenlinien des 99 F.
Kegels OABED ſchneiden. Denn vorausgeſetzt, daß $CF\varepsilon = CAO$, mithin die Ebene $T\varepsilon V$ mit OMN und $F\varepsilon$ mit AO parallel ſey, werden Fe und AO einander ſchneiden, weil $F\varepsilon$ von Fe geſchnitten wird. (85 §. Geom.) Demnach ſchneidet die Ebene TeV, worin Fe liegt, die Seitenlinie OA des Kegels. Nun ſey $A\gamma$ mit Fe parallel, ſo liegt O auf einer Seite der Ebene γMN, und alle Puncte im Umfang der Grundfläche des Kegels liegen auf der andern Seite, A allein ausgenommen. Demnach ſchneidet γMN alle Seitenlinien des Kegels die nicht durch A gehen, und dieſe alle muß auch die mit γMN parallele Ebene TeV ſchneiden. Aber TeV ſchneidet auch OA, wie ſchon bewieſen iſt, mithin alle Seitenlinien des Kegels OABED. Weil nun eine grade Linie eine Ebene nur einmahl ſchneiden kann, ſo wird in dem jetzt betrachteten Fall wiederum nur der eine der beyden entgegen geſetzten Kegel von der Ebene TeV geſchnitten. Die Durchſchnittsfigur heiſt eine **Ellipſe**, (60 §.) und ſie unterſcheidet ſich von der **Parabel** darin, daß ſie, wie der Kreis, eine in ſich ſelbſt zurück laufende Linie iſt, die ein Stück der ſchneidenden Ebene von allen Seiten umgiebt. Sie iſt länglicht- oder Ey-rund, und zieht ſich deſto mehr in die Länge, je weniger die Lage der Ebene TeV von der mit OMN parallelen Lage abweicht: dagegen verwandelt ſich die Ellipſe nicht allein alsdenn in

einen Kreis, wenn die Ebene TeV mit der Grundfläche zuſammen fällt, oder damit parallel wird, ſondern es giebt auch noch einige andre Fälle, wo eben das erfolgt, und wovon im 60 §. eine Probe vorgekommen iſt. Deswegen kann man den Kreis als eine Art der Ellipſen betrachten, wie ſolches unten umſtändlicher wird bewieſen werden.

250 §.

Noch iſt der Fall übrig, wenn der Winkel $CFe > CAO$ wird, wie wenn Fe in Fe' fiele. Nun wird Fe' verlängert mit AO irgendwo in a' zuſammen ſtoſſen, mithin wird die Ebene des Schnitts ebenfalls AO ſchneiden. Geſchicht dies jenſeits des Puncts O in a', ſo iſt für ſich klar, daß die Ebene des Schnitts beyde entgegen geſetzte Kegel ſchneide. Wenn e' in O fällt, ſo fällt auch a' in O, und es wird ein Schnitt durch die Spitze, der zwey unbeſtimmte grade Linien giebt, die einander in O ſchneiden. Fällt e' über O hinaus, ſo fällt a' unterhalb O, und nun iſt wieder klar, daß die Ebene des Schnitts beyde entgegen geſetzte Kegel ſchneide. Geht die Ebene des Schnitts durch die Spitze, ſo ſchneidet ſie alle Seitenlinien des Kegels, weil alle durch die Spitze laufen, zwey ausgenommen, die in der Ebene des Schnitts liegen. Geht der Schnitt nicht durch die Spitze, ſo werden ebenfalls alle Seitenlinien, zwey ausgenommen, geſchnitten. Denn es ſey $Te'V$ die Ebene des Schnitts und Ab mit Fe' parallel; ſo iſt die Ebene bMN mit $Te'V$ parallel, und b fällt jenſeits O. Demnach liegt nun die Spitze O des Kegels zwiſchen den beyden parallelen Ebenen bMN und $Te'V$. Eine Ebene durch die Spitze

O mit ihnen parallel gelegt ſchneidet die Grundfläche in einer graden Linie, die zwiſchen MN und TV liegt, und eben dieſe Ebene ſchneidet alle Seitenlinien des Kegels zwey ausgenommen, die in dieſer Ebene liegen. Demnach muß auch die Ebene T*e*'V alle Seitenlinien des Kegels ſchneiden, nur zwey ausgenommen, die in der durch O damit parallelen Ebene liegen. Die Durchſchnittsfigur heiſt nun eine Hyperbel, und dieſe Linie beſtehet eigentlich aus zweyen von einander abgeſonderten Stücken, davon das eine dieſſeits der Spitze O, das andre jenſeits in dem entgegen geſetzten Kegel liegt. Jedes Stück hat wie die Parabel zweene ins unendliche fortlaufende Aeſte, die ſich nicht wieder ſchlieſſen können: mithin hat die Hyperbel in ihrer ganzen Ausdehnung vier ſolche Aeſte, davon zweene dieſſeits, und zweene jenſeits der Spitze des Kegels ins unendliche fortlaufen.

251 §.

Um die Lage der Ebene des Kegelſchnitts in Anſehung der Grundfläche und Axe des Kegels völlig beſtimmt anzugeben, nehme man, wie im 67 §. eine Ebene OBD durch die Axe OC auf der Grundfläche ſenkrecht an, welche die Ebene der Grundfläche in der graden Linie DS ſchneidet, und OS ſey die Höhe des Kegels, ſo iſt DS die Fundamentallinie der Axe, ſo wie TV die Fundamentallinie des Schnitts. Wenn alsdenn DS und TV einander in W ſchneiden, ſo iſt die Lage der Ebene des Schnitts völlig beſtimmt, wenn CW, der Winkel CWF, und der Neigungswinkel der Ebene *e*TV gegen die Grundfläche bekannt ſind. Statt CW und CWF, kann auch CF mit dem Winkel WCF gegeben ſeyn. 102 F.

Be-

Betrachtet man nun den Kegelſchnitt *eman* als die Projection oder perſpectiviſche Abbildung des Kreiſes EMAN, auf der gegen die Ebene des Kreiſes ſchiefliegenden Tafel TVXY, und vergleicht die 99ſte mit der 102 Figur, ſo iſt die Höhe des Kegels OS $= a$ zugleich die Höhe des Auges über der Ebene des abzubildenden Kreiſes. Wenn ferner OR auf die Ebene des Schnitts ſenkrecht fällt, und die Ebene ROS die Grundfläche in ST, die Ebene des Schnitts in TR ſchneidet, ſo iſt dieſe Ebene zugleich die Neigungsebene des Schnitts oder der Tafel gegen die Grundfläche, und R der Hauptaugenpunct. Der Neigungswinkel ſey $= \psi$, und ST nach Z verlängert, ſo iſt RTZ $= \psi$. Wird überdem noch O*r* mit ST parallel gezogen, ſo iſt *r* der Augenpunct für die Ebene des abzubildenden Kreiſes ABED. Noch ſey O*s* mit F*r*, SG und S*g* mit TF parallel gezogen, ſo hat man OR $=$ D, O*r* $=$ TS, F*g* $=$ D coſec ψ, T*r* $=$ O*s* $= a$ coſec ψ, S*s* $=$ G*g* $= a$ cot ψ. Weiter iſt TF $=$ SG $= sg = f$ der Abſtand des Mittelpuncts C, von der Ebene des Auges, und FC $= \delta$ ſein Abſtand von der Grundlinie des Schnitts. Es ſey, wie im 68 §., CW $= e$, OCS $= \beta$, SCG $=$ TSW $= \alpha$, CSG $=$ CWF $= \eta = 90° - \alpha$, OC $= c$, TF*r* $= \zeta$; ſo erhält man $a = c \sin\beta$, $f = c.\cos\beta \cos\eta$, SW $= c.\cos\beta - e$, ST $= (c.\cos\beta - e)\sin\eta$; mithin T*s* $=$ O*r* $= a\cot\psi + (c.\cos\beta - e)\sin\eta$, und OR $=$ D $= a\cos\psi + (c\cos\beta - e)\sin\eta\sin\psi$, oder D $= c\sin\beta \cos\psi + (c.\cos\beta - e)\sin\eta\sin\psi$. Ueberdem auch

$$\tang\zeta = \frac{Tr}{TF} = \frac{a\,\mathrm{coſec}\,\psi}{f} = \frac{c\sin\beta\,\mathrm{coſec}\,\psi}{c.\cos\beta\cos\eta}$$

$= \tang\beta \sec\eta\, \mathrm{coſec}\,\psi$, und F*r* $=$ L $= f\sec\zeta = a.\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta = \sqrt{(a^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2 + f^2)}$, oder auch

F*r* $=$

$Fr = c . \cos\beta \cos\eta \sqrt{(1 + tg\beta^2 \sec\eta^2 \operatorname{cosec}\psi^2)} = c \sqrt{(\cos\beta^2 \cos\eta^2 + \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2)} = L.$

Dieſe Formuln dienen, wenn man die Projection des Kreiſes zugleich als Kegelſchnitt betrachten will, auf eine ſehr leichte und kurze Art die Vergleichung mit den Abmeſſungen des Kegels anzuſtellen, wozu das folgende eine nähere Anleitung geben wird.

252 §.

Eine allgemeine Gleichung für die Projection des Kreiſes ABED bey jeder gegebenen Lage der Tafel TVXY gegen die Ebene des abzubildenden Kreiſes zu finden. 102 F.

Aufl. Man ziehe durch den Mittelpunct C den Durchmeſſer AE auf der Fundamentallinie TV ſenkrecht, und durch P eine Ordinate MN mit TV parallel, ſetze $EP = t$, $PM = PN = \alpha$, den Halbmeſſer $A = CE = r$, ſo hat man für den Kreis die Gleichung $uu = (2r - t)t$. Ferner ſey *amen* die Projection, *ap* das Bild von AP, *pm* das Bild von PM, ſo laufen *ep* und EP in F zuſammen, und *pm* iſt mit TV parallel. Wenn alsdenn $ep = x$, $pm = y$ geſetzt wird, ſo giebt die allgemeine Aufgabe des 102 §.

$$t = \frac{(D \operatorname{cosec}\psi + c)^2 x}{D \operatorname{cosec}\psi . L + (D \operatorname{cosec}\psi + c) x},$$

$$u = \frac{(D \operatorname{cosec}\psi + c) L . y}{D \operatorname{cosec}\psi . L + (D \operatorname{cosec}\psi + c) x};$$

da dann $c = FE$ iſt. Dieſe Werthe in die Gleichung $uu = (2r - t)t$ geſetzt geben die geſuchte Gleichung für die Projection. Man ſetze nun $FC = \delta$, ſo iſt $FE = c = \delta + r$, und man erhält $D \operatorname{cosec}\psi + \delta + r$

ſtatt

ſtatt $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c$. Noch ſetze man $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta = b$, ſo hat man $b + r$ ſtatt $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c$, und in der 102 Fig. iſt $Cg = Or + CF = D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta = b$.

Das giebt $2r - t =$

$$\frac{2r \,.\, D\,\mathrm{coſec}\,\psi \,.\, L + (2r(b+r) - (b+r)^2)x}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi \,.\, L + (b+r)x},$$

und $2r(b+r) - (b+r)^2 = r^2 - b^2$, alſo

$$2r - t = \frac{2r\,D\,\mathrm{coſec}\,\psi \,.\, L - (b^2 - r^2)x}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi \,.\, L + (b+r)x}.$$ Dieſer Werth nebſt den Werthen von t und u in die Gleichung für den Kreis geſetzt giebt $(b+r)^2 L^2 y^2 = (b+r)^2 (2r\,D\,\mathrm{coſec}\,\psi \,.\, Lx - (b^2 - r^2)x^2)$ oder $\frac{L^2 y^2}{b^2 - r^2} = \frac{2r\,D\,\mathrm{coſec}\,\psi \,.\, L}{b^2 - r^2}$

$x - xx$, oder auch $yy = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$

$$\left(\frac{2r\,D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,L}{b^2 - r^2} - x\right)x.$$ Das iſt die geſuchte Gleichung für die Projection. Der Coordinaten-Winkel iſt $= \zeta$, und $\tang \zeta = \frac{a\,\mathrm{coſec}\,\psi}{f}$. Weiter iſt $L = f\,\mathrm{ſec}\,\zeta = a\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta$, und den Anfangspunct der Abſciſſen giebt die Gleichung

$Fe = \frac{c\,.\,L}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c}$ (102 §.) alſo hier

$$Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r}$$

Um

Um die Gleichung zwiſchen x und y abzukür-zen, kann man $\frac{2r\,D\text{coſec}\psi.L}{b^2-r^2}=h$ ſetzen, ſo hat man $yy=\frac{b^2-r^2}{L^2}(h-x)x$. Im 57. §. ward dieſelbe Gleichung zwiſchen x und y gefunden, nur hatte man in den dortigen Formuln allemahl D ſtatt Dcoſecψ, und a ſtatt $a$coſecψ. Die hieſigen Formuln werden demnach in jene des 57 §. verwandelt, wenn man $\psi=90°$ ſetzt, wie der Natur der Sache gemäß iſt.

253. §.

Was im 57 §. D war, das iſt hier Dcoſecψ, und was dorten a war, das iſt hier $a$coſecψ: weiter iſt kein Unterſcheid unter den Formuln des 57. und 252 §. Demnach finden alle Folgen, welche im 57. und 58 §. aus dieſen Formulu ſchon ſind hergeleitet worden, ihre allgemeine Anwendung, wenn von der Projection eines Kreiſes die Rede iſt, die Tafel mag gegen die Ebene dieſes Kreiſes, wie man will, geneigt ſeyn.

Die Projection ea des auf der Fundamentallinie ſenkrechten Durchmeſſers EA des Kreiſes iſt allemahl ein Durchmeſſer der Projection, und die mit der Fundamentallinie parallelen Sehnen oder Ordinaten der Projection ſind jenem Durchmeſſer zugeordnet: ſie ſind die Bilder der mit der Grundlinie parallelen Sehnen des Kreiſes (58 §.) Setzt man in der gefundenen Gleichung $y=0$, ſo hat man für x zwey Werthe $x=0$, und $x=h$, mithin iſt

$ea=$

$ea = h = \frac{2r\,\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,.\,\mathrm{L}}{b^2 - r^2}$, und dies iſt der in den Augenpunct laufende Durchmeſſer der Projection.

Um der Gleichung zwiſchen x und y eine noch bequemere Form zu geben, halbire man dieſen Durchmeſſer ea in f, und ziehe durch f die demſelben zugeordnete Sehne kl; in der allgemeinen Gleichung zwiſchen x und y ſetze man nun $x = ef = \frac{1}{2}h$, ſo findet man den zugehörigen Werth $y = fk = fl = \pm \sqrt{\frac{b^2 - r^2}{\mathrm{L}^2} \cdot \frac{1}{4}h^2}$. Von nun an ſey dieſer Werth $= q$, und $\frac{1}{2}h = ef = p$, ſo hat man $qq = \frac{b^2 - r^2}{\mathrm{L}^2}\,pp$, oder $\frac{b^2 - r^2}{\mathrm{L}^2} = \frac{qq}{pp}$, und die allgemeine Gleichung zwiſchen x und y verwandelt ſich in folgende $yy = \frac{qq}{pp}(2p - x)x$. Uebrigens hat man $p = \frac{1}{2}h$ also $p = \frac{r\,\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi\,.\,\mathrm{L}}{b^2 - r^2}$, und $q = \frac{\sqrt{(b^2 - r^2)}}{\mathrm{L}}\,.\,p$, alſo $q = \frac{r\,.\,\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$.

Die Projection des Kreiſes iſt allemahl eine Ellipſe, wenn der ganze Kreis hinter der Tafel liegt, und die Tafel zwiſchen dem Auge und dem Kreiſe ſteht. (249 §.) Wofern aber die Grundlinie der Tafel den Kreis ſchneidet, ſo daß ein Stück deſſelben dieſſeits mit dem Auge auf einerley Seite der

Ta=

Tafel, ein andres aber jenſeits der Tafel liegt, ſo kann die Projection auch eine Parabel oder Hyperbel ſeyn. (248. 250. §.) In allen Fällen dient die gefundene Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(2p-x)x$ über die Geſtalt der Projection die nöthigen Unterſuchungen anzuſtellen: es iſt eine allgemeine Gleichung für jeden Kegelſchnitt, und es wird nunmehro nützlich ſeyn, dieſe Projection zugleich als Kegelſchnitt zu betrachten.

254. §.

Die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt zu finden, wenn die Länge der Axe des Kegels (c) ihre Neigung gegen die Grundfläche, (α) der Halbmeſſer der Grundfläche, (r) der Winkel (η) der Fundamentallinie des Schnitts mit der Fundamentallinie der Axe des Kegels, der Abſtand (e) des Durchſchnittspuncts beyder Fundamentallinien vom Mittelpunct der Grundfläche, und der Neigungswinkel ψ des Schnitts gegen die Grundfläche gegeben ſind.

Aufl. Vermöge des 251 §. iſt $a = c \sin\beta$, $f = c\cos\beta\cos\eta$, $\tang\zeta = \tang\beta \sec\eta \operatorname{cosec}\psi$, alſo $\sec\zeta = \sqrt{(1 + tg\beta^2 \sec\eta^2 \operatorname{cosec}\psi^2)}$. Ferner war $D = c\sin\beta\cos\psi + (c.\cos\beta - e)\sin\eta\sin\psi$, alſo iſt $D\operatorname{cosec}\psi = c\sin\beta\cot\psi + c.\cos\beta\sin\eta - e\sin\eta$; und weil $e\sin\eta = FC = \delta$ iſt, ſo erhält man $D\operatorname{cosec}\psi + \delta = b = (c\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta)$.

Uebrigens iſt die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt zwiſchen $ep = x$, und $pm = y$ folgende:

 $yy =$

$$yy = \frac{qq}{pp}(2p-x)x,$$

worin p und q nebſt den Coordinaten-Winkel ζ aus den gegebenen Abmeſſungen des Kegels, und den Gröſſen, welche die Lage des Schnitts im Kegel beſtimmen, vermöge der eben hergeleiteten Formuln gefunden werden können. Es iſt nemlich

$$p = \frac{r\,\mathrm{D}\operatorname{coſec}\psi\,.\,\mathrm{L}}{b^2-r^2},\ q = \frac{r\,\mathrm{D}\operatorname{coſec}\psi}{\sqrt{(b^2-r^2)}},\ \frac{qq}{pp}$$

$$= \frac{b^2-r^2}{\mathrm{L}^2},$$ da dann auch $\mathrm{L} = f\operatorname{ſec}\zeta = a\operatorname{coſec}\psi$ $\operatorname{coſec}\zeta$ eine bekannte Linie iſt. Für die Stelle des Anfangspuncts der Abſciſſen hat man $\mathrm{F}e = \frac{(\delta+r)\mathrm{L}}{b+r}$.

In eben den Formuln kann man auch $b-\delta$ ſtatt $\mathrm{D}\operatorname{coſec}\psi$ ſchreiben, ſo hat man $p = \frac{r(b-\delta)\mathrm{L}}{b^2-r^2}$, und $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$.

Jeder Kegelſchnitt hat demnach einen Durchmeſſer, der eine Reihe ihm zugeordneter Sehnen, die mit der Fundamentallinie des Schnitts parallel ſind, unter einem Winkel halbirt, deſſen Tangente $= \operatorname{tang}\beta \operatorname{ſec}\eta \operatorname{coſec}\psi = \operatorname{tang}\beta \operatorname{coſec}\alpha \operatorname{coſec}\psi$, weil $\eta = 90° - \alpha$ (251 §.) angenommen iſt.

255 §.

Wenn die Axe des Kegels, c, unendlich groß iſt, ſo verwandelt ſich die Kegelfläche in eine Cylin-

derfläche, und der Kegelſchnitt in einen Cylinderſchnitt. Bey der Vorausſetzung $c=\infty$ werden auch b und L unendlich groß, und man erhält $p=\frac{rL}{b}$, oder $p=\frac{r\cos\beta\cos\eta\sec\zeta}{\sin\beta\cot\psi+\cos\beta\sin\eta}$, oder auch $p=\frac{r\sin\beta\operatorname{cosec}\psi\operatorname{cosec}\zeta}{\sin\beta\cot\psi+\cos\beta\sin\eta}$, und $q=r$: die allgemeine Gleichung für den Cylinderſchnitt bleibt $yy=\frac{qq}{pp}(2p-x)x$, und $\tan\zeta=\tan\beta\sec\eta\operatorname{cosec}\psi$; für den Anfangspunct der Abſciſſen aber hat man $Fe=\frac{(\delta+r)L}{b}$ $=\frac{(\delta+r)\cos\beta\cos\eta\sec\zeta}{\sin\beta\cot\psi+\cos\beta\sin\eta}$. In der Perſpectiv iſt dies der Fall der orthographiſchen Projection des Kreiſes; (199 §.) es iſt eben ſo viel, als wenn in den Gleichungen für p und q im 253 §, $D=\infty$ geſetzt, und dabey angenommen wäre, daß die Winkel β und η oder α unverändert bleiben, mithin auch a und f unendlich groß werden ſollen. Will man den Winkel $\alpha=90°-\eta$ ſtatt η in der Rechnung brauchen, ſo hat man $p=\frac{r\cos\beta\sin\alpha\sec\zeta}{\sin\beta\cot\psi+\cos\beta\cos\alpha}$ $=\frac{r\tan\alpha\sec\zeta}{\tan\beta\sec\alpha\cot\psi+1}$. Aber $\tan\zeta=\tan\beta\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\psi$, mithin $\tan\beta=\tan\zeta\sin\alpha\sin\psi$: das giebt $\tan\beta\sec\alpha\cot\psi=\tan\zeta\tan\alpha\cos\psi$

und es wird $p = \frac{r \cdot \text{tang}\,\alpha\, \text{ſec}\,\zeta}{1 + \text{tang}\,\zeta\, \text{tang}\,\alpha\, \text{coſ}\,\psi}$, wie dem 227 §. gemäß iſt. Die Buchſtaben α und β bezeichnen hier eben die Winkel, welche ſie im XIII. und XIV. Abſchnitt bezeichnet haben: es iſt nemlich α die Abweichung des Auges von der erſten Verticalfläche, und β die Höhe des Auges über der Ebene des abzubildenden Kreiſes.

256. §.

Aus der Beſchaffenheit der allgemeinen Gleichung zu beurtheilen: ob der Kegelſchnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel ſey?

Aufl. Man weis aus dem 248. 249. und 250. §., daß der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel ſey, nachdem der Winkel $CFr <=$ oder $>$ CAO iſt: demnach ſuche man dieſe beyden Winkel, um hiernächſt die Vergleichung anzuſtellen.

102 F. Im körperlichen Dreyeck, deſſen Spitze F iſt, und deſſen Seitenflächen $CFW = 90°$, $WFr = \zeta$, und CFr ſind, hat man den Winkel an $FW = \psi$, nebſt den Seiten, die ihn einſchlieſſen. Demnach iſt $\text{coſ}\, CFr = \text{coſ}\,\psi\, \text{ſin}\,\zeta$ (550 §. Geom.) weil $\text{coſ}\, CFW = 0$, und $\text{ſin}\, CFW = 1$ iſt; und das giebt $\text{ſin}\, CFr = \sqrt{(1 - \text{coſ}\,\psi^2\, \text{ſin}\,\zeta^2)}$. Ferner hat man $\text{tang}\,\zeta = tg\,\beta\, \text{ſec}\,\eta\, \text{coſec}\,\psi$, und $\text{cot}\,\zeta = \text{cot}\,\beta\, \text{coſ}\,\eta\, \text{ſin}\,\psi$, mithin $\text{coſec}\,\zeta = \sqrt{(1 + \text{cot}\,\beta^2\, \text{coſ}\,\eta^2\, \text{ſin}\,\psi^2)}$, und

$$\text{ſin}\,\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{cot}\,\beta^2\, \text{coſ}\,\eta^2\, \text{ſin}\,\psi^2)}}.$$ Das giebt

$$\text{coſ}\,\psi^2\, \text{ſin}\,\zeta^2 = \frac{\text{coſ}\,\psi^2}{1 + \text{cot}\,\beta^2\, \text{coſ}\,\eta^2\, \text{ſin}\,\psi^2},$$

und $1 - \mathrm{coſ}\psi^2 \, \mathrm{ſin}\zeta^2 = \dfrac{\mathrm{ſin}\psi^2 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2 \, \mathrm{ſin}\psi^2}{1 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2 \, \mathrm{ſin}\psi^2}$

Folglich erhält man

$$\mathrm{ſin}\, CFr = \frac{\surd\,(\mathrm{ſin}\psi^2 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2 \, \mathrm{ſin}\psi^2)}{\surd\,(1 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2 \, \mathrm{ſin}\psi^2)},$$

$$\mathrm{coſ}\, CFr = \frac{\mathrm{coſ}\psi}{\surd\,(1 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2 \, \mathrm{ſin}\psi^2)},$$

alſo $\mathrm{tang}\, CFr = \dfrac{\surd\,(\mathrm{ſin}\psi^2 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2 \, \mathrm{ſin}\psi^2)}{\mathrm{coſ}\psi}$,

oder $\mathrm{tang}\, CFr = \mathrm{tang}\psi \surd\,(1 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2)$.

Im gradlinichten Dreyeck ACO hat man $\mathrm{tang}\, CAO = \dfrac{c \,.\, \mathrm{ſin}\, ACO}{r - c \,.\, \mathrm{coſ}\, ACO}$, (453 §. Geom.) und ACO iſt die Hypothenuſe eines rechtwinklichten körperlichen Dreyecks, deſſen Spitze C, und deſſen Perpendiculär-Seiten $WFC = \alpha = 90^\circ - \eta$ und $WCO = \beta$ ſind. Demnach iſt $\mathrm{coſ}\, ACO = \mathrm{coſ}\beta \, \mathrm{coſ}\alpha = \mathrm{coſ}\beta \, \mathrm{ſin}\eta$, mithin $\mathrm{ſin}\, ACO = \surd\,(1 - \mathrm{coſ}\beta^2 \, \mathrm{ſin}\eta^2)$ und man erhält $\mathrm{tang}\, CAO = \dfrac{c \,.\, \surd\,(1 - \mathrm{coſ}\beta^2 \, \mathrm{ſin}\eta^2)}{r - c \,.\, \mathrm{coſ}\beta \, \mathrm{ſin}\eta}$.

Weil nun der Kegelſchnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel iſt, nachdem $CFr <$ oder $> CAO$ iſt; (248-250. §.) ſo wird der erſte, zweyte oder dritte Fall ſtatt haben, nachdem $\mathrm{tang}\, CFr < =$ oder $> tg.\, CAO$ iſt, oder nachdem $\mathrm{tang}\psi \surd\,(1 + \cot\beta^2 \, \mathrm{coſ}\eta^2) < =$ oder $> \dfrac{c \,.\, \surd\,(1 - \mathrm{coſ}\beta^2 \, \mathrm{ſin}\eta^2)}{r - c \,.\, \mathrm{coſ}\beta \, \mathrm{ſin}\eta}$.

Weiter hat man $1 + \cot\beta^2 \cos\eta^2 = \operatorname{cosec}\beta^2 - \cot\beta^2 + \cot\beta^2 \cos\eta^2 = \operatorname{cosec}\beta^2 - \cot\beta^2 \sin\eta^2 = \frac{1}{\sin\beta^2}$ $(1 - \cos\beta^2 \sin\eta^2)$; werden alſo die beyden Winkel CFr und CAO gleich groß angenommen, ſo iſt $\tang\psi \cdot \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c}{r - c \cdot \cos\beta \sin\eta}$, oder

$$\tang\psi = \frac{c \sin\beta}{r - c \cdot \cos\beta \sin\eta},$$

und in dieſem Fall iſt der Schnitt eine Parabel. Er wird eine Ellipſe, wenn $\tang\psi < \frac{c\sin\beta}{r - c \cdot \cos\beta \sin\eta}$ und eine Hyperbel, wenn $\tang\psi > \frac{c\sin\beta}{r - c \cdot \cos\beta\sin\eta}$ iſt.

Nachdem nun $\tang\psi < = \text{oder} > \frac{c\sin\beta}{r - c . \cos\beta\sin\eta}$, nachdem iſt, $\cot\psi > = \text{oder} < \frac{r - c . \cos\beta \sin\eta}{c\sin\beta}$, oder auch $c\sin\beta\cot\psi + c . \cos\beta\sin\eta > = \text{oder} < r$. Weil nun $c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta) = b$ war 254. §. ſo iſt der Kegelſchnitt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel, nachdem b gröſſer, oder eben ſo groß, oder kleiner, als r iſt. Ferner war im 254 §. $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$ und $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$, die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt aber war $yy = \frac{qq}{pp}(2p - x)x$, und dieſe läßt ſich auch ſo

aus=

ausdrücken: $yy = \frac{2qq}{p} x - \frac{qq}{pp} xx$; da dann ferner $\frac{qq}{pp} = \frac{(b^2 - r^2)}{L^2}$ iſt (245 §.) und $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L}$ gefunden wird. Dieſe Schlüſſe vorausgeſetzt kann man alle drey Fälle leicht überſehen, wenn zuerſt der Schnitt eine Ellipſe, mithin $b > r$ iſt; ſo iſt der Nenner des Bruchs, welcher p ausdrückt, poſitiv; zugleich iſt auch q eine mögliche Gröſſe. Im Fall der Schnitt eine Parabel alſo $b = r$ iſt, ſo werden zwar p und q beyde unendlich groß, weil beyde Nenner verſchwinden: weil aber $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L}$ endlich bleibt, ſo verwandelt ſich die Gleichung für die Parabel in folgende: $yy = \frac{2qq}{p} x$.

Im Fall endlich der Schnitt eine Hyperbel alſo $b < r$ iſt, ſo wird q eine unmögliche Gröſſe, und qq negativ, ſo wie auch p. Die Urſache, warum q unmöglich wird, iſt dieſe, weil die Ordinate durch die Mitte des Durchmeſſers $e'a'$ (99 Fig.) die Hyperbel gar nicht ſchneiden kann; die Urſache aber warum p negativ wird, liegt darin; weil nun $p = e'a'$ den poſitiv angenommenen Abſciſſen $e'p'$ entgegen geſetzt iſt. Es bleibt alſo $\frac{qq}{p}$ poſitiv, aber $\frac{qq}{pp}$ wird negativ, weswegen die allgemeine Gleichung für die Hy-

Hyperbel die Form annimmt:

$$yy = \frac{2qq}{p} x + \frac{qq}{pp} xx.$$

oder $yy = \frac{qq}{pp}(2p+x)x$. Hat man dieſe Veränderung mit der allgemeinen Gleichung ſchon vorgenommen, wodurch ſie nun auf die Hyperbel iſt eingeſchränkt worden; ſo iſt durch p die poſitive Gröſſe $\frac{r(b-\delta)L}{r^2-b^2}$ zu verſtehen, und eben ſo auch durch q die mögliche Gröſſe $\frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-b^2)}}$, $r > b$ angenommen.

Dieſe Schlüſſe leiten zugleich auf folgende umgekehrte Sätze: Wenn $b > r$ iſt, mithin ſowohl p als auch q mögliche und endliche Gröſſen ſind, ſo gehört die Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(2p-x)x$ für eine Ellipſe, wenn aber $b = r$ iſt, mithin p und q beyde unendlich groß ſind, und ſich die Gleichung in $yy = \frac{2qq}{p} x$ verwandelt, ſo gehört die Gleichung für eine Parabel. Iſt endlich $b < r$, und $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$ angenommen eine unmögliche Gröſſe, ſo gehört die Gleichung für eine Hyperbel.

257. §.

Von e oder δ hängt es eigentlich nicht ab, ob der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel wird, ſondern auſſer den Abmeſſungen des Kegels, r, c, β, nur von den Winkeln η (oder α) und ψ, mithin von der Lage der Ebene des Schnitts gegen die Neigungsebene der Axe des Kegels und gegen ſeine Grundfläche; nicht aber vom Abſtand der Grundlinie des Schnitts vom Mittelpunct der Grundfläche. Demnach ändert ſich die Natur des Kegelſchnitts nicht, wenn gleich die Zähler der Brüche, die p und q ausdrücken, negativ werden. In der 102 Figur, wo der Schnitt eine Ellipſe vorſtellt, hätte man $Cg = b$. (252 §.) Wenn nun alles übrige einerley bleibt, und nur F nach g rückt, oder die Grundlinie TV, ohne ihre Lage zu ändern, und mit ihr die Ebene TVXY, ſich von C entfernt, ſo nimmt $Fg = Gg - CF = b - \delta$ ab, und $ea = 2p$ wird ebenfalls kleiner, ſo wie auch $kl = 2q$. Wenn F in g fällt, ſo verſchwindet $Fg = b - \delta$ und damit zugleich p und q. Die Ellipſe geht in einen Punct zuſammen, weil der Schnitt durch die Spitze geht, und daſelbſt ſchon alle Seitenlinien des Kegels ſchneidet. Es iſt aber allemahl $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$, und

$$q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}, \text{ mithin } \frac{qq}{pp} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}.$$

Der letzte Ausdruck verſchwindet nicht, wenn $b = \delta$ iſt; (es wäre denn $r = \delta$, aber der Fall gehört nicht hieher, weil alsdenn der Schnitt eine Parabel wäre.) Demnach wird die Gleichung für die Ellipſe jetzt

dieſe $yy = -\frac{qq}{pp} \cdot x\alpha$, d. i. die Ellipſe hat keine mögliche Ordinaten, ohne in dem Fall $x=0$, wo $y=0$ wird, alles der Natur der Sache gemäß. Wird $\delta > b$, ſo fällt F linker Hand von g, und $gF = b - \delta$ wird negativ: nun wird zugleich p negativ, ($q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$ hat eigentlich wegen der Wurzelgröſſe kein beſtimmtes Zeichen) wovon die Urſache darin zu ſuchen iſt, weil der Durchmeſſer $e'a'$ (102 Fig.) in dem entgegen geſetzten Kegel, den jetzt der Schnitt nur treffen kann, eine umgekehrte Lage bekommt. Aber die Abſciſſe ep bekommt zugleich mit eine umgekehrte Lage, wenn man anders dieſe Abſciſſe auf dem Durchmeſſer $e'a'$ von e' nach a' nehmen will. Deswegen ändert ſich die Gleichung für die Ellipſe $yy = \frac{qq}{pp}(2p-x)x$ gar nicht, weil $(-2p+x)x - x = (2p-x)x$ bleibt.

Was die Parabel für Aenderungen leide, wenn $CF = \delta = e \sin \eta$ wächſt, überſieht man eben ſo leicht, wenn man die 99. Fig. zu Hülfe nimmt. Für die Parabel iſt $yy = \frac{2qq}{p} x$, und $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L}$, oder $\frac{qq}{p} = \frac{r(r-\delta)}{L}$, weil $b=r$ ſeyn muß. Je mehr ſich alſo δ dem Werth b oder r nähert, deſto kleiner iſt y für jede gegebene Abſciſſe x, und wenn $\delta = b = r$ wird, ſo gehört zu jeder Abſciſſe x die Appli-

plicate $y=0$. Man ſiehet leicht, daß dies der Fall ſey, wenn die Ebene des Schnitts den Kegel berührt, da ſich der Schnitt in eine grade Linie verwandelt, die mit der Abſciſſenlinie zuſammen fällt. Rückt F linker Hand über A hinaus, ſo wird $\delta > r$, und $\frac{qq}{p}$ negativ: aber die Parabel fällt nun in den entgegen geſetzten Kegel, diejenigen Abſciſſen welche den möglichen Ordinaten zugehören, bekommen auch eine entgegen geſetzte Lage, mithin bleibt die Gleichung $yy = \frac{2qq}{p} x$ unverändert, weil beyde Factoren $\frac{2qq}{p}$ und x negativ werden.

Für die Hyperbel iſt $yy = \frac{qq}{pp}(2p + x)x$, $p = \frac{r(b-\delta)L}{r^2 - b^2}$ $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(r^2 - b^2)}}$, und $\frac{qq}{pp} = \frac{r^2 - b^2}{L}$. Wird alſo $\delta = b$, ſo hat man $p = 0$, und $yy = \frac{qq}{pp} xx$, oder $y = \pm \frac{q}{p} x$. Der Schnitt geht nun durch die Spitze, und die Hyperbel verwandelt ſich in zwo grade Linien, die einander in der Spitze des Kegels ſchneiden. Die Ebene Org iſt mit dem Schnitt pa- 102 F.

ral-

rallel, und geht durch die Spitze; wenn alſo $CF = Cg$ iſt, ſo geht der Schnitt ſelbſt durch die Spitze, und giebt zwo grade Linien, wenn $CA > Cg$ iſt. Wird endlich $\delta > b$, mithin $p = \frac{r(b-\delta)L}{r^2 - b^2}$ negativ, ſo hat die Hyperbel die umgekehrte Lage, und die Anfangs als poſitiv angenommenen Abſciſſen, ſind nun dem Durchmeſſer p nicht mehr entgegen geſetzt. In der 99. Fig. woſelbſt $e'a'$ den Durchmeſſer einer Hyperbel vorſtellt, rückt e' durch O nach b, und a' durch O gegen A, wenn $CF = \delta$ wächſt. Iſt $CF > Cg$ geworden, ſo hat $e'a'$ die umgekehrte Lage angenommen, und zugleich die Hyperbel ſelbſt. Die Abſciſſen von e' angerechnet aufwärts genommen, ſind nun in Anſehung der vorigen, die unterwärts genommen werden, negativ, und wenn in der Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(2p + x)x$ den Gröſſen p und x das entgegen geſetzte Zeichen vorangeſetzt wird, ſo leidet ſie keine Aenderung.

258 §.

102F. Die Gröſſe $b = c \sin\beta \cot\psi + c \cos\beta \sin\eta = Cg$ hängt auſſer den Abmeſſungen des Kegels c und β von den Winkeln η und ψ ab, $f = c \cos\beta \sin\eta$ aber hängt nicht von ψ ab. Wenn demnach allein ψ Aenderungen leidet, ſo ändert ſich b, ohne daß f zugleich mit geändert würde. Wenn ψ wächſt, ſo nimmt b ab, für $\psi = 90°$, iſt $b = c \cos\beta \sin\eta$, und wenn ψ aber 90° wächſt, ſo kann b negativ werden. Weil aber b^2 allemahl poſitiv bleibt, ſo hängt es nicht von der Lage, ſondern allein von der Gröſſe der

Linie $b = Cg$ ab, ob der Schnitt eine Parabel, Ellipſe, oder Hyperbel wird. Die 102 Figur macht es ganz deutlich, wie b oder Cg von ψ abhängt, weil die Ebene Osg allemahl mit der Ebene des Schnitts TVXY parallel iſt. Man ſtelle ſich durch O eine grade Linie mit TV parallel vor, ſo wird das eine Axe, um welche ſich die Ebene Osg drehet, wenn ſich TVXY um TV drehet, und ψ Aenderungen leidet. Wächſt ψ, ſo rückt sg gegen TV und $Cg = b$ wird kleiner. Wenn $\psi = 90°$ iſt, ſo fällt g in G; wird ψ noch gröſſer, ſo wird cot ψ negativ, $b = c(\cot\beta \sin\eta - \sin\beta \cot\psi)$ nimmt noch weiter ab, und wenn ψ oder rTZ = OTZ wird, da dann der Schnitt durch die Spitze geht, ſo fällt g in F, und es wird $b = \delta$, wie den Schlüſſen des vor. §. gemäß iſt. Wird $\psi >$ OTZ, ſo rückt g über F hinaus gegen A zu, und es iſt $Cg <$ CF, oder $b < \delta$, alſo $b - \delta$ negativ. Die Ellipſe fällt in den entgegen geſetzten Kegel in umgekehrter Lage, und der Schnitt bleibt eine Ellipſe, ſo lange bis g in A gerückt iſt. Alsdenn berührt die Ebene Osg den Kegel, und der mit OA parallele Schnitt wird ein Parabel. Wächſt ψ noch weiter, ſo rückt g über A hinaus gegen C, es wird $b^2 < r^2$ und der Schnitt eine Hyperbel. Alsdenn kann g in C fallen, oder $Cg = b = 0$ werden, wenn $\sin\beta \cot\psi = -\cos\beta \sin\eta$ iſt, oder $\cot\psi = -\sin\eta \cot\beta$. Nun iſt der Schnitt mit der Axe des Kegels parallel, und man hat $p = \frac{\delta L}{r}$,

$q = \pm \frac{\delta}{\sqrt{-1}}$. Hier iſt p um deswillen poſitiv, weil die poſitiv angenommenen Abſciſſen mit ea auf ei-

einerley Seite des Puncts e liegen. Bey noch gröſſern Werthen des Winkels ψ wird b negativ, und g fällt auf die andre Seite von C: indeſſen bleibt der Schnitt eine Hyperbel, ſo lange $b^2 < r^2$ bleibt, d. i. ſo lange g nicht in E fällt, oder über E hinaus rückt. Ueberhaupt iſt für jeden dieſer Hyperbelſchnitte, ſo lange b zwiſchen den Gränzen $+r$ und $-r$ enthalten iſt, $p = \frac{r(\delta \pm b)L}{r^2 - b^2}$, und

$$q = \pm \frac{r(\delta \pm b)}{\sqrt{(r^2 - b^2)}\sqrt{-1}}.$$ Fällt endlich g in E, ſo iſt aufs neue $b^2 = r^2$, und der Schnitt eine Parabel, und wenn g noch weiter als E von C wegrückt, ſo wird wiederum $b^2 > r^2$ und der Schnitt eine Ellipſe.

In der 99. Figur, wo CF < CA, oder $\delta < r$ angenommen iſt, folgen die Aenderungen, welche mit der Natur des Kegelſchnitts vorgehen, wenn ψ wächſt, in etwas andrer Ordnung auf einander. Es ſtellt daſelbſt *eman* eine Ellipſe vor, und wenn ψ wächſt, ſo wird nun ſchon $b = r$, wenn g in A fällt, noch ehe $b = \delta$ wird. Demnach iſt nun ſchon der Schnitt eine Parabel, und muß zuförderſt in die Hyperbel übergehen, ehe er noch ein Schnitt durch die Spitze wird, der ſich nun, wenn g in F fällt, und $b = \delta$ wird, in zwo grade Linien verwandelt. So lange nun $b > \delta$ war, blieb für die Hyperbel $p = \frac{r(b - \delta)L}{b^2 - r^2}$ negativ: eben dieſer Durchmeſſer p verſchwindet für $b = \delta$, und wird poſitiv, wenn $b < \delta$ wird, das heiſt, er fällt mit den poſitiven Abſciſ-

ſciſſen auf einerley Seite von e'. Iſt nemlich e' durch O gegen b zu gerückt, ſo iſt a' durch O gegen A zu herunter gerückt, und $e'a'$ hat eine der vorigen entgegen geſetzte Lage. Aus der Hyperbel wird alsdenn aufs neue eine Parabel, wenn g in E fällt, und hiernächſt wieder eine Ellipſe, wenn g über E wegrückt.

In dem beſondern Fall, wenn die Grundlinie des Schnitts TV mit MN einerley iſt, d. i. wenn ſie die Grundfläche des Kegels berührt, hat man $\delta = r$, alſo $p = \frac{rL}{b+r}$, und $q = \frac{r\sqrt{(b-r)}}{\sqrt{(b+r)}}$.

Nun iſt der Schnitt für alle poſitive Werthe von b, die gröſſer als r ſind, eine Ellipſe. Wächſt ψ ſo weit, daß $b = r$ wird, ſo würde ſonſt der Schnitt eine Parabel ſeyn, weil er aber in dieſem beſondern Fall zugleich durch die Spitze geht, weil zugleich $b = \delta$ iſt, ſo verwandelt ſich die Ellipſe in eine grade Linie. Man erhält nun $p = \frac{1}{2}L$ und $q = 0$, alſo beſtändig $y = 0$. Wird ψ noch gröſſer mithin $b < r$, ſo wird der Schnitt eine Hyperbel, wie denn auch $q = \frac{r\sqrt{(b-r)}}{\sqrt{(b+r)}}$ unmöglich wird, obgleich $p = \frac{rL}{b+r}$ poſitiv bleibt. Es bleibt nemlich ea auf der Seite von e liegen, wo anfangs die poſitiven Abſciſſen ep genommen ſind. Fällt g in C, oder wird $b = 0$, ſo iſt der Schnitt mit der Axe des Kegels parallel, und man hat $p = L$, $q = r\sqrt{-1}$. Wenn ψ noch weiter wächſt, ſo wird b negativ: es

bleibt

bleibt aber $p = \frac{rL}{r-b}$ poſitiv, und

$$q = \frac{r\sqrt{(b+r)}\sqrt{-1}}{\sqrt{(r-b)}}$$ ſo lange unmöglich, der

Schnitt aber eine Hyperbel, bis wieder $b = r$ wird, da dann p und q unendlich groß werden, und aus dem Schnitt eine Parabel wird. Wenn endlich aufs neue $b > r$ wird, ſo wird zwar $p = \frac{rL}{r-b}$

negativ, aber $q = \frac{r\sqrt{(b+r)}\sqrt{-1}}{\sqrt{(r-b)}}$, oder

$$q = \frac{r\sqrt{(b+r)}\sqrt{-1}}{\sqrt{(b-r)}\sqrt{-1}} = \frac{r\sqrt{(b+r)}}{\sqrt{(b-r)}}$$ wird

wieder eine mögliche Gröſſe, und der Schnitt eine Ellipſe.

Aus dem bisherigen kann man übrigens noch folgende Kennzeichen herleiten, welche zur Beurtheilung dienen, ob der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel wird. Eine Ebene durch die Spitze O beyder Kegel, mit der Ebene des Schnitts parallel gelegt, hat entweder eine ſolche Lage, daß ſie keinen von beyden Kegeln weder berührt noch ſchneidet, oder ſie berührt beyde Kegel, oder ſie ſchneidet beyde Kegel. Im erſten Fall iſt der Schnitt eine Ellipſe, im zweyten Fall eine Parabel, im dritten Fall eine Hyperbel.

259. §.

Jeder Cylinderſchnitt, mithin jede orthographiſche Projection des Kreiſes (255 §.) iſt eine

eine Ellipſe, (die in beſondern Fällen ein Kreis werden kann,) nur den einzigen Fall ausgenommen, wenn die Ebene des Schnitts mit den Seitenlinien des Cylinders parallel iſt.

Beweis. Weil der Cylinder als ein Kegel betrachtet werden kann, deſſen Axe CO unendlich groß iſt, ſo ſtelle man ſich in der 102 Fig. CO unendlich groß vor, und erinnere ſich aus dem 249 §. daß die Ebene des Schnitts alle Seitenlinien des Kegels ſchneide, wenn der Schnitt eine Ellipſe iſt, alle Seitenlinien weniger eine, wenn er eine Parabel, (248 §.) aber alle Seitenlinien weniger zwey, wenn es eine Hyperbel iſt. (250 §.) Wie nun alle Seitenlinien des Kegels einander ſelbſt in der Spitze O ſchneiden, ſo ſchneiden im Gegentheil die Seitenlinien des Cylinders einander gar nicht, ſie ſind mit einander insgeſammt parallel. Wenn demnach die Ebene des Schnitts eine von den Seitenlinien des Cylinders ſchneidet, ſo ſchneidet ſie die übrigen alle, und die Durchſchnittsfigur wird das, was im eigentlichen Kegel die Ellipſe iſt. Wofern aber die Ebene des Schnitts mit einer Seitenlinie des Cylinders parallel iſt, ſo iſt ſie mit allen übrigen auch parallel, und kann keine davon ſchneiden. Demnach ſind im Cylinder dergleichen Schnitte nicht möglich, die im eigentlichen Kegel die Parabel oder Hyperbel geben.

Mit dieſen Schlüſſen ſtimmen auch die allgemeinen Formuln ſehr wohl überein. Denn man hat vermöge des 255. §. für den Cylinderſchnitt allemahl $q=r$, mithin kann niemahls q weder unendlich groß noch negativ werden, und die Gleichung

des Schnitts $yy = \frac{qq}{pp}(2p-x)x$ gehört allemahl für eine Ellipſe. Nur die Vorausſetzung $\psi = 0$ giebt tang ζ (255. §.) $=$ tang β sec η cosec $\psi = \infty$, mithin wird $\zeta = 90°$, cosec $\zeta = 1$, und $p = r$, d. i. der Schnitt wird ein Kreis.

Der Fall, wenn die Ebene des Schnitts mit den Seitenlinien des Cylinders parallel iſt, läſt ſich zwar ſchon aus den Anfangsgründen der Geometrie beurtheilen: indeſſen iſt derſelbe in den allgemeinen Formuln mit begriffen. Denn im 256. §. ward tang $CFr = $ tang $\psi \sqrt{(1 + \cot\beta^2 \cos\eta^2)}$ gefunden, und weil hier $CAO = 180° - ACO$ iſt, ſo hat man tang $CAO = -$ tang ACO, und es wird, wie im 256 §. tang $ACO = \frac{\sqrt{(1-\cos\beta^2 \sin\eta^2)}}{\cos\beta \sin\eta}$ gefunden. Wenn nun $CFr = CAO$, oder tang CFr $=$ tang CAO iſt, ſo liegt die Ebene des Schnitts mit einer Seitenlinie des Cylinders parallel, und die Vorausſetzung giebt tang $\psi \sqrt{(1 + \cot\beta^2 \cos\eta^2)}$ $= - \frac{\sqrt{(1-\cos\beta^2 \sin\eta^2)}}{\cos\beta \sin\eta}$. Weil ferner wie im 256 §. erhellet, daß $1 + \cot\beta^2 \cos\eta^2 = \frac{1}{\sin\beta^2}$ $(1 - \cos\beta^2 \sin\eta^2)$ ſey; ſo erhält man tang $\psi \cdot \frac{1}{\sin\beta} = - \frac{1}{\cos\beta \sin\eta}$, oder tang $\psi = - \frac{\tan\beta}{\sin\eta}$, oder auch $\cot\psi = - \sin\eta \cot\beta$.

Dies

Dies iſt der Fall welcher gar keinen eigentlichen Cylinder-Schnitt giebt. Die Voransſetzung CFr= CAO gab im 256 §. $\tang\psi = \frac{c \sin\beta}{r - c \,.\, \cos\beta \sin\eta}$,

woraus ebenfalls $\tang\psi = - \frac{\tang\beta}{\sin\eta}$ wird,

wenn man $c = \infty$ ſetzt.

Will man nun den Cylinderſchnitt als Kegelſchnitt betrachten, ſo muß man erwägen, daß dieſer beſondre Fall beym Cylinder mit demjenigen überein komme, wenn beym Kegel der Schnitt mit einer Seitenlinie des Kegels parallel iſt, da dann beym Kegel $b = 0$ wäre. Es iſt nemlich $b = c \sin\beta (\cot\psi + \cot\beta \sin\eta)$, und der Vorausſetzung gemäß müſte $\cot\psi = \frac{r - c \,.\, \cos\beta \sin\eta}{c \,.\, \sin\beta}$ ſeyn, (256 §.) das giebt

$b = r + c (\cos\beta \sin\eta - \cos\beta \sin\eta) = r$, wenn c endlich iſt, und ſo hätte der Schnitt die Natur der Parabel. Weil hier aber c unendlich groß iſt, ſo bleibt b unbeſtimmt, und der Schnitt nimmt zugleich die Natur der Hyperbel an, denn er iſt auch mit der Axe OC parallel. Hiezu kommt aber noch drittens der Umſtand, daß es eben ſo viel iſt, als wenn die Ebene des Schnitts durch die Spitze des Kegels geht, weil die Spitze O von C unendlich weit entfernt iſt. Liegt aber die Spitze des Kegels in der Ebene des Schnitts, ſo iſt D=0, mithin $D \operatorname{coſec}\psi = b - \delta = 0$, und $b = \delta$. Weil nun $\frac{qq}{p} = \frac{r(b - \delta)}{L}$ iſt, ſo würde ſich die allgemeine Gleichung

$yy = \frac{2qq}{p} x - \frac{qq}{pp} xx$ in folgende

$yy = \pm \sqrt{-\frac{qq}{pp} xx}$ verwandeln, da dann

$-\frac{qq}{pp} = \frac{r^2 - b^2}{L^2} = \frac{r^2 - \delta^2}{L^2}$ wäre. Hier aber iſt L unendlich groß, und das ſcheint $y = 0$ zu geben: man muß aber erwägen, daß auch $Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r}$ hier $= L$, mithin Fe unendlich groß ſey. Alſo iſt der Schnitt ein Syſtem zweyer graden Linien, die ſich in einem unendlich entfernten Punct ſchneiden, das heiſt zwar parallelen Linien, und jede iſt von der Abſciſſenlinie um den Abſtand $\sqrt{(r^2 - \delta^2)}$ entfernt. Dies alles iſt demjenigen, was die Anfangsgründe lehren, völlig gemäß, und man überſieht den ganzen Zuſammenhang noch beſſer, wenn man in der allgemeinen Gleichung für den Kegelſchnitt den Anfangspunct der Abſciſſen aus e nach F verrückt. In ſolcher Abſicht ſetze man $Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r} = k$, und $Fp = w$, ſo iſt $w + x = k$, und $x = k - w$. Dieſer Werth in die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt geſetzt giebt $yy = \frac{qq}{pp}(2p(k-w) - (k-w)^2)$, oder gehörig

entwickelt $yy = \frac{2qq}{p} . k - \frac{2qq}{p} w$

$-\frac{k^2q^2}{p^2} + \frac{2kqq}{pp}w - \frac{qq}{pp}w^2$. In dem Fall aber welcher hier betrachtet wird, iſt $b=\delta$, und L unendlich groß, mithin findet man $\frac{qq}{p}$.

$$k = \frac{r(b-\delta)(\delta+r)}{b+r} = 0, \quad \frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L} = 0,$$

$$\frac{k^2q^2}{p^2} = \frac{(\delta+r)^2(b-r)}{b+r} = \delta^2 - r^2 \quad \frac{kqq}{pp}$$

$$= \frac{(\delta+r)(b^2-r^2)}{(b+r)L} = 0, \text{ und } \frac{qq}{pp}$$

$$= \frac{b^2-r^2}{L^2} = 0.$$ Folglich hat man für jeden endlichen Werth der Abſciſſe w den beſtändigen Werth $y = \pm\sqrt{(r^2-\delta^2)}$. Weil übrigens allemahl $p = \frac{r\cos\beta\cos\eta\sec\zeta}{\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta}$, oder

$p = \frac{r\cos\eta\sec\zeta\cot\beta}{\cot\psi + \cos\beta\sin\eta}$, und $q=r$ iſt; ſo hat q bey jeder Lage des Schnitts einerley Gröſſe, p aber wächſt ohne Aufhören, wenn ſich $\cot\psi$ dem Werth $-\sin\eta\cot\beta$ nähert. Iſt $\cot\psi$ negativ und gröſſer, als $-\sin\eta\cot\beta$ iſt, ſo wird zwar p negativ: allein dies rührt wiederum nur daher, weil der Durchmeſſer ae und die ganze Ellipſe alsdenn die umgekehrte Lage annimmt. Die Abſciſſe $ep=x$ bekommt auch die entgegen geſetzte Lage, und ſo bleibt die Gleichung

$$yy = \frac{qq}{pp}(2p - x)x$$ unverändert.

260. §.

Derjenige Durchmeſſer *ea* des Kegelſchnitts, welcher alle mit der Grundlinie des Schnitts parallele Sehnen oder Ordinaten halbirt, iſt ſelbſt eine Sehne des Kegelſchnitts, wenigſtens alsdenn, wenn der Schnitt eine Ellipſe, oder Hyperbel iſt. Dieſer Durchmeſſer ſchneidet nemlich die Ellipſe ſowohl, als auch die Hyperbel zweymahl, (die Ellipſe in *e* und *a*, 102 Fig. die Hyperbel in *e'* und *a'*, 99 Fig.) und hat in dieſen beyden Linien eine beſtimmte endliche Gröſſe. Die Parabel aber wird von dieſem Durchmeſſer nur einmahl geſchnitten, und weil die Geſtalt der Ellipſe der Parabel immer näher kommt, je länger der Durchmeſſer wird, und würklich die Parabel daraus wird, wenn jener Durchmeſſer unendlich groß und mit demſelben auch die Ordinate durch ſeine Mitte unendlich groß wird; ſo kann die Sache ſo betrachtet werden, als wenn die Parabel eine Ellipſe wäre, die einen unendlich groſſen Durchmeſſer hätte. Den Durchmeſſer der Ellipſe und Hyperbel kann man halbiren, nicht aber den Durchmeſſer der Parabel: ihr halber Durchmeſſer iſt ebenfalls unendlich groß.

Die Endpuncte des Durchmeſſers heiſſen auch ſeine Scheitelpuncte, (vertices diametri) und man kann zwar allgemein ſagen, daß derjenige Durchmeſſer eines Kegelſchnitts, welcher den mit der Grundlinie des Schnitts parallelen Sehnen zugeordnet iſt, zweene Scheitelpuncte habe; für die Parabel aber iſt einer von den andern unendlich weit entfernt.

261. §.

Die 100. 101. und 103. Fig. ſtellen nun die drey Arten der Kegelſchnitte, die Parabel, die Ellipſe, und Hyperbel beſonders vor. Man halbire den Durchmeſſer EA der Ellipſe und Hyperbel in C, ſetze $CP = t$, ſo iſt in der Ellipſe $CP = t = p - x$, in der Hyperbel aber $CP = t = p + x$; mithin in der Ellipſe $x = p - t$, und in der Hyperbel $x = t - p$. Jener Werth in die Gleichung für die Ellipſe

$$yy = \frac{qq}{pp}(2p - x)x$$

ſtatt x geſetzt, giebt

$$yy = \frac{qq}{pp}(pp - tt):$$

Für die Hyperbel aber, wo qq und p negativ ſind, hat man $yy = \frac{qq}{pp}(2p + x)x$; und wenn hier $t - p$ ſtatt x geſetzt wird, ſo erhält man

$$yy = \frac{qq}{pp}(tt - pp).$$

Mit der Gleichung für die Parabel kann man dieſe Aenderung nicht vornehmen, weil alle Abſciſſen t unendlich groß ſeyn würden.

262 §.

Setzt man $t = 0$, ſo hat man für die Ellipſe $y = CG = q$, aber für die Hyperbel $y = q\sqrt{-1}$. Das heiſt, eine grade Linie durch C mit den dem Durchmeſſer EA zugehörigen Ordinaten parallel ge-

zogen kann die Hyperbel gar nicht ſchneiden: es iſt unmöglich, daß ſie die Hyperbel treffe.

Jede zwo dem Durchmeſſer EA zugeordneten Sehnen M*n*, KL in der Ellipſe und Hyperbel ſind gleich groß, wenn die zugehörigen Abſciſſen CP, CW, von der Mitte des Durchmeſſers an gerechnet, gleich groß ſind. Denn y behält in beyden Gleichungen einerley Gröſſe, wenn man $-t$ ſtatt $+t$ ſchreibt.

Für gleiche und entgegen geſetzte Abſciſſen ſind die Ordinaten der Ellipſe möglich, ſo lange $t < p$ iſt, alle übrige werden unmöglich. Für gleiche und entgegen geſetzte Abſciſſen der Hyperbel aber ſind die Ordinaten ſo lange unmöglich, als $t < p$ iſt: alle übrige ſind möglich.

263. §.

Die grade Linie GO durch die Mitte C des Durchmeſſers EA mit den ihm zugeordneten Sehnen parallel gezogen, iſt gleichfalls ein Durchmeſſer der Ellipſe und Hyperbel für eben den Conjugationswinkel.

Beweis. In beyden Kegelſchnitten ziehe man MV mit CP parallel, ſetze CV$=v$, VM$=w$, ſo iſt $y=v$, $d=w$, und man hat für die Ellipſe

$$vv = \frac{qq}{pp}(pp - ww),$$

alſo $\frac{pp}{qq} vv = pp - ww,$

oder $ww = \frac{pp}{qq}$ $qq - vv)$.

Für

Für die Hyperbel aber wird

$vv = \frac{qq}{pp}(ww - pp)$, alſo

$$\frac{pp}{qq} vv = ww - pp,$$

und $ww = \frac{pp}{qq}(qq + vv)$.

Weil w in beyden Fällen zwey entgegen geſetzte einander gleiche Werthe hat, ſo halbirt OG alle mit EA parallele Sehnen, und OG iſt ein Durchmeſſer (58. §.)

Die dem Durchmeſſer OG zugehörigen Ordinaten für gleiche und entgegen geſetzte Abſciſſen ſind in der Ellipſe nur ſo lange möglich, als $v < q$ iſt, alle übrige ſind unmöglich. In der Hyperbel aber ſind alle dem Durchmeſſer OG zugehörige Ordinaten möglich.

In der Ellipſe ſind EA und OG ein paar einander zugeordnete Durchmeſſer, und eben das ſind EA und OG in der Hyperbel, wenn man zum Durchmeſſer nichts weiter erfordert, als daß er eine Reihe paralleler Sehnen halbire. Erfordert man aber zugleich, daß der Durchmeſſer eine Sehne ſey, welche die krumme Linie wenigſtens in zween Puncten trift, ſo iſt OG kein Durchmeſſer, und in dieſem Verſtande iſt in der Hyperbel der dem Durchmeſſer EA zugeordnete Durchmeſſer unmöglich.

Setzt man in der Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(t^2 - p^2)$ für die Hyperbel $t = 0$, ſo findet man zwar, wie ſchon im 262 §. bemerkt iſt, $y = q\sqrt{-1}$, welches der Natur der Hyperbel gemäß eine unmögliche Gröſſe iſt: nun aber die Aehnlichkeit mit der Ellipſe beyzubehalten, nehme man CG = CO = q, ſo iſt OG = $2q$, und weil dieſe Linien in der Gleichung für die Hyperbel anf ähnliche Art vorkömmt, wie $2q$ in der Gleichung für die Ellipſe, ſo wird ſie auch hier als ein Durchmeſſnr betrachtet, der dem Durchmeſſer EA zugeordnet iſt.

264 §.

Alle durch die Mitte C des Durchmeſſers EA laufende Sehnen der Ellipſe und Hyperbel halbiren einander in C, und dieſe beyden Kegelſchnitte haben in C einen Mittelpunct.

Beweis. Wenn ML eine ſolche Sehne iſt, und man zieht MP ♯ OG, ſo hat man zwiſchen CP = t, PM = y, die Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(pp - tt)$, die auch für die Hyperbel gilt, wenn man qq negativ annimmt. Setzt man ferner den Winkel EPM = ζ, ECM = γ, und CM = z, ſo hat man wie im 65. §.

$$y = \frac{z \sin\gamma}{\sin\zeta},\quad t = \frac{z \sin(\zeta+\gamma)}{\sin\zeta},$$ und dieſe

Werthe in die Gleichung zwiſchen t und y geſetzt geben, wie im 65 §.

$$z = \pm \frac{pq \sin\zeta}{\sqrt{(p^2 \sin\gamma^2 \pm q^2 \sin(\zeta+\gamma)^2)}}.$$ Daraus

aus folgt, daß allemahl CM = CL ſey, auch wenn man die Formul dadurch auf die Hyperbel anwendet, daß man $-qq$ ſtatt $+qq$ ſchreibt. Alsdenn hat man $z = \pm \frac{pq\sqrt{-1}}{\sqrt{(p^2 \sin\gamma^2 - qq.\sin(\zeta+\gamma)^2)}}$

oder $z = \pm \frac{p.q}{\sqrt{(q^2 \sin(\zeta+\gamma)^2 - p^2 \sin\gamma^2)}}$;

und obgleich beyde Werthe von z, oder CM und CL, unmöglich werden, wenn $q^2 \sin(\zeta+\gamma)^2 < p^2 \sin\gamma^2$ iſt; ſo bleiben doch beyde gleich groß. Demnach halbiren alle Sehnen, die durch C laufen, wie LM, in der Ellipſe und Hyperbel, einander in eben dem Punct C, und dieſer iſt nicht allein in jeder Ellipſe, ſondern auch in jeder Hyperbel ein Mittelpunct. (66. §.)

Mit der Parabel hat es zwar eine andre Bewandniß, weil man ihren Durchmeſſer nicht halbiren kann: indeſſen kann man doch in einem gewiſſen Verſtande ſagen, daß auch die Parabel einen Mittelpunct habe, der aber vom Anfangspunct E ihres Durchmeſſers unendlich weit entfernt iſt. Es ſey BD eine Sehne durch den Mittelpunct C, und EZ auf BD ſenkrecht. Man nehme an, daß nun in der Ellipſe der Durchmeſſer EA wachſe, mithin der Mittelpunct C nach A weiter hinaus rücke, ſo wird der Winkel ECB abnehmen, CEZ aber wachſen, wenn EZ einerley, und CZE = 90° bleibt. Für die Ellipſe hat man nun $yy = \frac{2qq}{p}x - \frac{qq}{pp}xx$, EP = x, PM = y geſetzt,

und

und $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L}$, $\frac{qq}{pp} = \frac{b^2-r^2}{L^2}$.

Wenn ψ wächſt und b abnimmt (258 §.), ſo wächſt $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2-r^2}$, und zugleich $\frac{qq}{p}$, aber $\frac{qq}{pp}$ nimmt ab, mithin wächſt y für jede Abſciſſe x, und die Aeſte EH, EM, der Ellipſe erweitern ſich. Wird $b=r$, ſo ſchlieſſen ſich dieſe Aeſte gar nicht mehr gegen A zu, aus der Ellipſe wird die Parabel, der Winkel ECB verſchwindet, und CEZ wird $=90°$, mithin wird BC mit EC parallel.

100 F. Wenn demnach EC (100 Fig.) ein Durchmeſſer der Parabel iſt, und man ziehet BC mit EC parallel, ſo iſt es ſo viel, als wenn man eine Sehne durch ihren unendlich weit entfernten Mittelpunct ziehet. Uebrigens wird ſich bald umſtändlicher ergeben, daß alle mit dem Durchmeſſer einer Parabel parallel laufende Linien auch noch andre Eigenſchaften mit denjenigen Sehnen der Ellipſe gemein haben, die durch ihren Mittelpunct laufen: deswegen kann man allgemein ſagen, daß jeder Kegelſchnitt einen Mittelpunct habe.

Weil die Ellipſe zwey zuſammen gehörige Durchmeſſer EA und OG hat; und die Parabel als die letzte unter allen Ellipſen zu betrachten iſt, die im Kegel zum Vorſchein kommen, wenn b kleiner und zuletzt $=r$ wird; ſo kann man auch ſagen, daß jeder Kegelſchnitt zwey zuſammen gehörige Durchmeſſer habe, die aber für die Parabel beyde un=

unendlich groß ſind. Denn es wird nicht allein $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2-r^2}$, ſondern auch $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$ unendlich groß, wenn $b=r$ wird, wobey jedoch zu bemerken iſt, daß die Gränze des Verhältniſſes $\frac{p}{q}$, wenn beyde Glieder ohne Aufhören wachſen, nicht endlich, ſondern unendlich groß ſey, weil $\frac{p}{q} = \frac{L}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$ war; mithin iſt die Parabel als eine Ellipſe zu betrachten, wovon beyde zuſammen gehörige Durchmeſſer unendlich groß, und ihr Verhältniß gegen einander ebenfalls unendlich, nemlich $\frac{p^2}{q^2} = \infty$, und umgekehrt $\frac{q^2}{p^2} = 0$ iſt.

Wenn auf der perſpectiviſchen Tafel das Bild des Kreiſes eine Ellipſe oder eine Hyperbel wird, ſo muß der Mittelpunct der Projection vom Bilde des Mittelpuncts des abgebildeten Kreiſes, wie es auch in dem beſondern Fall des 66 §. bereits bemerkt iſt, allemahl wohl unterſchieden werden. In der 102. Fig. iſt f der Mittelpunct der Projection, und c das Bild des Mittelpuncts des abgebildeten Kreiſes. Beyde Puncte liegen in demjenigen Durchmeſſer der Projection, welcher die mit der Fundamentallinie des Schnitts oder der Tafel parallelen Ordinaten halbirt, deſſen Lage auf der Tafel oder der Ebene des Schnitts allemahl bekannt iſt.

Auf der perſpectiviſchen Tafel iſt $TF = f$, als der Abſtand des Mittelpuncts des abzubildenden Krei-

Kreiſes von der erſten Verticalfläche, allemahl gegeben, und für den Winkel $TFr = \zeta$ hat man $\tan \zeta = \frac{a \operatorname{coſec} \psi}{f}$, da dann a die Höhe des Auges über der Ebene des abzubildenden Kreiſes iſt. Weiter hat man für das Bild c des Mittelpuncts C auch $Fc = \frac{\delta . L}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta}$, und es iſt D der ſenkrechte Abſtand des Auges von der Tafel, δ der Abſtand des Mittelpuncts C von der Fundamentallinie. Für den Abſtand der Endpuncte a und e des Durchmeſſers von dem Punct F hat man $Fa = \frac{(\delta - r) L}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta - r}$ und $Fe = \frac{(\delta + r) L}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta + r}$: alſo findet man für den Mittelpunct f der Projection $Ff = \frac{1}{2}(Fa + Fe)$ oder

$$Ff = \left(\frac{\delta - r}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta - r} + \frac{\delta + r}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta + r} \right) . \tfrac{1}{2} L$$

d. i. $Ff = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)\, \delta - r^2}{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2 - r^2} . L.$

In eben dieſer Zeichnung iſt kl ein dem Durchmeſſer ae zugeordneter Durchmeſſer; und wenn kl die Linie des Auges Tr in H ſchneidet; ſo kann die Stelle des Mittelpuncts f der Projection auch durch TH, und Hf beſtimmt werden, da dann THf ein rechter Winkel iſt. Weil nemlich Hf und TF mit einander parallel ſind, ſo hat man $Fr : Ff = Tr : TH$,

und

und $Fr : fr = TF : Hf$, und das giebt $TH = \frac{Ff}{Fr} \cdot Fr$, ſo wie $Hf = \frac{fr}{Fr} \cdot TF$. Es iſt aber der Werth von Ff kurz vorhin gefunden, und $Tr = a \operatorname{coſec} \psi$, $Fr = L$, demnach wird

$$TH = \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)\delta - r^2}{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2 - r^2} \cdot a \operatorname{coſec} \psi.$$

Ueberdem iſt $fr = Fr - Ff$, alſo

$$fr = \left(1 - \frac{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)\delta - r^2}{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2 - r^2}\right) \cdot L, \text{ oder}$$

$$fr = \frac{D \operatorname{coſec} \psi (D \operatorname{coſec} \psi + \delta)}{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2 - r^2} \cdot L:$$

mithin findet man

$$Hf = \frac{D \operatorname{coſec} \psi (D \operatorname{coſec} \psi + \delta)}{(D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2 - r^2} \cdot f.$$

265. §.

Man kann in allen dieſen Formuln, um ſie deſto mehr abzukürzen, auch b ſtatt $D \operatorname{coſec} \psi + \delta$ ſchreiben, da dann, wenn die Figur als Projection des Kreiſes betrachtet wird, folgende Gröſſen: D, δ, a, f, r, ψ, gegeben ſeyn müſſen. Betrachtet man aber die Figur als Kegelſchnitt, und nimmt die Abmeſſungen des Kegels mit denjenigen Gröſſen als gegeben an, welche die Lage der Ebene des Schnitts gegen die Neigungs-Ebene der Axe des Kegels und ſeine Grundfläche beſtimmen, ſo ſind folgende Gröſſen gegeben: r, c, β, als die Abmeſſungen des Kegels, und e, η, ψ, für die Ebene des Schnitts, oder auch $\delta = e \sin \eta$, und $\alpha = 90° - \eta$ ſtatt e und η. Uebri-

Uebrigens hat man

für die Projection des Kreiſes

$$\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{a\,\mathrm{coſec}\,\psi}{f}$$

$$L = \sqrt{(a^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2 + f^2)}$$

$$= f\,\mathrm{ſec}\,\zeta$$

$$= a\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta$$

$$b = D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta$$

für den Kegelſchnitt

$$\mathrm{tang}\,\zeta = \mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{ſec}\,\eta\,\mathrm{coſec}\,\psi$$

$$L = c\sqrt{(\mathrm{ſin}\,\beta^2\,\mathrm{coſec}\,\psi^2 + \mathrm{coſ}\,\beta^2\,\mathrm{coſ}\,\eta^2)}$$

$$= c\,.\,\mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{coſ}\,\eta\,\mathrm{ſec}\,\zeta$$

$$= c\,.\,\mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta$$

$$b = c(\mathrm{ſin}\,\beta\,\mathrm{cot}\,\psi + \mathrm{coſ}\,\beta\,\mathrm{ſin}\,\eta).$$

Die allgemeine Gleichung bleibt $y^2 = \frac{q^2}{p^2}(2p - xx)x$ für den Coordinatenwinkel ζ, und den Neigungswinkel ψ der Tafel oder der Ebene des Schnitts gegen die Grundfläche, und man findet leicht $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$, $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$, $\frac{q^2}{p^2} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$, $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L}$. Für die Stelle des Mittelpuncts f hat man $Ff = k$ (68. 264. §.) $= \frac{b\delta - r^2}{b^2 - r^2}\,.\,L$, oder auch

$$TH = \frac{b\delta - r^2}{b^2 - r^2} \cdot \frac{L}{\mathrm{coſec}\,\zeta},\; Hf = \frac{b.(b-\delta)}{b^2 - r^2} \cdot \frac{L}{\mathrm{ſec}\,\zeta}.$$

Für die Stellen der Scheitelpuncte des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers aber

iſt

iſt $Fa = \frac{(\delta - r)L}{b - r}$, und $Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r}$: für die Projection c des Mittelpuncts C hat man $Fc = \frac{\delta . L}{b}$. Wenn für den Kegelſchnitt δ und α gegeben ſind, ſo hat man $\eta = 90° - \alpha$, ſind aber e und η gegeben, ſo hat man $\delta = e \sin\eta$. Statt $\delta = CF$, könnte auch der Abſtand Cc desjenigen Puncts der Axe des Kegels vom Mittelpunct der Grundfläche gegeben ſeyn, worin dieſe Axe von der Ebene TVXY geſchnitten wird. Alsdenn hat man

$$Cc = \frac{GW . \sin CWc}{\sin(CWc + \beta)} = \frac{CW \operatorname{tang} CWc}{\operatorname{tang} CWc . \cos\beta + \sin\beta}.$$

Aber im körperlichen Dreyeck, deſſen Spitze W iſt, und deſſen Seitenflächen CWc, $CWF = \eta$, FWc ſind, iſt der Winkel an $CW = 90°$, der Winkel an $WF = \psi$, alſo $\operatorname{tang} CWc = \sin\eta \operatorname{tang}\psi$. (538 Geom. n. II) Wenn demnach $Cc = \triangle$ geſetzt wird, ſo hat man $\triangle = \frac{e \sin\eta \operatorname{tang}\psi}{\sin\eta \operatorname{tang}\psi \cos\beta + \sin\beta}$,

oder $\triangle = \frac{\delta \operatorname{tang}\psi}{\sin\eta \operatorname{tang}\psi \cos\beta + \sin\beta}$, mithin

$\delta = \triangle(\sin\eta \cos\beta + \sin\beta \cot\psi)$.

Die orthographiſche Projection des Kreiſes kommt mit dem Cylinderſchnitt überein, und man wendet die allgemeinen Formuln auch auf dieſen Fall leicht an, wenn man c, mithin b, und L unendlich groß ſetzt. Die allgemeine Gleichung bleibt

$yy = \frac{qq}{pp}(2p-x)x$, für den Coordinatenwinkel ζ deſſen Tangente $= \tang \beta \sec \eta \cosec \psi = \tang \beta \cosec \alpha \cosec \psi$, und man hat überdem $p = \frac{r.L}{b}$,

d. i. $p = \frac{r \cos \beta \cos \eta \sec \zeta}{\sin \beta \cot \psi + \cos \beta \sin \eta}$, oder

$p = \frac{r \sin \beta \cosec \psi \cosec \zeta}{\sin \beta \cot \psi + \cos \beta \sin \eta}$, wie im 255 §, $q = r$,

$\frac{q^2}{p^2} = \frac{b^2}{L^2}$; ferner wird $Ff = k = \frac{\delta}{b} . L$,

die Beſtimmungen TH und Hf aber laſſen ſich nicht brauchen, weil Tr von F unendlich weit wegrückt, da dann ſtatt der Verticalfläche des Auges eine andre Verticalfläche für die erſte angenommen wird, wie dazu im 228. u. f. §. §. die Anleitung iſt gegeben worden. Nimmt man nun Tr für den Durchſchnitt einer ſolchen Verticalfläche mit der Tafel, oder der Ebene des Schnitts und TF $= \Delta$ an; ſo hat man $TH = Ff \sin \zeta = \frac{\delta . L \sin \zeta}{b} = \frac{\delta . L}{b . \cosec \zeta}$, (welches auch die allgemeine Formul für TH giebt, b unendlich groß geſetzt) und $Hf = \Delta - Ff . \cos \zeta$ $= \Delta - \frac{\delta . L \cos \zeta}{b} = \Delta - \frac{\delta . L}{b \sec \zeta}$. (die allgemeine Formul würde $Hf = \frac{L}{\sec \zeta}$ unendlich

groß

groß geben, wie der Vorausſetzung nach nicht anders ſeyn kann.)

Zu bemerken iſt hiebey noch, daß $Fc = \frac{\delta . L}{b} = Ff$ wird, mithin fallen bey der orthographiſchen Projection die Puncte c und f zuſammen, wie der Natur dieſer Projectionsart gemäß iſt. Subſtituirt man die Werthe von b und L, ſo findet man

$$Ff = Fc = \frac{\delta . \cos\beta \cos\eta \sec\zeta}{\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta} = \frac{\delta . \tang\alpha \sec\zeta}{1 + \tang\beta \sec\alpha \cot\psi},$$

oder auch $\sin\alpha \sin\psi \tang\zeta$ ſtatt $\tang\beta$ geſetzt, $Ff = Fc = \frac{\delta . \tang\alpha \sec\zeta}{1 + \tang\alpha \tang\zeta \cos\psi}$. (Man vergleiche den 229. §.) Weil übrigens auch $L = c \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta$ iſt, ſo hat man auch

$$Ff = \frac{\delta \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta}{\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta}$$

$$= \frac{\delta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta}{\cot\psi + \cot\beta \sin\eta}.$$

Eine durch c mit der Grundlinie der Tafel parallel laufende Sehne der Projection iſt das Bild desjenigen Durchmeſſers des abgebildeten Kreiſes ANEM, der mit der Tafel parallel iſt: der Durchmeſſer kl der Projection aber, welcher dem in den Augenpunct laufenden Durchmeſſer ae zugeordnet iſt, bildet keine Durchmeſſer des Kreiſes ANEM ab, ſondern eine mit der Grundlinie der Tafel parallele 102 F.

Sehne kl, die ſo gefunden wird. Man verlängere CF nach g, mache $Fg = D\,coſec\,\psi$ und ziehe durch g ein Paar Tangenten des abzubildenden Kreiſes, gK, gL, ſo iſt die Sehne KL auf CF ſenkrecht, alſo mit der Grundlinie der Tafel parallel, und eben dieſe Sehne KL iſt die geſuchte: wenn ſie den auf der Grundlinie der Tafel ſenkrechten Durchmeſſer CA in Π ſchneidet, ſo iſt der Mittelpunct π der Projection das Bild von Π.

Es iſt nemlich $Cg : CK = CK : C\Pi$, alſo $C\Pi = \frac{CK^2}{Cg} = \frac{r^2}{D\,coſec\,\psi + \delta}$, und $A\Pi = r - C\Pi = r - \frac{r^2}{D\,coſec\,\psi + \delta}$. Um das Bild ap von einer unbeſtimmten Abſciſſe AP zu finden, muß man dem 100. §. gemäß $ap = \frac{D\,coſec\,\psi \,.\, L \,.\, AP}{(D\,coſec\,\psi + FA)\,(D\,coſec\,\psi + FA + AP)}$ nehmen,

od. $ap = \frac{D\,coſec\,\psi \,.\, L \,.\, AP}{(D\,coſec\,\psi + \delta - r)\,(D\,coſec\,\psi + \delta - r + AP)}$.

Man nehme nun $AP = A\Pi = r - \frac{r^2}{D\,coſec\,\psi + \delta}$,

ſo hat man $\frac{D\,coſec\,\psi \,.\, L \,.\, AP}{D\,coſec\,\psi + \delta - r} = \frac{D\,coſec\,\psi \,.\, L}{D\,coſec\,\psi + \delta - r}$

$\cdot \frac{(D\,coſec\,\psi + \delta - r)\,r}{D\,coſec\,\psi + \delta} = \frac{r \,.\, D\,coſec\,\psi \,.\, L}{D\,coſec\,\psi + \delta}$.

Das mit $D\,coſec\,\psi + \delta - r + AP = D\,coſec\,\psi + \delta$ —

$$-\frac{r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}=\frac{(D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2-r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}$$

dividirt, giebt $ap=\frac{r.D\operatorname{coſec}\psi.L}{(D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2-r^2}$, und das iſt die Formul für $p=af$, wenn f der Mittelpunct der Projection iſt.

Für das Bild pm der Halb-Sehne PM hat man $\frac{D\operatorname{coſec}\psi.PM}{D\operatorname{coſec}\psi+FP}=\frac{D\operatorname{coſec}\psi.PM}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta-r+AP}$.

Wenn aber $AP=A\Pi=r-\frac{r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}$ genommen wird, ſo iſt $PM=\Pi K=\sqrt{A\Pi.E\Pi}=\sqrt{\left(r-\frac{r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}\right)\left(r+\frac{r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}\right)}$

$=\frac{r\sqrt{((D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2-r^2)}}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}$, und dieſe Vorausſetzung giebt $D\operatorname{coſec}\psi.PM=\frac{rD\operatorname{coſec}\psi}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}\sqrt{((D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2-r^2)}$, ſo wie $D\operatorname{coſec}\psi+\delta-r+AP=D\operatorname{coſec}\psi+\delta-\frac{r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}$

$=\frac{(D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2-r^2}{D\operatorname{coſec}\psi+\delta}$. Wird nun jener Ausdruck durch dieſen dividirt, ſo erhält man $pm=\frac{r.D\operatorname{coſec}\psi}{\sqrt{((D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2-r^2)}}$, und das iſt

die Formul für $q=fk=fl$, oder für die Hälfte des mit der Grundlinie der Tafel parallel laufenden Durchmeſſers der Projection.

Hierauf gründet ſich folgende Art, die Projection zu zeichnen. Man ſuche die Bilder a, f, e, der Puncte A, Π, E, durch f ziehe man kl mit der Grundlinie parallel, und mache $fk=fl$ ſo viele verkürzte Fuſſe lang, als $\Pi K=\Pi L$ geometriſche Fuſſe faſſet, ſo hat man zwey zuſammen gehörige Durchmeſſer der Projection, und kann ſie nach den Regeln des 70. §. zeichnen.

Wenn man aber ſtatt des Bildes f des Puncts Π das Bild c des Puncts C ſucht, ſo kann man die mit der Grundlinie durch c parallel laufende Sehne der Projection ſo viele verkürzte Fuſſe lang machen, als der Halbmeſſer des abzubildenden Kreiſes geometriſche Fuſſe faſſet, und hiernächſt die Projection nach Vorſchrift des 71. §. zeichnen.

266. §.

Wenn man in der 99ſten und 102ten Figur annimmt, daß der Winkel $BCO=\beta$ wachſe, ſo nimmt $CS=c.\cos\beta$ ab, und eben ſo $SG=TF=f=c.\cos\beta\cos\eta$, der Punct S rückt gegen C, und T gegen F zu. Wird nun $BCO=\beta=90°$, ſo wird der Kegel ein grader Kegel, der Punct S fällt in C, ſo wie T in F, und man erhält $f=c.\cos\beta\cos\eta=0$, weil $\cos\beta=0$ wird, ſo wie $b=c\cot\psi$ und $a=c$. (254 §.) Weil nunmehro jede Ebene durch die Axe des Kegels, als ihre Neigungsebene gegen die Grundfläche anzuſehen iſt, ſo bleibt der Winkel $\eta=CWF$ unbeſtimmt, und wird auch in den Formuln weiter

nicht

nicht gebraucht: die Neigungsebene des Schnitts OSTR gegen die Grundfläche des Kegels geht nun zugleich durch ſeine Axe OC, die jetzt mit OS einerley iſt, und wird zugleich die Neigungsebene der Axe gegen die Ebene des Schnitts, wie man ſich in der 104. Fig. am deutlichſten vorſtellt, wo der Fall des graden Kegels beſonders gezeichnet iſt. Der Winkel $\alpha = 90° - \eta$ wird ebenfalls zur Beſtimmung der Lage der Ebene des Schnitts im Kegel nicht weiter gebraucht, weill dieſe nunmehro durch $\delta =$ CF oder CT und den Winkel ψ zulänglich beſtimmt iſt. Weil ferner allemahl $\tang \zeta = \tang \beta \sec \eta \operatorname{cosec} \psi$ iſt, ſo wird $\zeta = 90°$ wenn $\beta = 90°$ und der Kegel grade iſt; und weil $L = f . \sec \zeta = a \operatorname{cosec} \psi \operatorname{cosec} \zeta = c \sin \beta \operatorname{cosec} \psi \operatorname{cosec} \zeta$ war, ſo erhält man $L = a \operatorname{cosec} \psi = c . \operatorname{cosec} \psi$. Setzt man dieſe Werthe in die allgemeinen Formuln $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$,

$$q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2 - r^2)}},$$

$$\frac{qq}{pp} = \frac{b^2 - r^2}{L^2};$$

ſo hat man für den Schnitt des graden Kegels

$$p = \frac{r(c.\cot\psi - \delta)c.\operatorname{cosec}\psi}{c^2 \cot\psi^2 - r^2}$$

$$q = \frac{r(c.\cot\psi - \delta)}{\sqrt{(c^2 \cot\psi^2 - r^2)}};$$

$$\frac{qq}{pp} = \frac{c^2 \cot\psi^2 - r^2}{c^2 \operatorname{cosec}\psi^2};$$

 und

und wenn f der Mittelpunct des Kegelſchnitts iſt, ſo hat man $Ff = \frac{\delta . c . \cot\psi - r^2}{c^2 \cot\psi^2 - r^2} . c . \operatorname{coſec}\psi$.

Auch wird $Fa = \frac{(\delta - r) c . \operatorname{coſec}\psi}{c . \cot\psi - r}$,

und $Fe = \frac{(\delta + r) c . \operatorname{coſec}\psi}{c . \cot\psi + r}$.

Demnach wird der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem $c^2 \cot\psi^2 >=$ oder $< r^2$ iſt. Weil übrigens $\frac{qq}{p} = \frac{r(c \cot\psi - \delta)}{c . \operatorname{coſec}\psi}$ wird, ſo hat man für die Parabel aus dem graden Kegel $yy = \frac{2r(r - \delta)}{c . \operatorname{coſec}\psi} x$. Ferner hat man

$$p = \frac{c . \operatorname{coſec}\psi}{\surd(c^2 \cot\psi^2 - r^2)} . q, \quad \text{oder}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\surd(\operatorname{coſ}\psi^2 - \frac{r^2}{c^2} \sin\psi^2)},$$ und für die

Ellipſe iſt $c^2 . \cot\psi^2 > r^2$, alſo $\operatorname{coſ}\psi^2 > \frac{r^2}{c^2} \sin\psi^2$,

mithin $\surd(\operatorname{coſ}\psi^2 - \frac{r^2}{c^2} \sin\psi^2) < 1$ und $\frac{p}{q}$ gröſſer als 1, oder $p > q$. Weil aber $\zeta = 90°$, ſo ſind hier p und q ein Paar Haupt-Durchmeſſer, *ea* iſt die Zwergaxe der Ellipſe, und der mit TV parallele Durchmeſſer die zugeordnete Axe.

267. §.

Man drücke nun die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt im 256. §. ſo aus,

$$yy = \frac{2qq}{p} x - \frac{2qq}{p} \cdot \frac{xx}{2p};$$

ſo hat man $2p : 2q = 2q : \frac{2qq}{p}$: mithin iſt $\frac{2qq}{p}$ die dritte Proportionallinie zu demjenigen Durchmeſſer, auf welchem die Abſciſſen genommen werden, und dem ihm zugeordneten Durchmeſſer. Dieſe Linie heiſt der **Parameter** desjenigen Durchmeſſers, auf welchem man die Abſciſſen nimmt. Wenn alſo $\frac{2qq}{p} = g$, geſetzt wird, ſo hat man für jeden Kegelſchnitt die allgemeine Gleichung

$$yy = gx - \frac{g}{2p} xx,$$

und $g = \frac{2r(b-\delta)}{L}$, vorausgeſetzt, daß der Coordinaten-Winkel $= \zeta$ ſey, und $\tang \zeta = \tang \beta \sec \eta \operatorname{coſec} \psi$. Für die Ellipſe leidet dieſe Gleichung weiter keine Aenderung, wenn man vorausſetzt, daß $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$, und $b > r$ ſey: und wenn für die Hyperbel $p = \frac{r(b-\delta)L}{r^2 - b^2}$, in der Vorausſe-

ẓung, daß $r > b$ ſey, angenommen wird, ſo erhält man für die Hyperbel $yy = gx + \frac{gxx}{2p}$. Für die Parabel aber hat man $yy = gx$.

Ueber die beſondern Fälle, wenn $b = \delta$, oder $b < \delta$ iſt, mithin der Parameter $g = \frac{2r(b-\delta)}{L}$ verſchwindet, oder negativ wird, ſind ſchon im 257 §. umſtändliche Betrachtungen angeſtellet worden. Weil zugleich $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$ verſchwindet, oder negativ wird, (es wäre denn $\delta = r$) ſo kann man von demjenigen, was über dieſe Fälle im 257 §. ſchon geſagt iſt, hier ſehr leicht Anwendungen machen. Es wird $\frac{g}{2p} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$, und dieſer Ausdruck verſchwindet nicht mit $b - \delta$, ohne nur in dem Fall, wenn zugleich $r = \delta$, mithin auch $b = r$, und der Schnitt eine Parabel iſt, die ſich nun in eine grade Linie verwandelt. Iſt $b > r$, mithin der Schnitt eine Ellipſe, ſo verwandelt ſich ſelbige in einen Punct, wenn $b = \delta$, mithin $g = 0$ iſt, und ihre Gleichung wird $yy = -\frac{g}{2p}xx$. Iſt $b < r$, mithin der Schnitt eine Hyperbel, ſo wird ihre Gleichung dieſe ſeyn: $yy = \frac{g}{2p}xx$, und ſie verwandelt ſich in zwo grade Linien, die einander in der Spiẓe des Kegels ſchneiden.

Ueber-

Ueberhaupt giebt $b = \delta$, oder $g = 0$ allemahl einen Schnitt durch die Spitze des Kegels; die Fälle aber, wenn $b - \delta$, mithin g und zugleich p negativ wird, zeigen nur an, daß der Kegelſchnitt die umgekehrte Lage hat. In der Ellipſe und Parabel liegt alsdenn ea nicht auf der Seite des Puncts e, wo man anfangs die poſitiven Abſciſſen ep angenommen hat, alle den poſitiven Abſciſſen zugehörige Ordinaten ſind nun unmöglich, alle den negativen zugehörige ſind in der Parabel möglich, und in der Ellipſe ſo lange bis $ep = -ea$ wird, wie wenn man in der 100ſten und 101ſten Fig. die Abſciſſen ep als poſitive und EP als negative betrachten wollte. In der Hyperbel (103 Fig.) wäre dies ebenfalls der Fall, wenn man die poſitiven Abſciſſen von E nach A nehmen wollte, das hieſſe, zugleich den Durchmeſſer EA der den Abſciſſen EP entgegen geſetzt iſt, poſitiv annehmen, und ſo wäre $\frac{-2qq}{+p} = -g$, oder der Parameter negativ. Die Gleichungen für die Parabel, Ellipſe, und Hyperbel wären nun folgende

$$yy = -gx$$

$$yy = -gx - \frac{g}{2p}xx$$

$$yy = -gx + \frac{g}{2p}xx.$$

Am gewöhnlichſten aber kommen ſie unter der Form vor, daß g und p poſitiv ſind, nemlich

für die Parabel

$$yy = gx,$$

für

für die Ellipſe

$$yy = gx - \frac{g}{2p} xx,$$

für die Hyperbel

$$yy = gx + \frac{g}{2p} xx.$$

268. §.

Der Parameter des Durchmeſſers der Parabel iſt die dritte Proportionallinie zu jeder Abſciſſe, und der zugehörigen Semiordinate; oder das Rechteck unter dem Parameter und jeder Abſciſſe iſt dem Quadrat der zugehörigen Semiordinate gleich. In der Ellipſe iſt dies Rechteck kleiner, und in der Hyperbel gröſſer, als das Quadrat der Semiordinate, und eben von dieſer Eigenſchaft einer jeden der dreyen Hauptarten der Kegelſchnitte haben die alten Griechiſchen Geometer ihre Nahmen hergenommen. Archimedes, der etwa funfzig Jahr ſpäter als Euclides in der Mitte des dritten Jahrhunderts vor Chriſti Geburt berühmt war, und die Euclidiſche Geometrie mit wichtigen Erfindungen in der Lehre vom Kreiſe (146-150 §. Geom.) und von der Kugel (389-394. 624. 625. 617-621 §. Geom.) bereichert hat, kannte ſchon die Parabel, denn er hat ein Buch de quadratura parabolæ geſchrieben. Der vornehmſte hieher gehörige Schriftſteller aber unter den alten Griechiſchen Geometern iſt Apollonius aus Pergen, einer Stadt in Pamphilien, woſelbſt er um die Mitte des dritten Jahrhunderts vor Chriſti Geburt gebohren iſt. Er ward gegen das Ende des erwehnten Jahrhunderts berühmt, und hat acht

Bücher de Sectionibus Coni geſchrieben. Weitere Nachrichten von ihm, und den Schickſalen dieſes Werks von den Kegelſchnitten giebt Montucla in der Hiſtoire des Mathematiques Tom. I. pag. 256-266, die man auch in der Einleitung zur Mathematiſchen Bücherkenntniß, III. Stück, Breslau 1771 im Auszuge leſen kann.

269. §.

So allgemein, wie ich bisher die Kegelſchnitte betrachtet habe, findet man dieſe Theorie, bey unſern neuern Schriftſtellern, die ſpäter als l'Hopital im Traité des Sections Coniques, a Paris 1720 und Hauſen in den Elementis Matheſeos Lipſ. 1734. darüber geſchrieben haben, faſt gar nicht mehr abgehandelt. Gewöhnlich legt man eine andre von den unten zu beweiſenden Eigenſchaften der Ellipſe, Parabel und Hyperbel zum Grunde, oder nimmt gleich anfangs mit dem Hn. von Wolff Gleichungen für dieſe Linien an: beyläufig und etwa um den Redegebrauch zu beweiſen, vermöge deſſen ſie den allgemeinen Nahmen der Kegelſchnitte führen, wird alsdenn gewieſen, wie ſie aus dem graden Kegel geſchnitten werden können. Allein die Betrachtung dieſer Linien als ſolcher, die nicht allein aus dem graden, ſondern auch aus dem ſchiefen Kegel geſchnitten werden können, hat in vielen Fällen der Ausübung ihren Nutzen, wovon ihr Gebrauch in der Perſpectiv nun ſchon ein einleuchtendes Beyſpiel giebt. Weil die Perſpectiv im Grunde eine geometriſche Wiſſenſchaft iſt, ſo habe ich kein Bedenken getragen, die erſten Gründe der Theorie der Kegelſchnitte damit zu verbinden, zumahl da ſie in den Optiſchen

und Aſtronomiſchen Wiſſenſchaften ſo häufig als Projectionen des Kreiſes vorkommen. Zugleich zeuget dieſe Theorie, ſo wie ich ſie hier vorgetragen habe, wiederum von der ungemeinen Brauchbarkeit der allgemeinen Gründe der Perſpectiv, die ſo wenig bekannt zu ſeyn ſcheinen.

Hr. Euler betrachtet in der Introd. in Anal. Infinit. Tom. II. Append. Cap. III. zwar die Schnitte des ſchiefen Kegels: allein der Begrif vom ſchiefen Kegel, welchen er bey ſeiner Analyſi zum Grunde nimmt, iſt von demjenigen verſchieden, welchen man ſonſt mit dem Euclides und Apollonius annimmt. (366. §. Geom.) Er nennt nemlich einen ſchiefen Kegel denjenigen, deſſen Grundfläche eine Ellipſe, und deſſen Axe auf der Ebene dieſer Ellipſe im Mittelpunct ſenkrecht iſt, deſſen Oberfläche übrigens ſo beſchaffen iſt, daß jeder parallele Schnitt mit der Grundfläche eine Ellipſe giebt, die gleichfalls ihren Mittelpunct in der Axe des Kegels hat. (a. a. O. 68. §. 356. S.) Unter dieſem Begrif ſind nicht alle Apollonianiſche ſchiefe Kegel enthalten, weil es ſchiefe Kegel giebt, wovon die ſenkrechten Schnitte durch die Axe Kreiſe ſind. Der vom Hn. Euler ſo genannte ſchiefe Kegel gehört ſchon in die Claſſe einer andern Art geometriſcher Körper, die zwar wegen der Aehnlichkeit mit dem Apollonianiſchen den Nahmen eines Kegels führen können: aber alsdenn erweitert man ſchon dieſen Begrif auf ſolche Körper, deren krumme Oberfläche mit der eigentlichen Kegelfläche nur dieſe Aehnlichkeit hat, daß alle grade Linien, die ganz in dieſer Oberfläche liegen, ſich in einerley Punct, der die Spitze heiſt, ſchneiden, übrigens

gens aber alle durch den Umfang einer ebenen von einer krummen Linie eingeſchloſſenen Figur gehen, die eine willkührliche Geſtalt haben kann, da es beym eigentlichen Kegel ein Kreis ſeyn muß. Dieſe Kegelartigen Körper kann man füglich wieder in Claſſen eintheilen nach der verſchiedenen Geſtalt ihrer Grundfläche, und ihnen davon die Nahmen beylegen. Der vom Hn. Euler ſo genannte ſchiefe Kegel könnte dieſemnach ein **Elliptiſcher Kegel** heiſſen, und dies würde ein **grader** oder **ſchiefer elliptiſcher Kegel** ſeyn, nachdem ſeine Axe auf der Grundfläche ſenkrecht, oder ſchief ſtünde. Ob und in wie weit dieſer elliptiſche Kegel mit dem Apolloniaſchen einerley ſey, würde nun noch eine beſondere Unterſuchung erfordern.

Uebrigens legt Hr. Euler eine allgemeine Theorie von den Schnitten einer Fläche mit einer gegebenen Ebene zum Grunde, woraus auch Hr. Käſtner im III. Theil ſeiner Mathematiſchen Anfangsgründe 276-287 S. die Schnitte des graden Kegels herleitet, mit Beyſeitſetzung des ſchiefen Kegels, wegen der weitläuftigern Rechnung. Ich habe die Unterſuchung aus denſelben allgemeinen Gründen ſchon vor einigen Jahren in einer der Churfürſtl. Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften überreichten Abhandlung ganz allgemein für den ſchiefen Kegel angeſtellt, ohne daß meine Formuln ſo gar weitläuftig gerathen wären: man muß nur die bequemſte Gleichung für die Kegelfläche zum Grunde legen. Hier ſchien mir die Betrachtung dieſer Schnitte, wie ich ſie bisher angeſtellet habe, deswegen angenehm und nützlich zu ſeyn, weil einerley ganz kurze leicht

zu überſehende Formuln dienen können, man mag dieſe Figuren als Kegelſchnitte, oder als Projectionen des Kreiſes betrachten wollen. In der Aufgabe des 102. §. habe ich allgemein gewieſen, wie man ſich in jedem Fall verhalten kann, wenn die Projection einer jeden andern vom Kreiſe verſchiedenen krummen Linie geſucht wird; und man wird leicht von ſelbſt die Bemerkung machen, daß nach eben der Aufgabe die Schnitte eines jeden kegelartigen Körpers durch eine ganz kurze und leichte Rechnung gefunden werden können, wenn gleich ſeine Grundfläche kein Kreis iſt. Ich behalte mir vor, von dieſem allgemeinen Problem unten noch einige andre Anwendungen zu machen.

Der XVI. Abſchnitt.

Von den Durchmeſſern der Kegelſchnitte.

270 §.

Jeder Kegelſchnitt hat unter den Sehnen, die durch ſeinen Mittelpunct laufen, ein Paar Haupt-Durchmeſſer, die einander ſenkrecht ſchneiden.

Beweis.

Beweis. Für die Ellipſe und Hyperbel ſetze man, wie im 261. §. CP$=t$, PM$=$P$n=y$, ſo hat man für die Ellipſe und Hyperbel überhaupt 101F

$yy=\frac{qq}{pp}(pp-tt)$. Man ziehe einen andern Durchmeſſer DB durch C, der den vorigen AE unter dem Winkel ECB$=\gamma$ ſchneidet, und laſſe auf denſelben MQ ſenkrecht herabfallen. Wenn nun CB und PM einander in S unter dem Winkel CSP$=\delta$ ſchneiden, ſo ſind im Dreyeck CPS die Winkel bekannt, wenn δ oder γ bekannt iſt. Es iſt nemlich CPM $=180°-\zeta$ und $\zeta=\delta+\gamma$, wenn demnach einer von den Winkeln δ und γ bekannt iſt, ſo kann der andre gefunden werden, weil ζ, p und q als bekannt anzunehmen ſind. Aus der Gleichung zwiſchen CP$=t$, und PM$=y$ kann nun eine andre zwiſchen CQ$=w$ und QM$=z$ für eben die Linie folgendergeſtalt gefunden werden. Im Dreyeck CPS iſt die Seite PS$=\frac{t\sin\gamma}{\sin\delta}$ und CS$=\frac{t\sin\zeta}{\sin\delta}$, im Dreyeck MQS aber iſt SM$=$PM$-$PS$=y-\frac{t\sin\gamma}{\sin\delta}$, QM$=SM\sin\delta$, und SQ$=SM\cos\delta$: alſo hat man $z=y\sin\delta-t\sin\gamma$. Ferner iſt CQ$=CS+$SQ, mithin $w=\frac{t\sin\zeta}{\sin\delta}+y\cos\delta-\frac{t\sin\psi\cos\delta}{\sin\delta}$, und weil $\sin\zeta=\sin(\delta+\gamma)=\sin\delta\cos\gamma+\cos\delta\sin\gamma$, ſo erhält man $w=t\cos\gamma+y\cos\delta$.

von einander zu ſchneiden, und für einzuſchalten.

Dieſe gefundenen Gleichungen für z und w kehre man ſo um, daß man t und y durch w und z ausgedrückt erhalte. Es war nemlich

$$z = y \sin\delta - t \sin\gamma$$
$$w = t \cos\gamma + y \cos\delta;$$

alſo $z \cos\delta = y \sin\delta \cos\delta - t \sin\gamma \cos\delta$ und $w \sin\delta = y \cos\delta \sin\delta + t \cos\gamma \sin\delta$. Die erſte Gleichung von der letzten ſubtrahirt giebt $w \sin\delta - z \cos\delta = t (\sin\delta \cos\gamma + \cos\delta \sin\gamma)$, oder $w \sin\delta - z \cos\delta = t \sin\zeta$, woraus man $t = \frac{w \sin\delta - z \cos\delta}{\sin\zeta}$ erhält.

Weiter iſt $w \sin\gamma = t \sin\gamma \cos\gamma + y \cos\delta \sin\gamma$, und $z \cos\gamma = y \sin\delta \cos\gamma - t \sin\gamma \cos\gamma$; beyde Gleichung zuſammen addirt geben $w \sin\gamma + z \cos\gamma = y (\sin\delta \cos\gamma + \cos\delta \sin\gamma)$, und es wird

$$y = \frac{w \sin\gamma + z \cos\gamma}{\sin\zeta}.$$

Man ſetze $\frac{qq}{pp} = m^2$, und ſubſtituire die gefundenen Werthe für t und y in der Gleichung $yy = m^2 (pp - tt)$, ſo findet man folgende neue Gleichungen zwiſchen w und z:

$$\left.\begin{matrix} \cos\gamma^2 \\ + m^2 \cos\delta^2 \end{matrix}\right\} . z^2 \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \left.\begin{matrix} 2 \sin\gamma \cos\gamma \\ 2 m^2 \sin\delta \cos\delta \end{matrix}\right\} . wz$$
$$\left.\begin{matrix} + \quad \sin\gamma^2 \\ + m^2 \sin\delta^2 \end{matrix}\right\} . w^2 \quad = qq \sin\zeta^2$$

Wenn in dieſer Gleichung der Coefficient von $w . z$, nemlich $2 \sin\gamma \cos\gamma - 2 m^2 \sin\delta \cos\delta = 0$ iſt, ſo wird es eine reine Quadratiſche Gleichung, man mag z oder w als unbekannt anſehen; und in dieſem Fall gehören zu jeder Abſciſſe w zwey gleiche und entgegen geſetzte Werthe von z. Demnach wird die

Seh-

Sehne MN, und jede die mit ihr parallel iſt, von der Axe der Abſciſſen halbirt, und BD iſt ein Durchmeſſer des Kegelſchnitts, der, weil er die mit MN parallelen Sehnen ſenkrecht halbirt, zugleich ein Haupt-Durchmeſſer iſt. Es kann aber der Winkel γ allemahl ſo angenommen werden, daß $2\,\text{ſin}\,\gamma\,\text{coſ}\,\gamma - 2m^2\,\text{ſin}\,\delta\,\text{coſ}\,\delta = 0$ wird; denn dieſe Gleichung giebt $2\,\text{ſin}\,\gamma\,\text{coſ}\,\gamma = 2m^2\,\text{ſin}\,\delta\,\text{coſ}\,\delta$, oder $\text{ſin}\,2\gamma = m^2\,\text{ſin}\,2\delta$. Weil nun $\delta = \zeta - \gamma$ war, ſo erhält man $\text{ſin}\,2\gamma = m^2\,\text{ſin}\,2(\zeta - \gamma)$. Daraus folgt $\text{ſin}\,2\gamma = m^2\,\text{ſin}\,2\zeta\,\text{coſ}\,2\gamma - m^2\,\text{coſ}\,2\zeta\,\text{ſin}\,2\gamma$, und $\text{tang}\,2\gamma = m^2\,\text{ſin}\,2\zeta - m^2\,\text{coſ}\,2\zeta\,\text{tang}\,2\gamma$, alſo $\text{tang}\,2\gamma\,(1 + m^2\,\text{coſ}\,2\zeta) = m^2\,\text{ſin}\,2\zeta$, und es wird $\text{tang}\,2\gamma = \dfrac{m^2\,\text{ſin}\,2\zeta}{1 + m^2\,\text{coſ}\,2\zeta}$. Weil nun p, q, und ζ für den Kegelſchnitt gegeben ſeyn müſſen, ſo beſtimmt dieſe Gleichung, wie groß γ genommen werden müſſe, damit BD ein Hauptdurchmeſſer werde. Hiebey iſt aber merkwürdig, daß dieſe Gleichung einen doppelten Werth für $\text{tang}\,\gamma$ giebt. Setzt man $\dfrac{m^2\,\text{ſin}\,2\zeta}{1 + m^2\,\text{coſ}\,2\zeta} = \dfrac{1}{Z}$, ſo hat man auch $\text{tang}\,\gamma = -\,\text{cot}\,2\gamma \pm \text{coſec}\,2\gamma$ (457. §. G.) und $\text{cot}\,2\gamma = Z$, $\text{coſec}\,2\gamma = \surd(1 + ZZ)$. Wenn nun die poſitive Tangente dem Winkel $\gamma = ECB$ zugehört, ſo gehört die negative zum Winkel $ECB + 90^\circ$, $= ECF$, und FH iſt auch ein Haupt-Durchmeſſer.

Bey der Ellipſe bedarf die zwiſchen w und z gefundene Gleichung weiter keiner Aenderung; will man ſie aber auf die Hyperbel anwenden, ſo ſetzt 103 F.
man vor $m^2 = \dfrac{q^2}{p^2}$ das entgegen geſetzte Zeichen.

Es iſt nemlich in der 103 Fig. CP $= t$, PM $= y$, C$q = w$, $qm = Z$, und der neue Durchmeſſer bd ſchneidet PM in s, den vorigen Durchmeſſer EA aber unter dem Winkel EC$b = \gamma$, da dann CsP $= \delta$, CP$n = \zeta$ iſt. Dieſen Vorausſetzungen gemäß bleiben die vorhin gefundenen Werthe von w und z, und die daraus durch die Umkehrung hergeleiteten von t und y unverändert. Weil nun die Gleichung zwiſchen t und y auf die Hyperbel angewandt wird, wenn man vor m^2 das entgegengeſetzte Zeichen ſetzt, ſo muß auch die zwiſchen w und z gefundene Gleichung für die Hyperbel gelten, wenn in derſelben vor m^2 das entgegen geſetzte Zeichen geſetzt wird.

Soll alſo in der Hyperbel der Durchmeſſer bd die ihm zugehörigen Sehnen eben ſo, wie BD in der Ellipſe, ſenkrecht halbiren, ſo muß wiederum der Coefficient von $w.\,z$, oder

$$2 \sin\gamma \cos\gamma + 2 m^2 \sin\delta \cos\delta = 0$$

ſeyn, mithin $\sin 2\gamma = - m^2 \sin 2\delta$. Für die Ellipſe war $\sin 2\gamma = m^2 \sin 2\delta$, ſoll alſo letztere Gleichung auf die Hyperbel angewandt werden, ſo muß nicht allein m^2, ſondern auch γ negativ genommen werden: wie denn auch die Betrachtung der 103. Fig. ergiebt, daß bd in die Lage BD rücken muß, wenn dieſer Durchmeſſer ſeine Ordinaten Mn ſenkrecht in Q halbiren ſoll. Alsdenn ſchneidet er PM unterhalb P in S, und $\gamma =$ ECB liegt auf der andern Seite des Durchmeſſers CE. Dieſemnach hat man für die Hyperbel $\delta = \zeta + \gamma$, und

$$\tan 2\gamma = \frac{m^2 \sin 2\zeta}{1 - m^2 \cos 2\zeta}.$$ Weil nun dieſe Gleichung für tang 2γ ebenfalls allemahl einen möglichen

Werth,

Werth, und für tang γ zwey Werthe giebt, wozu Winkel gehören, davon einer den andern um 90° übertrift; ſo hat die Hyperbel ebenfalls zwey Haupt-Durchmeſſer, die einander in C ſchneiden.

Um endlich dieſe Rechnung auch auf die Parabel anzuwenden, laſſe man in der Ellipſe EZ auf CB ſenkrecht fallen, und ſetze EZ$=k$; ſo iſt $\sin\gamma = \frac{k}{p}$, mithin $\cos\gamma = \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{p^2}\right)}$.

Dieſe Werthe in die Gleichung $\sin\gamma\cos\gamma = m^2 \sin\delta \cos\delta$ geſetzt geben $\frac{k}{p}\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{p^2}\right)}$

$= \frac{qq}{pp}\sin\delta\cos\delta$, mithin $k\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{p^2}\right)} =$

$\frac{qq}{p}\sin\delta\cos\delta$. Wenn aber p in Vergleichung mit q unendlich groß angenommen wird, ſo wird aus der Ellipſe die Parabel, und der zum Durchmeſſer p gehörige Parameter iſt $\frac{2qq}{p} = g$ (264. 267. §.); mithin wird für die Parabel $k = \frac{1}{2} g \sin\delta\cos\delta$, oder $k = \frac{1}{4} g \sin 2\delta$. Ueberdem war $\zeta = \delta + \gamma$, und hier wird $\gamma = 0$, alſo $\zeta = \delta$, und man erhält $k = \frac{1}{4} g \sin 2\zeta$. Eine grade Linie BC alſo in der Entfernung $k = \frac{1}{4} g \sin 2\zeta =$ EF mit dem Durchmeſſer 100 F.
EC parallel gezogen, iſt ein Hauptdurchmeſſer der Parabel, und alle ſolche Linien ſind als Sehnen anzuſehen, die durch den Mittelpunct der Parabel laufen. (264 §.) Weil für k nur ein Werth gefunden

wird, ſo hat die Parabel nur einen Hauptdurchmeſſer, unter den Linien die mit EC parallel laufen. Dies hebt indeſſen die Allgemeinheit des feſtgeſetzten Satzes ſelbſt nicht auf, weil unter den auf BC ſenkrechten Sehnen ebenfalls diejenige, welche durch den unendlich entfernten Mittelpunct C gehen würde, als eine ſolche anzuſehen iſt, die alle mit BC parallele Sehnen halbirt. Eben das ergiebt die gefundene Gleichung $\tang 2\gamma = \frac{m^2 \sin 2\zeta}{1 + m^2 \cos 2\zeta}$, woraus $\tang 2\gamma = 0$ wird, $m^2 = 0$ geſetzt. Aber eines Winkels, deſſen Tangente $= 0$ iſt, Hälfte kann ſowohl $= 0$, als auch $= 90^\circ$ ſeyn; wie denn auch der eine Werth von $\tang \gamma = 0$, der andre unendlich groß wird.

Man kann die erwieſene Eigenſchaft der Parabel aus der für ſie gehörigen Gleichung auch folgender Geſtalt herleiten. Man ſetze Mq auf EC ſenkrecht, ziehe BC mit EC parallel, ſo wird Mq auch BC in Q ſchneiden. Iſt nun EP $= x$, PM $= y$, MPC $= \zeta$ ſo hat man $yy = gx$. Man laſſe auch EF auf BC ſenkrecht fallen, ſetze EF $=$ Qq $= k$, FQ $= t$, QM $= z$, ſo wird $z = k + y \sin \zeta$, und $t =$ Eq $= x + y \cos \zeta$, mithin $y = \frac{z - k}{\sin \zeta}$ und $x = t - y \cos \zeta$, oder $x = t - z \cot \zeta + k \cot \zeta$. Beyde Werthe in die Gleichung $yy = gx$ geſetzt geben

$$\frac{z^2 - 2k . z + k^2}{\sin \zeta^2} = gt - g \cot \zeta . z + gk \cot \zeta,$$

oder $z^2 - 2k . z = gt \sin \zeta^2 + gk \cos \zeta \sin \zeta - k^2 .$
$+ g \cos \zeta \sin \zeta .$

Die-

Dieſe Gleichung giebt für jede Abſciſſe t ein paar ungleiche Werthe für z, es wird nemlich $z = k - \frac{1}{2} g \cos\zeta \sin\zeta \pm \sqrt{(gt \sin\zeta^2 + gk \cos\zeta \sin\zeta - k^2 + (k - \frac{1}{2} g \cos\zeta \sin\zeta)^2)}$ d. i. $z = k - \frac{1}{2} g \cos\zeta \sin\zeta \pm \sqrt{(gt \sin\zeta^2 + \frac{1}{4} g^2 \cos\zeta^2 \sin\zeta^2)}$. Beyde Werthe ſind für poſitive t allemahl möglich, und werden nur alsdenn gleich groß, wenn $g \cos\zeta \sin\zeta - 2k = 0$ iſt, und das giebt $k = \frac{1}{2} g \cos\zeta \sin\zeta$ oder $k = \frac{1}{4} g \sin 2\zeta$, wie vorhin. Man ſetze demnach den Werth $k = \frac{1}{4} g \sin 2\zeta$ in die gefundene Gleichung, und bemerke, daß dieſe Vorausſetzung $g \sin\zeta \cos\zeta = 2k$ giebt, ſo erhält man $z^2 = gt \sin\zeta^2 + k^2$.

271. §.

Zwey zuſammengehörige Durchmeſſer eines Kegelſchnitts ſind gegeben nebſt dem dazu gehörigen Coordinations-Winkel: man ſucht die Lage und Gröſſe der beyden Hauptdurchmeſſer.

Aufl. Wenn EC $= p$, CG $= q$, nebſt 101 F.
ECG $= \zeta$ bekannt ſind, ſo muß der Hauptdurchmeſ- 103
ſer CB gegen CE unter einem Winkel γ geneigt ſeyn, den die Gleichung $\tan 2\gamma = \frac{m^2 \sin 2\zeta}{1 + m^2 \cos 2\zeta}$ beſtimmt: alsdenn hat man zwiſchen CQ $= w$, QM $= z$ die Gleichung $z^2 = \frac{q^2 \sin\zeta^2}{\cos\gamma^2 + m^2 \cos\delta^2} - \frac{\sin\gamma^2 + m^2 \sin\delta^2}{\cos\gamma^2 + m^2 \cos\delta^2} . ww$. Für $w = 0$ wird $z^2 = CF^2 = \frac{q^2 \sin\zeta^2}{\cos\gamma^2 + m^2 \cos\delta^2}$, und für $z = 0$

 wird

wird $w^2 = CB^2 = \frac{q^2 \sin\zeta^2}{\sin\gamma^2 + m^2 \sin\delta^2}$; mithin

$\frac{CF^2}{CB^2} = \frac{\sin\gamma^2 + m^2 \sin\delta^2}{\cos\gamma^2 + m^2 \cos\delta^2}$. Man ſetze $CB = a$; $CF = b$, ſo verwandelt ſich die Gleichung in folgende

$z^2 = bb - \frac{bb}{aa} w^2$, oder $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - w^2)$.

Nun iſt auch $\sin\gamma\cos\gamma = m^2 \sin\delta\cos\delta$ (270 §.) alſo

$m^2 \cos\delta^2 = \frac{\sin\gamma\cos\gamma\cos\delta}{\sin\delta} = \sin\gamma\cos\gamma\cot\delta$, und

dies in den Werth von $CF^2 = b^2$ geſetzt giebt

$$b^2 = \frac{q^2 \sin\zeta^2}{\cos\gamma^2 + \sin\gamma\cos\gamma\cot\delta}$$

$$= \frac{q^2 \sin\zeta^2 \sin\delta}{\cos\gamma^2 \sin\delta + \sin\gamma\cos\gamma\cos\delta}$$

$= \frac{q^2 \sin\zeta^2 \sin\delta}{\cos\gamma \sin(\delta + \gamma)}$. Weil nun $\delta + \gamma = \zeta$ iſt,

ſo findet man $b^2 = \frac{q^2 \sin\zeta\sin\delta}{\cos\gamma}$, wo γ und δ aus ζ gefunden werden können.

Eben die Gleichung $\sin\gamma\cos\gamma = m^2 \sin\delta\cos\delta$ giebt $m^2 \sin\delta^2 = \sin\gamma\cos\gamma\,\mathrm{tang}\,\delta$, und das in den Werth von $CB^2 = a^2$ geſetzt giebt

$$a^2 = \frac{q^2 \sin\zeta^2}{\sin\gamma^2 + \sin\gamma\cos\gamma\,\mathrm{tang}\,\delta}$$

$$= \frac{q^2 \sin\zeta^2 \cos\delta}{\sin\gamma^2 \cos\delta + \sin\gamma\cos\gamma\sin\delta}$$

=

$= \frac{q^2 \sin\zeta^2 \cos\delta}{\sin\gamma(\sin(\delta+\gamma)}$ mithin $a^2 = \frac{q^2 \sin\zeta \cos\delta}{\sin\gamma}$.

272 §.

In der Ellipſe iſt allemahl q^2 poſitiv, und $\sin\gamma$ ebenfalls, mithin ſind a und b mögliche Gröſſen. In der Hyperbel iſt q^2 negativ, und $\cos\delta$ ebenfalls. Demnach bleibt a möglich, aber b wird unmöglich, alſo hat die Hyperbel einen möglichen, und einen unmöglichen Hauptdurchmeſſer. Man nehme an, es ſey $\sqrt{\frac{q^2 \sin\zeta \sin\delta}{\cos\gamma}} = b\sqrt{-1}$, ſo iſt b eine mögliche Gröſſe, und man kann durch den Mittelpunct C der Hyperbel eine auf BD ſenkrechte Linie ziehen, auf derſelben CF = CH = b nehmen, 103 F.
ſo iſt der halbe zugeordnete Hauptdurchmeſſer zwar eigentlich $= b\sqrt{-1}$, und man hat für die Hyperbel die Gleichung $zz = \frac{bb}{aa}(ww - aa)$. Um indeſſen die Aehnlichkeit mit der Ellipſe beyzubehalten, nennt man auch wohl FH $= 2b$ den zugeordneten Hauptdurchmeſſer der Hyperbel. (263 §.) Der gröſſere Hauptdurchmeſſer der Ellipſe und der mögliche Hauptdurchmeſſer der Hyperbel, ſo wie der Hauptdurchmeſſer der Parabel führen auch den Nahmen der Zwergaxe, der andre Hauptdurchmeſſer heiſt alsdenn die zugeordnete Axe. Die Scheitelpuncte der Zwergaxe eines Kegelſchnitts heiſſen auch die Scheitelpuncte (vertices) des Kegelſchnitts ſelbſt: demnach hat die Ellipſe und Hyperbel zwey Scheitelpuncte, die Parabel aber nur einen Scheitelpunct.

273. §.

Der Parameter g des Durchmeſſers einer Parabel iſt nebſt dem Coordinationswinkel ζ gegeben, man ſucht den Parameter der Zwergaxe.

Aufl. Die Gleichung im 270 §. für die Parabel FQ$=t$, QM$=z$ geſetzt, war $z^2 = gt \sin\zeta^2 + k^2$, $k = \frac{1}{4} g \sin 2\zeta$ angenommen; woraus $z =$ FE $= k$ für $t = 0$ folgt, für $z = 0$ aber findet man $t = \text{FB} = -\dfrac{kk}{g \sin\zeta^2}$. Setzt man nun BQ$=v$, ſo wird $v = \dfrac{kk}{g \sin\zeta^2} + t$, und $t = v - \dfrac{kk}{g \sin\zeta^2}$, welches in die Gleichung zwiſchen t und z geſetzt folgende Gleichung $zz = gv \sin\zeta^2$ zwiſchen v und z giebt. Mithin iſt der Parameter der Zwergaxe $= g \sin\zeta^2$.

274 §.

Wenn ein Kegelſchnitt zwey einander zugeordnete Hauptdurchmeſſer hat, ſo hat jede Sehne durch den Mittelpunct die Eigenſchaft, daß ſie eine Reihe paralleler Sehnen halbirt.

Beweis. Wenn CB$=a$, CF$=b$ die beyden halben Hauptdurchmeſſer ſind, und man ziehet eine Sehne ECA durch den Mittelpunct C, die den gröſſern halben Durchmeſſer CB unter einem beliebigen Winkel BCE$=\gamma$ ſchneidet; wenn man ferner die Sehne Mn unter einem beliebigen Winkel CP$n=\zeta$ ziehet, und wie im 270. §. BSM$=\delta$ ſetzt, ſo hat man

man für den Kegelſchnitt überhaupt $z^2 = \frac{bb}{aa}$ $(aa - ww)$, CQ $= w$, und QM $= z$ angenommen. Setzt man hiernächſt CP $= t$, PM $= y$, ſo wird $z = y \sin\delta - t \sin\gamma$, und $w = t \cos\gamma + y \cos\delta$, (270 §.) Dieſe Werthe in die Gleichung zwiſchen w und z geſetzt, $\frac{bb}{aa} = n^2$ angenommen, geben zwiſchen t und y die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} \sin\delta^2 \\ + n^2 \cos\delta^2 \end{matrix}\right\} \cdot y^2 \quad \left.\begin{matrix} - 2 \sin\gamma \sin\delta \\ + n^2 \cos\gamma \cos\delta \end{matrix}\right\} \cdot yt$$

$$\left.\begin{matrix} + \sin\gamma^2 \\ + n^2 \cos\gamma^2 \end{matrix}\right\} \cdot t^2 = b^2$$

Wenn in dieſer Gleichung der Coefficient von $y.t$, nemlich $2n^2 \cos\gamma \cos\delta - 2 \sin\gamma \sin\delta = 0$ iſt, ſo wird es eine reine quadratiſche Gleichung, und zu jedem Werth von t gehören zwey gleiche und entgegen geſetzte Werthe von y. Alsdenn iſt EA ein Durchmeſſer, der alle Sehnen halbirt, die ihn unter dem Winkel ζ ſchneiden. Die angenommene Vorausſetzung giebt $n^2 = \tang\gamma \tang\delta$, und hiemit ſtimmet auch die Rechnung im 271. §. überein, wo $b^2 = \frac{q^2 \sin\zeta \sin\delta}{\cos\gamma}$ und $a^2 = \frac{q^2 \sin\zeta \cos\delta}{\sin\gamma}$ war, welches ebenfalls $\frac{b^2}{a^2} = n^2 = \tang\gamma \tang\delta$ giebt. Dieſe Gleichung beſtimmt nun δ aus γ, mithin auch $\zeta = \delta + \gamma$, wie groß auch γ angenommen wird, mithin iſt jede Sehne durch C ein Durchmeſſer des Kegelſchnitts.

Weil

Weil nun $\zeta = \delta + \gamma$ iſt, ſo hat man $\tang \zeta = \frac{\tang \delta + \tang \gamma}{1 - \tang \delta \tang \gamma}$, und wenn man $n^2 \cot \gamma$ ſtatt $\tang \delta$ ſetzt, ſo findet man $\tang \zeta = \frac{\tang \gamma + n^2 \cot \gamma}{1 - n^2}$. In der Hyperbel iſt n^2, $\tang \gamma$ und $\cot \gamma$ negativ, alſo bleibt $n^2 = \tang \gamma \tang \delta$, und man findet $\tang \zeta = \frac{n^2 \cot \gamma - \tang \gamma}{1 + n^2}$. Man kann demnach für jeden Winkel γ denjenigen Winkel ζ finden, unter welchem EA eine Reihe paralleler Sehnen halbirt.

Auch auf die Parabel läſt ſich dieſe Unterſu-
101F chung ſo anwenden. Weil $n^2 = \tang \gamma \tang \delta$ iſt, ſo hat man auch $\sin \gamma \sin \delta = n^2 \cos \gamma \cos \delta$. Man laſſe in der Ellipſe $BY = k$ auf EA ſenkrecht fallen, ſo iſt $\sin \gamma = \frac{k}{a}$, $\cos \gamma = \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)}$, und es wird $\frac{k}{a} \sin \delta = \frac{bb}{a} \cdot \frac{\cos \delta}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)}$ woraus $k \sin \delta = \frac{1}{2} p \cos \delta$ gefunden wird, wenn man $a = \infty$ ſetzt und den Parameter des Hauptdurchmeſſers $\frac{2bb}{a} = p$ annimmt. Man hat alſo für jede Entfernung k vom Hauptdurchmeſſer $\tang \delta = \frac{p}{2k}$, oder $\tang \zeta = \frac{p}{2k}$, weil $\delta = \zeta$ wird. Demnach iſt jede mit dem Hauptdurchmeſſer parallel laufende Linie ebenfalls ein Durchmeſſer der Parabel:

eine

eine ſolche Linie aber iſt als eine Sehne durch den Mittelpunct der Parabel zu betrachten.

275. §.

Die allgemeine Gleichung zwiſchen t und y (274. §.) verwandelt ſich in folgende

$$y^2 - \frac{2(\sin\gamma \sin\delta - n^2 \cos\gamma \cos\delta)t}{\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2} \cdot y = \frac{b^2 - (n^2 \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2)t^2}{\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2}.$$

Wofern in derſelben der Coefficient des zweyten Gliedes nicht $= 0$ iſt, ſo giebt ſie für keinen endlichen Werth von t zwey gleiche und entgegen geſetzte Werthe von z: für $t = 0$ aber werden beyde Werthe gleich groß, weil alle Sehnen durch den Mittelpunct einander halbiren. Wenn demnach der Winkel ζ von γ nicht ſo abhängt, daß $\tang\zeta = \frac{\tang\gamma + n^2 \cot\gamma}{1 - n^2}$ iſt, oder in der Parabel $\tang\zeta = \frac{p}{2k}$, ſo kann EA keine andre unter dem Winkel ζ gegen EA geneigte Sehne halbiren, als die durch den Mittelpunct gehet.

Demnach iſt jede Sehne EA durch den Mittelpunct, die eine andre nicht durch den Mittelpunct laufende Sehne Mn in P halbirt, ein Durchmeſſer des Kegelſchnitts, der alle mit Mn parallele Sehnen halbirt. Denn weil MP $=$ Pn iſt, ſo iſt tangζ oder $\tang \mathrm{MPN} = \frac{\tang\gamma + n^2 \cot\gamma}{1 - n^2}$, weil wenn MPN

ſo

ſo nicht von BCP $= \gamma$ abhienge, auch Mn von CP nicht halbirt werden könnte.

276. §.

Jede Sehne durch den Mittelpunct iſt ein Durchmeſſer des Kegelſchnitts, der eine Reihe paralleler Sehnen halbirt: und dieſe Eigenſchaft hat keine andre Linie die nicht durch den Mittelpunct gehet.

Beweis. Jeder Kegelſchnitt hat wenigſtens ein Paar ſolcher zuſammengehöriger Durchmeſſer; (263. 264. §.) aber alsdenn hat derſelbe auch unter den Sehnen durch ſeinen Mittelpunct ein Paar Hauptdurchmeſſer, (270. §.) und hieraus folgt, daß jede andre Sehne durch den Mittelpunct ein Durchmeſſer ſey. (274. §.) Wenn nun eine andre grade Linie $\alpha\beta$ nicht durch den Mittelpunct geht, und die Sehne Mn in P halbirt, ſo kann ſie nicht alle mit Mn parallele Sehnen ebenfalls halbiren. Denn dies thut auch die Sehne EA durch P und den Mittelpunct C, und beydes zugleich kann nicht ſeyn.

277. §.

Die beyden Hauptdurchmeſſer ſind gegeben, man ſucht die Lage und Gröſſe zweyer andrer Durchmeſſer, die einander unter einem gegebenen Conjugations-Winkel ζ ſchneiden.

Aufl. Wenn der Coeficient des zweyten Gliedes in der Gleichung zwiſchen t und y (274. 275. §.) verſchwindet, alſo $n^2 = \tan\gamma \tan\delta$ angenommen wird, ſo iſt $yy = \frac{b^2}{\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2}$

—

$-\frac{\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2}{\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2} \cdot tt$. Man nehme $t = CP = 0$ an, ſo wird $yy = CG^2 = \frac{b^2}{\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2}$; wenn aber $y = PM = 0$ angenommen wird, ſo erhält man $t^2 = CE^2 = \frac{bb}{\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2}$. Noch ſetze man $CE = p$, $CG = q$, ſo wird $\frac{qq}{pp} = \frac{\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2}{\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2}$, und man erhält $yy = qq - \frac{qq}{pp} t = \frac{qq}{pp}(pp - tt)$, wie erfordert wird; auch hat man den halben Durchmeſſer $p = \frac{b}{\sqrt{(\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2)}}$, ſo wie den halben zugeordneten Durchmeſſer

$q = \frac{b}{\sqrt{(\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2)}}$. Es iſt aber

$\tang\delta^2 = \frac{n^4 \cos\gamma^2}{\sin\gamma^2}$, alſo

$\sec\delta^2 = \frac{\sin\gamma^2 + n^4 \cos\gamma^2}{\sin\gamma^2}$, mithin

$\cos\delta^2 = \frac{\sin\gamma^2}{\sin\gamma^2 + n^4 \cos\gamma^2}$, und

$\sin\delta^2 = \frac{n^4 \cos\gamma^2}{\sin\gamma^2 + n^4 \cos\gamma^2}$. Das giebt

$\sin\delta^2 +$

$$\sin\delta^2 + n^2 \cos\delta^2 = \frac{n^4 \cos\gamma^2 + n^2 \sin\gamma^2}{\sin\gamma^2 + n^4 \cos\gamma^2},$$ und

es wird $q^2 = \dfrac{b^2 (\sin\gamma^2 + n^4 \cos\gamma^2)}{n^2 (\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2)}$, alſo

$q = \dfrac{a\sqrt{(\sin\gamma^2 + n^4 \cos\gamma^2)}}{\sqrt{(\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2)}}$. Setzt man auch unter dem Wurzelzeichen $\dfrac{bb}{aa}$ ſtatt n^2, ſo hat man

$$p = \frac{ab}{\sqrt{(aa \sin\gamma^2 + bb \cos\gamma^2)}},$$

$$q = \frac{\sqrt{(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2)}}{\sqrt{(a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2)}}.$$

Aus dem gegebenen Winkel ζ wird nun auch γ vermittelſt der Gleichung $\tang\zeta = \dfrac{\tang\gamma + n^2 \cot\gamma}{1 - n^2}$ 274. §. gefunden, und man erhält $\tang\gamma + n^2 \cot\gamma = (1 - n^2) \tang\zeta$, oder $\tang\gamma^2 - (1 - n^2) \tang\zeta$. $\tang\gamma = -n^2$, woraus $\tang\gamma = \frac{1}{2}(1 - n^2) \tang\zeta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1 - n^2)^2 \tang\zeta^2 - n^2)}$ gefunden wird.

Wenn dieſe Aufgabe bey der Hyperbel vorkommt, ſo iſt $\tang\gamma = -\frac{1}{2}(1 + n^2) \tang\zeta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1 + n^2) \tang\zeta^2 + n^2)}$, weil γ und bb mithin $n^2 = \dfrac{bb}{aa}$ negativ werden; überdem hat man

$$p = \frac{-ab\sqrt{-1}}{\sqrt{(a^2 \sin\gamma^2 - b^2 \cos\gamma^2)}},$$ oder

$p =$

$$p = \frac{-ab}{\sqrt{(b^2 \operatorname{coſ}\gamma^2 - a^2 \operatorname{ſin}\gamma^2)}},$$ und

$$q = \frac{\sqrt{(a^4 \operatorname{ſin}\gamma^2 + b^4 \operatorname{coſ}\gamma^2)}}{\sqrt{(a^2 \operatorname{ſin}\gamma^2 - b^2 \operatorname{coſ}\gamma^2)}}.$$ Es wird alſo

einmahl p negativ, weil a negativ iſt, der Natur der Hyperbel gemäß, und überdem kann p nur alsdenn möglich ſeyn, wenn $a^2 \operatorname{ſin}\gamma^2 < b^2 \operatorname{coſ}\gamma^2$ iſt. Bey eben dieſer Vorausſetzung wird aber q unmöglich, weil b^4 poſitiv bleibt. Von jedem Paar einander zugeordneter Durchmeſſer der Hyperbel iſt alſo nur der eine allemahl möglich, der andre unmöglich.

278 §.

Die Lage des Hauptdurchmeſſers der Parabel und der dazu gehörige Parameter p ſind gegeben, man ſoll die Lage und den Parameter eines andern Durchmeſſers finden, der ſeine Ordinaten unter dem gegebenen Winkel ζ ſchneidet.

Aufl. Der neue Durchmeſſer EC muß mit dem Hauptdurchmeſſer BC parallel ſeyn, und die 100F. Entfernung k wird durch die Gleichung $\operatorname{tang}\zeta = \frac{p}{2k}$ (274. §.) beſtimmt, welche $k = \frac{1}{2} p \cot\zeta$ giebt. Und wenn g der dem neuen Durchmeſſer zugehörige Parameter iſt, ſo hat man $p = g \operatorname{ſin}\zeta^2$ (273. §.) folglich wird $g = p \operatorname{coſec}\zeta^2$.

279. §.

In der Ellipſe kann man unter jedem Winkel γ gegen die Zwergaxe einen möglichen Durchmeſſer

ziehen, weil alle ihre Durchmeſſer möglich ſind; wie denn auch die Gleichung $p = \frac{b}{\sqrt{(\sin\gamma^2 + n^2 \cos\gamma^2)}}$ $= \frac{ab}{\sqrt{(aa\sin\gamma^2 + bb\cos\gamma^2)}}$ für jeden Werth von γ einen möglichen Werth für p giebt. Weil aber in der Hyperbel $p = \frac{-ab\sqrt{-1}}{\sqrt{(aa\sin\gamma^2 - bb\cos\gamma^2)}}$ iſt, ſo muſte $aa\sin\gamma^2 < bb\cos\gamma^2$, oder $\tan\gamma^2 < \frac{bb}{aa}$ ſeyn, wenn p möglich ſeyn ſollte. Man nehme alſo $p = \frac{-ab}{\sqrt{(bb\cos\gamma^2 - a^2\sin\gamma^2)}}$ an, ſo iſt $p = -a$ für $\gamma = 0$, und p wächſt mit γ, weil der Nenner abnimmt. Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos\gamma$ ſo hat man $p = \frac{-ab\sec\gamma}{\sqrt{(bb - a^2\tan\gamma^2)}}$, und man ſiehet nun, daß p mit γ ſehr ſchnell wachſe, ſo lange bis $\tan\gamma = \frac{b}{a}$ iſt, da dann p unendlich groß wird. Wenn γ noch gröſſer wird, ſo wird p unmöglich: man ſetze alſo durch B auf CB eine ſenkrechte
103F. Linie, und nehme auf derſelben BR $= b =$ CF $=$ CH, ſo iſt tang BCR $= \frac{b}{a}$, und p oder CE wird unendlich groß, wenn $\gamma =$ BCR wird, unmöglich aber, wenn $\gamma >$ BCR wird. Wächſt γ ſo lange, bis $\gamma =$ BCX $= 180^\circ -$ BCR iſt, ſo hat man wiederum

tang

$\tang \gamma = -\frac{b}{a}$, und $bb = aa \tang \gamma$, mithin wird p aufs neue unendlich, und wieder möglich, wenn γ noch gröſſer wird, weil $\tang \gamma$ alsdenn noch weiter abnimmt. Weil nun p allemahl zwey gleich groſſe und entgegen geſetzte Werthe hat, ſo werden auch RC und XC rückwärts durch C verlängert die Hyperbel nicht weiter treffen können, wie ſich auch ergiebt, wenn man annimmt, daß γ über 180° wachſe. Die Winkel BCR und BCR + 180° haben gleiche Tangenten, ſo wie auch BCX und BCX + 180°.

280. §.

Aus dieſen Schlüſſen erhellet, daß die Hyperbel zwey unendlich groſſe Durchmeſſer habe, deren Lage leicht gefunden wird, wenn man $BR = BT = b$ nimmt, und alsdenn durch C, R, imgleichen durch C, T, grade Linien ziehet. Dieſe beyden unendlich groſſen Durchmeſſer heiſſen die Aſymtoten der Hyperbel, ſie ſind die Gränzen zwiſchen den möglichen und unmöglichen Durchmeſſern der Hyperbel, weil alle zwiſchen den Gränzen des Winkels RCT und ſeines Scheitelwinkels liegende Durchmeſſer möglich ſind, die übrigen aber zwiſchen den Gränzen des Winkels RCX und ſeines Scheitelwinkels unmöglich werden. Der Winkel RCT heißt der Aſymtoten-Winkel, und weil derſelbe $= 2BCR$ iſt, ſo wird ſeine Tangente $= \frac{2ab}{aa - bb}$.

Wenn man QM verlängert, bis an die Aſymtote CT in m, ſo iſt $Qm = \frac{b}{a} t$, und für die Hy-

perbel hat man $QM = \sqrt{\left(\frac{bb}{aa}tt - bb\right)}$. Je gröſſer t genommen wird, deſto mehr nähern ſich dieſe beyden Werthe einander, denn man hat $\frac{QM}{t} = \sqrt{\left(\frac{bb}{aa} - \frac{bb}{tt}\right)}$, welches dem Werth $\frac{Qm}{t} = \frac{b}{a}$ deſto näher kommt, je gröſſer t angenommen wird; indeſſen wird nur alsdenn $\frac{QM}{t} = \frac{b}{a} = \frac{Qm}{t}$, mithin $QM = Qm$, wenn $t = \infty$ geſetzt wird. Dies alles ſtimmt mit den vorigen Schlüſſen ſehr wohl überein, und man ſiehet daraus, daß jeder von den vier ins unendliche fortlaufenden Aeſten der Hyperbel der dazu gehörigen Aſymtote nach und nach immer näher komme, ſie aber eigentlich nie erreiche. Von dieſer Eigenſchaft haben beyde Aſymtoten ihre Nahmen.

281. §.

Erwäget man nun, was für Aenderungen mit dem Winkel ζ vorgehen, wenn ſich γ ändert, ſo ergiebt die Gleichung $\tang\zeta = \frac{n^2 \cot\gamma - \tang\gamma}{1 + n^2}$, daß $\zeta = 90°$ ſey, für $\gamma = 0$, wie erfordert wird. Wenn aber γ wächſt, ſo nimmt ζ ab, aber nur ſo lange, bis $n^2 \cot\gamma = \tang\gamma$, oder $n^2 = \tang\gamma^2$, das iſt, bis $\tang\gamma = \frac{b}{a}$ iſt, und CE in CR fällt. Alsdenn wird $\zeta = 0$, und wenn γ noch weiter wächſt,

mit-

mithin tang$\gamma > \frac{b}{a}$, oder tang$\gamma^2 > n^2$, d. i. tang$\gamma > n^2$ cotγ wird, ſo wird ζ negativ und fällt auf die andre Seite von AP, da dann die zugehörigen Sehnen zwiſchen den entgegen geſetzten Hyperbeln liegen. Wenn endlich $\gamma = 90°$ wird, ſo wird auch ζ wieder $= 90°$, und ändert ſich hiernächſt in umgekehrter Ordnung eben ſo wieder, wenn γ noch weiter wächſt. Man kann demnach für jeden gegebenen Coordinatenwinkel ein paar zuſammen gehörige Durchmeſſer der Hyperbel finden, wie denn auch die Gleichung tang$\gamma = -\frac{1}{2}(1+n^2)$tang$\zeta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1+n^2)tg\,\zeta^2 + n^2)}$ allemahl zwey mögliche Werthe für tangγ giebt.

282 §.

In der Ellipſe aber hängen die Winkel ζ und γ nach einem andern Geſetz von einander ab, und man hat tang$\zeta = \frac{\text{tang}\gamma + n^2 \cot\gamma}{1 - n^2}$ (274. §.)

Für $\gamma = 0$ wird zwar ebenfalls $\zeta = 90°$, wie der Sache gemäß iſt, aber wenn γ wächſt, ſo nimmt tangζ nur ab, ſo lange n^2 cotγ ſchneller abnimmt, als tangγ wächſt. Für $\gamma = 90$ iſt tangζ wieder unendlich groß, und $\zeta = 90°$. Demnach muß ζ nur bis auf eine gewiſſe Gränze abnehmen, und dieſe wird gefunden, wenn man den 343. §. Mech. gemäß den kleinſten Werth von tangζ ſucht. In ſolcher Abſicht ſetzt man d.tang$\zeta = 0$, und findet

$$\frac{1}{\text{coſ}\gamma^2} - \frac{n^2}{\text{ſin}\gamma^2} = 0. \text{ (457. §. Hydr.)}$$

Das giebt $\frac{\sin\gamma^2}{\cos\gamma^2} = n^2$; oder tang $\gamma = \frac{b}{a}$.

Weil nun in der Ellipſe tang CBH $= \frac{b}{a}$ iſt, ſo hat ζ den kleinſten Werth, wenn γ oder BCE $=$ CBH $=$ CBF, folglich CE mit BF parallel wird. Alsdenn wird tang $\zeta = \frac{2b}{a} : \left(1 - \frac{bb}{aa}\right) =$

$\frac{2ab}{aa - bb}$, oder tang $\zeta = \frac{2 \text{ tang CBH}}{1 - (\text{tang CBH})^2}$ $=$ tang 2CBH, mithin $\zeta = 2$CBH $=$ HBF, und die Sehnen des Durchmeſſers CE, ſo wie ſein zugehöriger Durchmeſſer, ſind mit BH parallel. Wächſt γ über dieſe Gränze, ſo wächſt auch ζ wieder mit γ bis beyde zugleich $= 90^\circ$ werden. Dieſemnach kann man nicht für jeden gegebenen Coordinaten-Winkel ζ in der Ellipſe ein Paar zuſammen gehörige Durchmeſſer finden, und die Gleichung tang $\gamma = \frac{1}{2}(1 - n^2)$ $tg\,\zeta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1-n^2)^2\, tg.\,\zeta^2 - n^2)}$ 277. §. ergiebt auch, daß tang $\zeta > \frac{2n}{1 - n^2}$, oder

tang $\zeta > \frac{2ab}{aa - bb}$ ſeyn müſſe, wenn $tg.\,\gamma$ möglich ſeyn ſoll, welches mit den vorigen Schlüſſen übereinkommt.

In der Parabel hängt ζ ab von der Entfernung k des zugehörigen Durchmeſſers von der Zwergaxe, weil tang $\zeta = \frac{p}{2k}$ gefunden iſt. Jede mögliche

liche Diſtanz giebt einen möglichen Werth für tang ζ, und ζ nimmt ab, wenn k wächſt, verſchwindet aber allererſt wenn k unendlich groß wird. Daher kann auch für jeden Coordinatenwinkel ζ eine zugehörige Entfernung $k = \frac{1}{2} p \cot \zeta$ gefunden werden.

283. §.

Die Summe der Quadrate jeder zweyer zuſammengehöriger Durchmeſſer der Ellipſe oder Hyperbel iſt eben ſo groß, als die Summe der Quadrate der beyden Hauptdurchmeſſer.

Beweis. Es iſt $pp = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2}$

und $qq = \frac{a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2}{a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2}$

(277. §.) mithin erhält man $pp + qq = \frac{a^4 \sin\gamma^2 + a^2 b^2 \cos\gamma^2 + a^2 b^2 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2}{a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2}$,

weil $\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 = 1$ iſt, und es wird $pp + qq = aa + bb$.

Weil in der Hyperbel bb und qq negativ ſind, ſo iſt für die Hyperbel $pp - qq = aa - bb$.

284. §.

Das Product jeder zweyer zuſammen gehöriger Durchmeſſer verhält ſich zum Product der beyden Hauptdurchmeſſer, wie der ganze Sinus zum Sinus des Coordinations-Winkels.

Beweis. Wenn man die beyden Werthe von p und q aus dem 277. §. in einander multiplicirt, ſo findet man

$$p.q = \frac{a.b.\sqrt{(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2)}}{a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2}.$$ Weil

aber $\tang\zeta = \frac{\tang\gamma + n^2 \cot\gamma}{1 - n^2}$, (274. §.) ſo findet man $\cot\zeta = \frac{1 - n^2}{\tang\gamma + n^2 \cot\gamma}$, oder

$$\cot\zeta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 tg\gamma + b^2 \cot\gamma},$$ folglich

$$\operatorname{cosec}\zeta = \frac{\sqrt{(a^4 \sec\gamma^2 + b^4 \operatorname{cosec}\gamma^2)}}{a^2 \tang\gamma + b^2 \cot\gamma}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2)}}{a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2},$$ und man erhält

$p.q = a.b \operatorname{cosec}\zeta$, oder $a.b = p.q \sin\zeta$, und $p.q : a.b = 1 : \sin\zeta$.

285. §.

Die beyden Hauptdurchmeſſer ſind gegeben, man ſoll finden, wie groß jede zwey andre zuſammen gehörige Durchmeſſer ſeyn werden, die ſich unter dem gegebenen Winkel ζ ſchneiden, ohne vorher wie im 277. §. ihre Lage gegen die Hauptdurchmeſſer zu ſuchen.

Aufl. Es iſt für die Ellipſe
$pp + qq = aa + bb$ (283. §.)
und $2pq = 2ab \operatorname{cosec}\zeta$ (284. §.)

folg-

folglich $pp \pm 2pq + qq = aa \pm 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb$.
Das giebt $p + q = \sqrt{(aa + 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)}$
und $p - q = \sqrt{(aa - 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)}$
und man erhält
$p = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)} + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)}$
$q = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)}$.

Beyde Werthe ſind nur möglich, ſo lange $aa + bb > 2ab \operatorname{coſec} \zeta$ iſt, oder $\sin \zeta > \frac{2ab}{aa + bb}$, mithin $\zeta > \mathrm{A}.\sin \frac{2ab}{aa+bb}$, oder $\zeta > \mathrm{A}.\operatorname{coſ} \frac{aa - bb}{aa + bb}$, oder auch $\zeta > \mathrm{A}.\operatorname{tang} \frac{2ab}{aa - bb}$, welches mit dem 282. §. übereinſtimmet.

Für die Hyperbel iſt $pp - qq = aa - bb$, und $pq = ab \operatorname{coſec} \zeta$ alſo $q = \frac{ab \operatorname{coſec} \zeta}{p}$, und $pp - \frac{a^2 b^2 \operatorname{coſec} \zeta^2}{pp} = aa - bb$. Daraus folgt $p^4 - (aa - bb) p^2 = a^2 b^2 \operatorname{coſec} \zeta^2$, und es wird $p = \sqrt{(\frac{1}{2}(aa - bb) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(aa - bb)^2 + a^2 b^2 \operatorname{coſec} \zeta^2)})}$. Aus p hat man q vermittelſt der Gleichung $q = \frac{ab \operatorname{coſec} \zeta}{p}$, es iſt aber auch $qq - pp = bb - aa$, und $p = \frac{ab \operatorname{coſec} \zeta}{q}$,

$$\text{mithin } qq - \frac{a^2 b^2 \operatorname{coſec} \zeta^2}{q^2} = bb - aa$$

und $q^4 - (bb - aa) q^2 = a^2 b^2 \operatorname{coſec} \zeta^2$ mithin $q = \sqrt{(\frac{1}{2}(bb - aa) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(bb - aa)^2 + a^2 b^2 \operatorname{coſec} \zeta^2)})}$.

In der Hyperbel giebt es alſo für jeden Coordinaten-Winkel ζ ſowohl für p, als auch für q zwey verſchiedene Werthe, davon allemahl der eine möglich der andre unmöglich iſt, oder eigentlich vier Werthe, zwey mögliche und zwey unmögliche einander entgegengeſetzte für ſich gleiche Werthe. Dem möglichen Werth von p iſt allemahl der unmögliche Werth von q zugeordnet, wie aus dem 277. §. bekannt iſt: zu dem unmöglichen Werth von p gehört alſo der mögliche Werth von q. Uebrigens giebt jeder Coordinatenwinkel ζ zwey paar ſolche Werthe, und man kann für jeden Coordinatenwinkel zwey Paar einander zugehörige Durchmeſſer der Hyperbel ziehen.

286. §.

Zwey zuſammen gehörige Durchmeſſer nebſt dem Coordinationswinkel ſind gegeben, man ſoll die Gröſſe der beyden Hauptdurchmeſſer finden, ohne vorher, wie im 271. §. ihre Lage gegen die beyden gegebenen Durchmeſſer zu ſuchen.

Aufl. Man hat für die Ellipſe

$$aa + bb = pp + qq \quad (283. \text{ §.})$$

und $2ab = 2pq \sin \zeta$, (284. §.)

alſo wird $aa \pm 2ab + bb = pp \pm 2pq \sin \zeta + qq$,

und

und man erhält

$$a + b = \sqrt{(pp + 2pq \sin\zeta + qq)}$$
$$a - b = \sqrt{(pp - 2pq \sin\zeta + qq)}$$

mithin $a = \frac{1}{2}\sqrt{(pp + 2pq \sin\zeta + pp)} + \frac{1}{2}\sqrt{(pp - 2pq \sin\zeta + qq)}$
und $b = \frac{1}{2}\sqrt{(pp + 2pq \sin\zeta + pp)} - \frac{1}{2}\sqrt{(pp - 2pq \sin\zeta + qq)}$

Die Vergleichung mit dem vor. §. ergiebt, daß allemahl $a - b > p - q$ ſey. Denn es iſt $aa + bb = pp + qq$, und $2ab = 2pq \sin\zeta$, mithin $2ab \operatorname{cosec}\zeta > 2pq \sin\zeta$; daraus folgt, es ſey $\sqrt{(pp - 2pq \sin\zeta + pp)} > \sqrt{(aa - 2ab \operatorname{cosec}\zeta + bb)}$ oder $a - b > p - q$. Demnach iſt die Differenz der beyden Hauptdurchmeſſer der Ellipſe allemahl gröſſer als die Differenz zweyer andrer zuſammen gehöriger Durchmeſſer.

In der Hyperbel iſt

$$aa - bb = pp - qq \text{ und}$$
$$ab = pq \sin\zeta$$
$$\text{alſo } b = \frac{pq \sin\zeta}{a}$$

$$\text{und es wird } a^2 - \frac{p^2 q^2 \sin\zeta^2}{a^2} = pp - qq,$$

folglich $a^4 - (pp - qq)a^2 = p^2 q^2 \sin\zeta^2$,
und man findet
$a = \sqrt{(\frac{1}{2}(pp - qq) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(pp - qq)^2 + p^2 q^2 \sin\zeta^2)})}$.
Aus a hat man zwar b vermittelſt der Gleichung $b = \frac{pq \sin\zeta}{a}$: es wird aber auch

$$bb - aa = qq - pp$$

und

und $a = \frac{pq \sin \zeta}{b}$, woraus man

$$bb - \frac{p^2 q^2 \sin \zeta^2}{bb} = qq - pp \text{ erhält, oder}$$

$$b^4 - (qq - pp) b^2 = p^2 q^2 \sin \zeta^2, \text{ und}$$

$$b = \sqrt{(\tfrac{1}{2}(qq - pp) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(qq-pp)^2 + p^2 q^2 \sin \zeta^2)})}.$$

In allen Fällen findet man für a ſowohl als für b zweene mögliche einander gleiche und entgegengeſetzte, und zugleich zweene unmögliche Werthe; da dann dem möglichen Werth a der unmögliche b zugehört, und umgekehrt.

287. §.

In jeder Ellipſe giebt es ein Paar gleich groſſe zuſammengehörige Durchmeſſer, und das ſind diejenigen, welchen der kleinſte Coordinaten-Winkel zugehört.

Beweis. Des kleinſten Coordinaten-Winkels Tangente iſt $= \frac{2ab}{aa + bb}$. (282. §.) und ſein Sinus $= \frac{2ab}{aa + bb}$. Wenn nun im 285. §. $\sin \zeta = \frac{2ab}{aa + bb}$, alſo $\operatorname{coſec} \zeta = \frac{aa + bb}{2ab}$ angenommen wird, ſo findet man $p = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + 2ab \operatorname{coſec} \zeta + bb)} = \frac{1}{2}\sqrt{2(aa + bb)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(aa + bb)} = q$.

In der Hyperbel kann niemahls $p = q$ werden, wofern nicht $a = b$ iſt, weil allemahl $(p + q)(p - q) = aa - bb$, folglich $p - q = \frac{aa - bb}{p + q}$ bleibt, es mü-

müſte dann p unendlich groß werden, da dann auch q unendlich groß wird, weil ſonſt $p-q$ nicht verſchwinden kann. Dies iſt der Fall, wenn p und q die Aſymtoten werden. Eigentlich fällt alsdenn in jeder Aſymtote ein Paar zuſammen gehöriger Durchmeſſer zuſammen. In dieſem Fall iſt $\zeta=0$, coſec ζ aber unendlich groß, welches für p und q unendlich groſſe Werthe giebt.

Wenn $a=b$ angenommen wird, ſo giebt dies für die Ellipſe allemahl (274. §.) $\tang\zeta = \frac{\tang\gamma + n^2 \cot\gamma}{1-n^2} = \infty$, weil $n=1$ iſt; und das giebt im 285. §. $\operatorname{coſec}\zeta=1$, mithin $p=\frac{1}{2}\sqrt{4aa} = a = q$. Wenn alſo beyde Hauptdurchmeſſer der Ellipſe gleich groß ſind, ſo ſind alle Durchmeſſer eben ſo groß, und die Ellipſe iſt mit dem Kreiſe einerley. In der Hyperbel giebt die Vorausſetzung $a=b$, zwar auch $p=q$, allein weil $aa=pp\sin\zeta$ wird, ſo erhält man

$$p=\frac{a}{\sqrt{\sin\zeta}}=q.$$

Hier wird nicht $\sin\zeta=1$,

weil $\tang\zeta=\frac{n^2\cot\gamma-\tang\gamma}{1+n^2}$ war. (274. §.)

Demnach ſind zwar jede zwey zuſammen gehörige Durchmeſſer gleich groß, allein ſie können nicht alle unter einander ſelbſt gleich groß werden. Die Hyperbel heiſt in dieſem Fall eine gleichſeitige Hyperbel, und der Aſymtoten-Winkel wird $=90°$.

288 §.

288 §.

101 103F. Die allgemeine Gleichung $p = \frac{ab}{\sqrt{(aa\sin\gamma^2 + bb\cos\gamma^2)}}$ (277. §.) oder $pp = \frac{aabb}{aa\sin\gamma^2 + bb\cos\gamma^2}$, zwiſchen dem Winkel $\gamma =$ BCE und dem halben Durchmeſſer $p =$ CE des Kegelſchnitts, kann als eine Gleichung dienen, welche die Natur des Kegelſchnitts eben ſo ausdrückt, wie eine Gleichung zwiſchen zwoen Coordinaten CQ und QM oder CP und PM. Wenn nemlich γ unbeſtimmt den Winkel BCM bedeutet, ſo giebt die Gleichung $p = \pm \frac{ab}{\sqrt{(aa\sin\gamma^2 + bb\cos\gamma^2)}}$ den dazu gehörigen halben Durchmeſſer CM oder CL, und ſie dient eben ſo wie jede Gleichung zwiſchen zweyen Coordinaten ſo viele Puncte M in der krummen Linie, wie man will zu finden, wenn man ſo viele Werthe des Winkels γ willkührlich annimmt, als man nöthig findet, und die dazu gehörigen Werthe CM ſucht, da dann alle Puncte M in dem Kegelſchnitt liegen. Die Maxime iſt allgemein und kann bey jeder krummen Linie gebraucht werden, es läßt ſich auch jede Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten CQ $= x$, QM $= y$, in eine Gleichung zwiſchen BCM $= \gamma$, CM $= p$ verwandeln, wenn man in der Gleichung zwiſchen x und y die Werthe $x = p\cos\gamma$, $y = p\sin\gamma$ ſubſtituirt: ſo wie umgekehrt die Gleichung zwiſchen γ und p in eine andre zwiſchen x und y verwandelt wird, wenn man

ſin γ

$\sin\gamma = \frac{y}{p}$, $\cos\gamma = \frac{x}{p}$ ſetzt. Braucht man dieſe letztern Werthe in der Gleichung $pp = \frac{aabb}{aa\sin\gamma^2 + bb\cos\gamma^2}$, ſo findet man

$$1 = \frac{aabb}{aayy + bbxx}, \text{ oder } aayy = aabb - bbxx,$$

d. i. $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, dem 271. §. gemäß.

Für die Hyperbel (103. Fig.) hat man zwiſchen BCM $= \gamma$ und CM $= p$ die Gleichung 103 F.

$pp = \frac{aabb}{bb\cos\gamma^2 - aa\sin\gamma^2}$: für die Parabel aber würde allemahl p unendlich groß ſeyn, wie ihrer Natur gemäß iſt, und bey ihr kann dieſe Gleichung nicht gebraucht werden, wiewohl man leicht eine ähnliche Gleichung für ſie finden kann, wenn nur die Entfernungen p nicht im Mittelpunct, ſondern einem andern Punct der Zwergaxe, oder wo man ihn ſonſt annehmen will zuſammen laufen ſollen. Wenn in der 100. Fig. BQ $= x$, QM $= y$ geſetzt wird, ſo iſt $yy = px$, p aber der Parameter der Zwergaxe der Parabel. 100 F. Man ziehe BM, und ſetze QBM $= \gamma$, BM $= z$, ſo hat man $y = z\sin\gamma$, $x = z\cos\gamma$, und man findet $z^2 \sin\gamma^2 = pz\cos\gamma$, oder $z = p\cot\gamma \operatorname{cosec}\gamma$.

Mit einer Gleichung dieſer Art zwiſchen dem veränderlichen Winkel γ und dem unbeſtimmten Abſtand des in dem einen Schenkel dieſes Winkels lie-

genden Puncts M der krummen Linie von der Spitze des Winkels laſſen ſich ähnliche Veränderungen vornehmen, wie mit der Gleichung zwiſchen zweyen Coordinaten, wovon der einfachſte Fall der iſt, wenn man in der Abſciſſenlinie einen andern Anfangspunct der Abſciſſen annimmt. Man kann jede Entfernung, wie CE (101. 103. Fig.) für die erſte annehmen, von welcher die veränderlichen Winkel ihren Anfang nehmen ſollen. Es ſey $BCE = \gamma$, ein beſtändiger Winkel und $ECM = \eta$ veränderlich, ſo iſt $BCM = \gamma + \eta$, und man muß in der Gleichung zwiſchen $p = CM$ und $\gamma = BCM$ nun $\eta - \gamma$ ſtatt γ ſetzen, ſo hat man $pp = \dfrac{aabb}{aa\,\text{ſin}(\eta-\gamma)^2 + bb\,\text{coſ}(\eta-\gamma^2)}$ für die Ellipſe, wenn bb poſitiv iſt: für die Hyperbel aber $pp = \dfrac{aabb}{bb\,\text{coſ}(\eta-\gamma)^2 - aa\,\text{ſin}(\eta-\gamma)^2}$, und für die gleichſeitige Hyperbel $p^2 = \dfrac{aa}{\text{coſ}(\eta-\gamma)^2 - \text{ſin}(\eta-\gamma)^2} = \dfrac{aa}{\text{coſ}\,2\,(\eta-\gamma)}$. Im letzten Fall iſt $BCT = BCR = 45°$, wird alſo $RCE = \varepsilon$ geſetzt, ſo iſt $\gamma = 45° - \varepsilon$, und $2\eta - \gamma = 2(\eta + \varepsilon) - 90°$, mithin $p^2 = \dfrac{a^2}{\text{ſin}\,2\,(\varepsilon + \eta)}$.

289 §.

Diejenige Lage der ſchneidenden Ebene im Kegel oder Cylinder zu finden, wobey der Kegel- oder Cylinder-Schnitt ein Kreis wird.

Aufl.

Aufl. Daß das verlangte erfolge, wenn die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche parallel liegt, iſt aus den Anfangsgründen ſchon bekannt, und die hier gefundenen Formuln geben eben daſſelbe, wenn $\psi = 0$ angenommen wird. Alsdenn iſt $\tan\zeta = \tan\beta \sec\eta \operatorname{cosec}\psi$ unendlich groß, und $\zeta = 90°$, mithin $\operatorname{cosec}\zeta = 1$, und beyde Durchmeſſer p und q werden Hauptdurchmeſſer. Aus dem 265. §. hat man aber $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$ und

$$q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}, \quad \frac{q^2}{p^2} = \frac{b^2 - r^2}{L^2},$$

$b = c(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$, $L = c \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta$. Hier iſt nun $\operatorname{cosec}\zeta = 1$, und $\psi = 0$, alſo b und L beyde unendlich groß, mithin $\frac{q^2}{p^2} = \frac{b^2}{L^2} = \frac{c^2 \cot\psi^2}{c^2 \operatorname{cosec}\psi^2} = 1$. Uebrigens hat man $b - \delta = (c - \Delta)(\sin\eta \cos\beta + \sin\beta \cot\psi$, und man findet

$$q = \frac{r(b-\delta)}{b} = \frac{r(c-\Delta)}{c} = \frac{r(a-\Delta)}{a},$$

weil $c = a$, als den Halbmeſſer des Kreiſes, wie den Anfangsgründen gemäß iſt.

Um nun weiter zu prüfen, ob es noch andre Werthe des Winkels ψ gebe, wobey der Kegelſchnitt ein Kreis wird, betrachte man

1.) den Fall, wenn der Kegel grade, mithin $\beta = 90°$ iſt. Alsdenn ſind p und q allemahl Hauptdurchmeſſer, und man hat überdem

$p = \frac{c \cdot \mathrm{coſec}\,\psi}{\sqrt{(c^2 \cot\psi^2 - r^2)}} \cdot q$. (266. §.) Sollen nun p und q gleich groß, mithin der Schnitt ein Kreis werden, (287. §.) ſo wird erfordert, daß $c^2 \,\mathrm{coſec}\,\psi^2 = c^2 \cot\psi^2 - r^2$ ſey, und das giebt $c^2 \,\mathrm{coſec}\,\psi^2 = c^2 \,\mathrm{coſec}\,\psi^2 - c^2 - r^2$, woraus $c^2 + r^2 = 0$ folgen würde, welches nie ſeyn kann, weil c und r allemahl beſtimmte endliche Werthe haben. Nur in dem Fall, wenn $\psi = 0$ und $\mathrm{coſec}\,\psi = \infty$ iſt, kann die gefundene Gleichung beſtehen, und das iſt der ſchon erwehnte Fall, wenn der Schnitt mit der Grundfläche parallel iſt. Andre Lagen der ſchneidenden Ebene giebt es demnach nicht, wobey der Schnitt des graden Kegels ein Kreis ſeyn könnte.

Für den Cylinder ſetzt man c unendlich groß, und das würde $\mathrm{coſec}\,\psi = \cot\psi$ geben, welches ebenfalls nur unter der Bedingung möglich iſt, wenn man $\psi = 0$ ſetzt.

2.) Wenn der Kegel ſchief iſt, ſo iſt wiederum zuerſt der Fall merkwürdig, wenn die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene der Axe des Kegels gegen ſeine Grundfläche ſenkrecht ſteht. Als-
102F. denn iſt $\eta = 90°$, denn WF iſt die Durchſchnittslinie der Ebene des Schnitts und der Grundfläche, die nun beyde auf der Ebene OCS ſenkrecht ſind: mithin iſt auch WF auf OCS ſenkrecht, und CWF $= \eta = 90°$. Zugleich wird $\zeta = 90°$, weil $\tan\zeta = \tan\beta \sec\eta \,\mathrm{coſec}\,\psi$ unendlich wird. Uebrigens hat man $L = a \,\mathrm{coſec}\,\psi \,\mathrm{coſec}\,\zeta = c \sin\beta \,\mathrm{coſec}\,\psi$, und $b = c \sin\beta \cot\psi + c \cdot \cos\beta$. Das giebt $\frac{qq}{pp}$

=

$$= \frac{(c\sin\beta\cot\psi + c.\cos\beta)^2 - r^2}{c^2 \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2}. \text{ (265. §.)}$$

Sollen demnach p und q einander gleich seyn, ſo wird erfordert, daß $c^2 \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 = (c\sin\beta\cot\psi + c\cos\beta)^2 - r^2$ ſey. Daraus ſchließt man ferner $c^2 \sin\beta^2 = 2c^2 \sin\beta\cos\beta\cot\psi + c^2\cos\beta^2 - r^2$, alſo $c^2 \sin 2\beta \cot\psi = c^2(\sin\beta^2 - \cos\beta^2) + r^2$, und man erhält $\cot\psi = \frac{r^2 - c^2\cos 2\beta}{c^2 \sin 2\beta}$, oder

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{c^2\sin 2\beta}{r^2 - c^2\cos 2\beta}.$$

Für den Cylinderſchnitt hat man $\operatorname{tang}\psi = -\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = -\operatorname{tang} 2\beta$, alſo $\psi = 180° - 2\beta$. Hiemit ſtimmen auch die Formuln des 255 §. überein, wo $p = \frac{r\sin\beta\operatorname{cosec}\psi\operatorname{cosec}\zeta}{\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta}$ und $q = r$ war. Soll bey der Vorausſetzung $\eta = 90°$ auch $p = r$ ſeyn, ſo wird erfordert, daß $\sin\beta\operatorname{cosec}\psi = \sin\beta\cot\psi + \cos\beta$ ſey, alſo $\sin\beta = \sin\beta\cos\psi + \cos\beta\sin\psi$, das iſt $\sin\beta = \sin(\beta+\psi)$ alſo $\beta = 180° - (\beta+\psi)$, und $\psi = 180° - 2\beta$.

3.) Iſt die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene der Axe des Kegels nicht ſenkrecht, mithin η ein ſchiefer Winkel, ſo muß man beyde Winkel η und ψ für den Fall ſuchen, wenn der Schnitt ein Kreis werden ſoll. Es iſt aber allemahl $ea = p$ ein Durchmeſſer der Projection, der eine Reihe paralleler Sehnen unter dem Winkel ζ halbirt, und

ein Durchmeſſer des Kreiſes kann eine Reihe ſeiner parallelen Sehnen nur unter einem rechten, nie untee einem ſchiefen Winkel halbiren. Demnach wird erfordert, daß $\zeta = 90°$, mithin $\text{tang}\,\zeta = \text{tang}\,\beta \sec\eta \,\text{coſec}\,\psi$ unendlich groß ſey. Weil aber der Kegel ſchief angenommen wird, ſo iſt $\text{tang}\,\beta$ endlich, mithin entweder $\sec\eta$ oder $\text{coſec}\,\psi$ unendlich groß. Im letztern Fall wäre $\psi = 0$, und der Schnitt mit der Grundfläche parallel, welcher Fall hier nicht in Betrachtung kommt: demnach muß $\sec\eta$ unendlich groß, oder $\eta = 90°$ ſeyn. Das iſt nun der kurz vorhin betrachtete Fall, welcher $\text{tang}\,\psi = \frac{c^2 \sin 2\beta}{r^2 - c^2 \cos 2\beta}$ giebt, und dieſe Schlüſſe ergeben, daß kein Schnitt des ſchiefen Kegels, und eben ſo wenig ein Schnitt des ſchiefen Cylinders einen Kreis geben können, ohne nur in dem Fall, wenn $\eta = 90°$ iſt, oder die Ebene des Schnitts die Neigungs-Ebene der Axe des Kegels oder Cylinders ſenkrecht ſchneidet, da dann $\text{tang}\,\psi = \frac{c^2 \sin 2\beta}{r^2 - c^2 \cos 2\beta}$ ſeyn muß, und für den Cylinder $\text{tang}\,\psi = -\text{tang}\,2\beta$.

4.) Wenn man die Lage des Schnitts gegen die Grundfläche des Kegels mithin den Winkel ψ als gegeben betrachtet, ſo zeigt die Gleichung $\text{tang}\,\psi = \frac{c^2 \sin 2\beta}{r^2 - c^2 \cos 2\beta}$ wie β und c von einander abhängen müſſen, damit der Kegelſchnitt ein Kreis werde. Sie giebt $r^2\,\text{tang}\,\psi - c^2 \cos 2\beta\,\text{tang}\,\psi = c^2 \sin 2\beta$, alſo $c^2 = \frac{r^2\,\text{tang}\,\psi}{\cos 2\beta\,\text{tang}\,\psi + \sin 2\beta}$:

und

und wenn Zähler und Nenner mit $\cos\psi$ multiplicirt wird, ſo hat man $c^2 = \frac{r^2 \sin\psi}{\cos 2\beta \sin\psi + \sin 2\beta \cos\psi}$

$= \frac{r^2 \sin\psi}{\sin(\psi + 2\beta)}$. Man nehme $\omega = \frac{1}{2}\psi$ an, ſo

iſt $c^2 = \frac{r^2 \sin 2\omega}{\sin(2\omega + 2\beta)}$, und weil ψ oder ω als

gegeben angenommen iſt, ſo kann man nun am beſten überſehen, wie die Länge c der Axe des Kegels von dem veränderlichen Winkel β abhängt. Derſelbe kommt nur im Nenner vor, alſo ändert ſich c^2 umgekehrt wie $\sin(2\omega + 2\beta)$, und c wird am gröſten wenn $\sin(2\omega + 2\beta)$ am kleinſten iſt; umgekehrt aber wird c am kleinſten, wenn $\sin(2\omega + 2\beta)$ am gröſten iſt Beyde Gränzen, zwiſchen welchen der Sinus eines Winkels fallen kann, ſind 0 und 1: demnach iſt der gröſte Werth von c unendlich groß, wenn $\sin(\omega + \beta) = 0$, mithin entweder wenn $\beta = -\omega = -\frac{1}{2}\psi$, oder wenn $\omega + \beta = 90^\circ$, alſo $\beta = 90 - \frac{1}{2}\psi$ iſt. Zwiſchen beyden iſt der kleinſte Werth von c enthalten, wenn $\sin 2(\omega + \beta) = 1$, mithin $\psi + 2\beta = 90^\circ$, oder $\beta = 45^\circ - \frac{1}{2}\psi$ iſt. In der 125. F. 105F. ſtelle OAE das auf der Grundfläche des Kegels ſenkrechte Dreyeck durch die Axe CO vor, ſo iſt AE der Durchmeſſer der Grundfläche, OA und OE ſind ein Paar Seitenlinien des Kegels. Weiter ſey Bb die Durchſchnittslinie der Ebene des Schnitts mit der Ebene OAE, und ſie ſchneide AE in F, ſo iſt CFB der Neigungswinkel ψ, und ACO $= \beta$. Macht man nun CO $= \sqrt{\frac{r^2 \sin 2\omega}{\sin 2(\omega + \beta)}}$, ſo giebt der

Schnitt des Kegels AOE mit der Ebene Bb einen Kreis, und weil man für ACO $= \beta$ unzählich viele verſchiedene Winkel annehmen kann, ſo giebt es unzählig viele verſchiedene Stellen für die Spitze des Kegels O, bey einer gegebenen Grundlinie und gegegebener Lage des Schnitts, wobey der Schnitt allemahl ein Kreis iſt. Alle dieſe Puncte O liegen in einer krummen Linie ODKA, deren Natur die Gleichung $c^2 = \frac{r^2 \sin 2\omega}{\sin 2(\omega + \beta)}$ zwiſchen dem veränderlichen Winkel β und dem Abſtand CO $= c$ ausdrückt; und die Vergleichung mit dem 288. §. ergiebt, daß dieſe Gleichung für eine gleichſeitige Hyperbel gehöre, wovon jede halbe Axe $= r\sqrt{\sin 2\omega} = r\sqrt{\sin\psi}$ iſt. Es war nemlich am Ende des angeführten §. ε, η, p, was $\sin\omega$, β, c iſt.

290. §.

In dem allgemeinen Ausdruck $\tang\psi = \frac{c^2 \sin 2\beta}{r^2 - c^2 \cos 2\beta}$ (289. §. n. 2. 3.) ſetze man $\frac{r}{c} = m$, ſo iſt $\tang\psi = \frac{\sin 2\beta}{m^2 - \cos 2\beta}$, oder

$$\tang\psi = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{m^2 - (\cos\beta^2 - \sin\beta^2)}.$$ Man dividire Zähler und Nenner durch $m^2 - \cos\beta^2$, ſo findet man $\tang\psi = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{m^2 - \cos\beta^2}$:

$$\left(1 + \frac{\sin\beta^2}{(m^2 - \cos\beta^2)}\right),$$ oder

tang ψ

$$\tang\psi = \left(\frac{\sin\beta}{m-\cos\beta} - \frac{\sin\beta}{m+\cos\beta}\right)$$

$$:\left(1 + \frac{\sin\beta}{m-\cos\beta} \times \frac{\sin\beta}{m+\cos\beta}\right).$$ Es iſt 105 F.

aber $\tang OAC = \frac{c\sin\beta}{r - c.\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{m-\cos\beta}$,

und $\tang OEC = \frac{c\sin\beta}{r + c.\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{m+\cos\beta}$:

folglich wird $\tang\psi = \frac{\tang OAC - \tang OEC}{1 + \tang OAC.\tang OEC}$,

d. i. $\tang\psi = \tang(OAC - OEC)$, folglich $\psi = OAC - OEC$. Die 105. Fig. ſtellt den Fall beſonders vor, wenn die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene OAE der Axe OC gegen die Grundfläche ſenkrecht iſt, *ea* ſteht nun auf der Grundlinie TV des Schnitts ſenkrecht, und es iſt $ETe = \psi$. Damit alſo der Schnitt ein Kreis werde, muß $FTe = OAC - OEC$ ſeyn. Weil nun ferner $OeT = \psi + OEC$ iſt, und der Schnitt ein Kreis wird, wenn $\psi + OEC = OAE$ iſt, ſo erfordert eben die Bedingung, daß $OeT = OAC$ ſey.

Dieſer auf der Neigungsebene der Axe ſenkrechte Schnitt des ſchiefen Kegels, deſſen Neigungswinkel gegen die Grundfläche ſo groß iſt, als die Differenz der Winkel OAC, OEC, um welche die in der Neigungsebene der Axe liegenden Seitenlinien des Kegels gegen die Grundfläche geneigt ſind, heiſt bey den Alten Sectio coni ſubcontraria, auch wohl Sectio alterna. Weil alsdenn die Winkel OeT und OAC

OAC gleich groß ſind, ſo werden *Oae* und OAE ähnliche Dreyecke, worin auch die Winkel *Oae* und OEA gleich groß ſind.

Weil in dieſem Fall der ſectionis ſubcontrariæ $\surd(b^2 - r^2) = L$ wird, ſo findet man $p = \frac{r(b-\delta)}{\surd(b^2 - r^2)} = q$, als den Halbmeſſer des Schnitts. Es iſt aber $\cot\psi = \frac{r^2 - c^2(\mathrm{coſ}\beta^2 - \mathrm{ſin}\beta^2)}{2c^2\,\mathrm{ſin}\beta\,\mathrm{coſ}\beta}$, alſo

$$\mathrm{ſin}\beta\cot\psi = \frac{r^2 + c^2\,\mathrm{ſin}\beta^2 - c^2\,\mathrm{coſ}\beta^2}{2c^2\,\mathrm{coſ}\beta},$$ und das

giebt $c(\mathrm{ſin}\beta\cot\psi + \mathrm{coſ}\beta) = b = \frac{r^2 + c^2}{2c\,\mathrm{coſ}\beta}$,

folglich $b - \delta = \frac{r^2 + c^2}{2c\,.\,\mathrm{coſ}\beta} - \delta$

$= \frac{r^2 + c^2 - 2c\delta\,\mathrm{coſ}\beta}{2c\,.\,\mathrm{coſ}\beta}$, und $\surd(b^2 - r^2)$

$= \frac{\surd((r^2 + c^2)^2 - 4c^2 r^2\,\mathrm{coſ}\beta)}{2c\,.\,\mathrm{coſ}\beta}$.

Demnach iſt der Halbmeſſer des Schnitts

$$= \frac{r(r^2 + c^2 - 2c\delta\,\mathrm{coſ}\beta)}{\surd((r^2 + c^2)^2 - 4c^2 r^2\,\mathrm{coſ}\beta^2)}.$$

Ferner war im 265. §. $Fc = \frac{\delta.L}{b}$ und

Ff=

$$Ff = \frac{b\delta - r^2}{b^2 - r^2} \cdot L,$$ wenn f des Schnitts Mittelpunct iſt; wobey man bemerken muß, daß die Puncte T und F der 99. und 102. Fig. in T zuſammen fallen, wenn die 105. Fig. verſtanden werden ſoll. Hier hat man aber $L = \surd(b^2 - r^2)$, alſo erhält man $Fc = \frac{\delta\surd(b^2 - r^2)}{b}$, und

$$Ff = \frac{b\delta - r^2}{\surd(b^2 - r^2)},$$ oder

$$Fc = \frac{\delta\surd((r^2 + c^2)^2 - 4c^2 r^2 \cos\beta^2)}{r^2 + c^2},$$ und

$$Ff = \frac{(r^2 + c^2)\delta - 2cr^2 \cos\beta}{\surd((r^2 + c^2)^2 - 4c^2 r^2 \cos\beta^2)}.$$

Der letzte Ausdruck giebt die Stelle, wohin der Mittelpunct des Schnitts fällt, und wenn der Schnitt als eine Projection des Kreiſes betrachtet wird, ſo giebt der erſte das Bild des Mittelpuncts des abgebildeten Kreiſes.

Um die Stelle zu finden, wohin der Mittelpunct des Schnitts fällt, kann man auch aus dem 265. §. $Fa = \frac{(\delta - r)L}{b - r}$, und $Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r}$ nehmen, hiernächſt aber den Abſtand zwiſchen a und e halbiren. Hier iſt nun $L = \surd(b^2 - r^2)$, alſo wird $Fa = \frac{(\delta - r)\surd(b + r)}{\surd(b - r)}$, und

 Fe =

$$Fe = \frac{(\delta + r)\sqrt{(b-r)}}{\sqrt{(b+r)}}.$$

291. §.

Wenn die Axe des ſchiefen Kegels dem Halbmeſſer ſeiner Grundfläche gleich groß iſt, ſo giebt jeder durch die Axe ſenkrechte Schnitt einen Kreis.

Beweis. Wird in der 105. Fig. CO = CA = CE angenommen, ſo liegen die drey Puncte A, O, E im Halbkreiſe über AE, und es iſt AOE = 90°, mithin OAC = 90° − AEO. Nun ſey der Schnitt auf CO ſenkrecht, ſo iſt auch TcC = 90°, und OeT = 90° − COE. Aber COE = AEO, (55. §. Geom.) alſo auch OeT = 90° − AEO, und OeT = OAC. Demnach iſt der Schnitt eine ſectio ſubcontraria die einen Kreis giebt. (290. §.)

Die allgemeine Formul $\text{tang}\,\psi = \frac{c^2 \sin 2\beta}{r^2 - c^2 \cos 2\beta}$ (289. §.) ergiebt auch, daß in dem angenommenen Fall $r = c$ der Schnitt auf der Axe des Kegels ſenkrecht ſeyn müſſe, wenn der Schnitt ein Kreis werden ſoll. Es muß nemlich nun $\frac{\sin 2\beta}{1 - \cos 2\beta} = \text{tang}\,\psi$ ſeyn, oder $\cot\psi = \text{coſec}\,2\beta - \cot 2\beta$, d. i. $\cot\psi = \text{tang}\,\beta$ (457. §. Geom.) mithin $\psi = 90° - \beta$. In der 105. Fig. muß alſo CTe = 90° − TCO, alſo OcT = 90° ſeyn. Aber die Ebene AOE worin die Axe OC liegt, iſt auf der Ebene des Schnitts ſenkrecht, alſo iſt auch OC auf der Ebene des Schnitts nunmehro ſenkrecht. (318. §. Geom.)

Um

Um den Halbmeſſer des Schnitts zu finden, ſetze man im 290. §. $r=c$; ſo wird derſelbe $= \frac{r - \delta \operatorname{coſ}\beta}{\operatorname{ſin}\beta}$ gefunden: oder wenn man ihn $= \varrho$ annimmt, ſo iſt $\varrho = r \operatorname{coſec}\beta - \delta \cot\beta$. Setzt man auch $r=c$ in den Werthen, die für Fc und Ff gefunden wurden, ſo erhält man

$$Fc = \delta \operatorname{ſin}\beta \text{ und } Ff = \frac{\delta - r \operatorname{coſ}\beta}{\operatorname{ſin}\beta},$$

oder $Ff = \delta \operatorname{coſec}\beta - r \cot\beta$.

292 §.

Wenn die Ebene des Schnitts auf der Grundfläche des ſchiefen Kegels, und zugleich auf der Neigungsebene der Axe ſenkrecht ſteht; ſo kann der Schnitt ebenfalls ein Kreis werden. Alsdenn iſt $L = a \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta = a$, weil $\zeta = \psi = 90°$ angenommen wird, mithin wenn der Schnitt ein Kreis werden ſoll $a = \surd(b^2 - r^2)$. Das giebt $b^2 = a^2 + r^2$, aber auch $b = c . \operatorname{coſ}\beta$ (265 §.) und $a = c \operatorname{ſin}\beta$, mithin $c^2 . \operatorname{coſ}\beta^2 = c^2 \operatorname{ſin}\beta^2 + r^2$, oder $c^2 \operatorname{coſ}\beta^2 = c^2 - c^2 \operatorname{coſ}\beta^2 + r$, woraus $\operatorname{coſ}\beta = \frac{\surd \frac{1}{2}(c^2 + r^2)}{c}$ gefunden wird. Eben das wird gefunden, wenn man im 289. §. n. 2. $\cot\psi = \frac{r^2 - c^2 \operatorname{coſ}2\beta}{c \operatorname{ſin} 2\beta} = 0$ ſetzt, weil $\psi = 90°$ angenommen wird; das giebt $\operatorname{coſ}2\beta = \frac{r^2}{c^2}$; mithin $\operatorname{coſ}\beta = \surd \frac{1 + \operatorname{coſ}2\beta}{2}$

(425.

(425. §. Geom.) $=\sqrt{\frac{c^2+r^2}{2c^2}}$. Dies iſt der im 60. §. ſchon betrachtete Fall, und man weis, daß in der Perſpectiv a die Höhe des Auges, und b die Summe der Entfernungen $D+\delta$ bezeichne, weil hier $\operatorname{coſec}\psi = 1$ iſt.

Setzt man den Halbmeſſer des Schnitts $=\varrho$, und nimmt im 290. §. $\operatorname{coſ}\beta = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(c^2+r^2)}}{c}$ an, ſo kann man $2c^2 \operatorname{coſ}\beta^2$ ſtatt c^2+r^2 ſchreiben, und man findet $\varrho = \frac{r(c.\operatorname{coſ}\beta - \delta)}{\sqrt{(c^2.\operatorname{coſ}\beta^2 - r^2)}}$, welches auch die allgemeine Formul $\varrho = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$ giebt. Uebrigens hat man $Fc = \frac{\delta\sqrt{(b^2-r^2)}}{b}$, und $Ff = \frac{b\delta - r^2}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$.

293. §.

Man kann einen jeden Kegel ſo ſchneiden, daß der Schnitt eine Linie wird, deren Gleichung unter der allgemeinen Form $yy = gx - \frac{g}{ep}xx$ enthalten iſt, für einen gegebenen Coordinaten-Winkel ζ. Denn um die Lage des Schnitts zu finden, muß man die drey Gröſſen e, η, ψ, ſuchen, und hiezu dienen allemahl die drey Gleichungen $g = \frac{2r(b-\delta)}{L}$

$$= \frac{2r(c \sin\beta \cot\psi + c \cos\beta \sin\eta - e \sin\eta)}{c \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta},$$

$$\frac{g}{2p} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$$

$$= \frac{c^2 (\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)^2 - r^2}{c^2 \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 \operatorname{cosec}\zeta^2},$$ und

$\tang\zeta = \tang\beta \sec\eta \operatorname{cosec}\psi$. Weil die Geſtalt des Kegels als gegeben angenommen wird, ſo hat man c, β, und r, und aus der gegebenen Gleichung hat man ζ, g und $\frac{g}{2p}$. Demnach werden e, η, ψ, durch die drey angezeigten Gleichungen beſtimmt. Wäre die gegebene Gleichung $yy = gx$ für den Coordinaten-Winkel ζ, ſo hätte man $\frac{g}{2p} = 0$, und die zweyte Gleichung verwandelte ſich in folgende $c(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta) = r$.

Wenn der gegebene Kegel grade iſt, ſo ſchneidet der bisher mit p bezeichnete Durchmeſſer ſeine ihm zugeordneten Ordinaten ſenkrecht. Iſt alſo in dem Fall der Coordinaten-Winkel ζ ſchief, ſo muß man zuförderſt eine Vorbereitungs-Rechnung vornehmen. Man ſuche zwiſchen $2p$ und g eine mittlere Proportionallinie $2q$, ſo hat man $g = \frac{2qq}{p}$, und es werden $2p$ und $2q$ ein Paar Durchmeſſer der gegegebenen Linie für den Coordinaten-Winkel ζ. Alsdenn kann man den 271. und 286. §. gemäß ein Paar Hauptdurchmeſſer a und b für eben dieſe

Li-

Linie finden, die einander zugeordnet ſind, und für welche $\zeta = 90°$ wird. Man brauche demnach a und b ſtatt p und q, ſetze in ſolcher Abſicht nun $\beta = 90°$, weil der Kegel grade iſt, und δ ſtatt $e \sin \eta$, weil η zur Beſtimmung der Lage des Schnitts nicht gebraucht wird. Weiter nehme man

$$\gamma = \frac{2bb}{a},$$ ſo wird γ der Parameter des Haupt-Durchmeſſers a, wobey noch zu bemerken iſt, daß man durch a den gröſſern Hauptdurchmeſſer verſtehen muß, wenn a und b beyde möglich ſind. Nach dieſen Vorbereitungen findet man δ und ψ aus den Gleichungen $$\gamma = \frac{2r(c\cot\psi - \delta)}{c.\operatorname{coſec}\psi},$$ und

$$\frac{\gamma}{2a} = \frac{c^2\cot\psi^2 - r^2}{c^2\operatorname{coſec}\psi^2}. \text{ (266. §.)}$$

Wäre die gegebene Gleichung $yy = gx$ für den Coordinaten-Winkel ζ ſo hätte eben die Linie auch einen Hauptdurchmeſſer, und der zugehörige Parameter wäre $= g\sin\zeta^2$. (273. §.) Demnach hätte man die Gleichungen $$g\sin\zeta^2 = \frac{2r(c.\cot\psi - \delta)}{c.\operatorname{coſec}\psi}$$

und $c.\cot\psi = r$, woraus δ und ψ leicht gefunden werden.

Iſt der gegebene Kegel ſchief, und $\zeta = 90°$, ſo läſt ſich die Linie ſo aus dem Kegel ſchneiden, daß die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene der Axe ſenkrecht ſteht, mithin $\eta = 90°$ wird. Alsdenn iſt nur noch nöthig δ und ψ zu ſuchen, und zwar vermittelſt den Gleichungen

g=

$$g = \frac{2(c \sin\beta \cot\psi + c.\cos\beta - \delta)}{c \sin\beta \operatorname{cosec}\psi}, \text{ und } \frac{g}{2p}$$

$$= \frac{c^2(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta)^2 - r^2}{c^2 \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2}.$$ Wäre ζ ein ſchiefer Winkel, ſo würden zwar e, η, und ψ durch die drey im Anfange dieſes §. angezeigten Gleichungen beſtimmt werden: man kann aber auch alsdenn die gegebene Linie aus dem gegebenen Kegel ſo ſchneiden, daß $\eta = 90°$ wird, wenn man wie kurz vorhin beym graden Kegel gewieſen iſt, zuförderſt den Hauptdurchmeſſer $2a$ und den ihm zugehörigen Parameter γ ſucht, alsdenn aber in den beyden zuletzt angezeigten Gleichungen γ und a ſtatt g und p braucht, um δ und ψ zu finden.

Der XVII. Abſchnitt.

Von den Brennpuncten und Berührungslinien der Kegelſchnitte.

294 §.

Es ſey wiederum a die halbe Zwerg-Axe und b die halbe zugeordnete Axe des Kegelſchnitts, p aber nunmehro der Parameter der Zwergaxe, ſo iſt 106 108 F.
$p =$

$p = \frac{2bb}{a}$. Nun ſind auf der Zwergaxe AB des Kegelſchnitts zuförderſt die beyden Endpuncte A und B merkwürdig, die auch die Scheitelpuncte des Kegelſchnitts heiſſen. (272. §.) Die Ellipſe und Hyperbel haben zweene dergleichen Scheitelpuncte,
107F. die Parabel aber nur einen A, weil der andre von A unendlich weit entfernt iſt. Der Mittelpunct des Kegelſchnitts liegt auf der Zwergaxe in der Mitte zwiſchen den Scheitelpuncten. Auſſer dieſen dreyen Puncten der Zwergaxe giebt es auf derſelben noch ein Paar andre, welche die Eigenſchaft haben, daß die der Zwergaxe zugeordnete Ordinaten, welche durch dieſe Puncte laufen, dem Parameter der Zwergaxe gleich ſind. Sie heiſſen die Brennpuncte des Kegelſchnitts, und die Urſache, woher ſie dieſen Nahmen erhalten haben, wird die weitere Unterſuchung über die Eigenſchaften dieſer Puncte ergeben.

295 §.

Die Brennpuncte des Kegelſchnitts zu finden.

Aufl. Wenn die Abſciſſen AP $= x$ von ei-
106F. nem der Scheitelpuncte angerechnet auf der Zwergaxe genommen werden, und die halbe zugeordnete Ordinate $= y$ geſetzt wird, ſo iſt die Gleichung des Kegelſchnitts dieſe: $yy = px - \frac{p}{2a} xx$. Nun ſey F der geſuchte Brennpunct, ſo muß die ganze Ordinate MN $= 2y = p$ ſeyn, wenn $x =$ AF genom-

nommen wird. Demnach ſetze man $y = \frac{1}{2}p$ in der Gleichung zwiſchen x und y, ſo wird der zugehörige Werth von $x = AF$ ſeyn. Dies giebt $\frac{1}{4}p = x - \frac{xx}{2a}$, und für die Parabel, wo a unendlich groß iſt, giebt dieſe Gleichung $x = \frac{1}{4}p$. Für die Ellipſe und Hyperbel aber findet man weiter $xx - 2ax = -\frac{1}{2}ap$, folglich wird $x = a \pm \sqrt{(aa - \frac{1}{2}ap.)}$ Weil aber $p = \frac{2bb}{a}$, ſo wird $\frac{1}{2}ap = bb$ und man erhält $x = a \pm \sqrt{(aa - bb)}$.

Der doppelte Werth von x zeigt an, daß es auf der Zwergaxe der Ellipſe und Hyperbel zweene Brennpuncte gebe, wovon ein jeder die angenommene Eigenſchaft hat: nur muß man noch bemerken, daß für die Hyperbel a und bb negativ ſind, und daß deswegen für ſelbige $x = -a \pm \sqrt{(aa + bb)}$ angenommen werden müſſe.

Um nun die Brennpuncte durch Zeichnung zu finden, erwäge man, daß in der Ellipſe $AC = a$, $CD = b$ ſey. Mit dem Halbmeſſer $CA = a$ beſchreibe man alſo aus D einen Kreisbogen, der die Zwergaxe in F und G ſchneidet, ſo wird $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$ und $AF = a - \sqrt{(aa - bb)}$ $AG = a + \sqrt{(aa - bb)}$, mithin ſind F und G die Brennpuncte. Man weis alſo zugleich, daß ihr Abſtand vom Mittelpunct $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$ ſey. 106F.

Für die Hyperbel nehme man dem 272. §. gemäß $CD = b$ an, wenn eigentlich die halbe zugeordnete Axe der Hyperbel $= b\sqrt{-1}$ wäre, ſo iſt $AD =$ 108F.

$BD = \sqrt{(aa+bb)}$. Dieſe Linie trage man aus C nach F und G, ſo hat man die Brennpuncte, denn es iſt nun $AF = -a + \sqrt{(aa+bb)}$ und $AG = -a - \sqrt{(aa+bb)}$. Der Abſtand vom Mittelpunct der Hyperbel iſt alſo $= \sqrt{(aa+bb)} = AD = CK$, weil auch $AK = b$ iſt, wenn durch K die Aſymtote geht. (280. §.)

107F. Für die Parabel nimmt man nur $AF = \frac{1}{4}p$, ſo iſt F ihr Brennpunct.

296. §.

Durch einen gegebenen Punct M des Kegelſchnitts eine Berührungslinie zu ziehen.

106F. Aufl. Man ziehe den halben Durchmeſſer
108 CM, und den ihm zugeordneten CN. Dies läſt ſich nach dem 274. §. bewerkſtelligen, weil der Winkel $ACM = \gamma$ gegeben iſt, ſo kann $MCN = \zeta$ aus der Formul $\tang \zeta = \frac{a^2 \tang\gamma + b^2 \cot\gamma}{a^2 - b^2}$ gefunden werden. Hiernächſt ziehe man durch M mit CN eine Parallele MT ſo iſt das die geſuchte Tangente.
107F. In der Parabel ziehe man durch M einen Durchmeſſer MC mit der Zwergaxe parallel, ſo kann man für dieſen Durchmeſſer den Coordinationswinkel $Cpm = \zeta$ finden, weil vermöge des 274. §. $\tang \zeta = \frac{p}{2PM}$ wird. Demnach ziehe man MT ſo, daß $CMt = \zeta$ wird, ſo iſt MT die geſuchte Tangente.

Beweis. Wenn man die dem Durchmeſſer zugehörige Sehne $m\mu$ ziehet, die ihn in p ſchneidet, fer-

ferner aber $Mp = x$, $pm = y$, $MC = p$, und den Parameter des Durchmeſſers $MQ = g$ ſetzt, ſo iſt die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt $y = \pm \surd (gx - \frac{g}{2p} xx)$. Für keine poſitive Werthe von x ſind beyde Werthe y möglich bis $x = 0$ wird. Für kleine negative Werthe von x aber, ſo bald x unter 0 abnimmt, werden beyde y unmöglich. Demnach liegen beyde Aeſte Mm, $M\mu$, mithin der ganze Bogen $mM\mu$ des Kegelſchnitts, auf der Seite von M, wo p liegt. Die grade Linie MT hat mit dem Kegelſchnitt zwar den Punct M gemein, fällt aber auf beyden Seiten des Puncts M auſſerhalb des Kegelſchnitts, mithin berührt ſie ihn in M.

297. §.

Die Lage der Tangente gegen die Zwergaxe zu finden, wenn die Stelle des Berührungspuncts M durch CP oder AP und PM gegeben iſt.

Aufl. Wenn die Tangente und Zwergaxe einander in T ſchneiden; ſo kommt es darauf an, daß man AT, oder CT, nebſt dem Winkel ATM 106 F. ſuche, weil durch beydes die Lage der Tangente gegen die Zwergaxe beſtimmt wird. Behält man nun die Bezeichnungen des 274. §. für die Winkel bey, ſo iſt $ACM = \gamma$, $CMt = \zeta$, mithin $MCN = 180° - \zeta$. Ferner iſt $BCN = CTM$ der geſuchte Winkel, und wenn dieſer $= \delta$ geſetzt wird, ſo hat man $ACM + MCN + BCN = 180°$, d. i. $\gamma + 180° - \zeta + \delta = 180°$, und es wird $\delta = \zeta - \gamma$. Dies iſt derſelbe Winkel, welcher im 274. §. mit δ bezeichnet

 ward,

ward, wie die Vergleichung ergeben wird. Es iſt aber vermöge des 274. §. $\tang\delta = \frac{b^2}{a^2}\cot\gamma$, und wenn hier $CP = x$, $PM = y$ geſetzt wird, ſo hat man $\cot\gamma = \frac{x}{y}$, mithin $\tang\delta = \frac{b^2 x}{a^2 y}$. Weiter wird $PT = y\cot\delta$, mithin $PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$.

Die Natur des Kegelſchnitts aber giebt $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, alſo $aayy = a^2 b^2 - bbxx$, und man erhält $PT = \frac{a^2 b^2 - bbxx}{b^2 x} = \frac{a^2}{x} - x$, woraus $CT = PT + x = \frac{aa}{x}$, und $AT = CT - a = \frac{aa}{x} - a = \frac{(a-x)a}{x}$ gefunden wird, da dann $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$ geſetzt $\tang\delta = \frac{bx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$ giebt.

108F. Für die Hyperbel iſt $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, mithin $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$, und man findet $PT = \frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{b^2 x} = x - \frac{aa}{x}$.

Ferner iſt $CT = x - PT$, alſo wiederum

CT =

$CT = \frac{aa}{x}$; ſo wie $AT = AC - CT\, a - \frac{aa}{x}$,

und $\tang \delta = \frac{bx}{a\sqrt{(xx - aa)}}$.

In der Parabel iſt $\gamma = 0$, und $\delta = \zeta$, alſo 107 F.

$\tang \delta = \tang PTM = \frac{p}{2y}$, und

$PT = y \cot PTM = \frac{2yy}{p}$. Weil man aber für die Parabel, $AP = x$ geſetzt, $yy = px$ hat, ſo wird $PT = 2x$, mithin $AT = x$.

Statt der Entfernungen AT und CT des Puncts T vom Scheitelpunct, oder Mittelpunct des Kegelſchnitts laſſen ſich auch die Entfernungen FT, GT von den Brennpuncten brauchen. Man findet nemlich für die Ellipſe $FT = CT - CF = \frac{aa}{x}$

$- \sqrt{(aa - bb)} = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$, und

$GT = CT + CG = \frac{aa}{x} + \sqrt{(aa - bb)}$

$= \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$. In der Hyperbel iſt

$FT = CF - CT = \sqrt{(aa + bb)} - \frac{aa}{x}$

$= \frac{x\sqrt{(aa + bb)} - aa}{x}$, und $GT = CG + CT$

$= \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{x}$. In der Parabel aber wird $FCT = AF + AT = \frac{1}{4}p + x$.

Weil man dieſen Schlüſſen gemäß den Punct T, worin die Tangente und Zwergaxe einander ſchneiden auf mehr als eine Art finden kann, wenn nur die dem Punct M zugehörige Abſciſſe gegeben iſt; ſo läſt ſich hiernächſt die Tangente leicht durch M und T ziehen. Und ſo wird dies zugleich ein leichtes Hülfsmittel, wenn der halbe Durchmeſſer CM gegeben iſt, den ihm zugeordneten CN durch Zeichnung zu finden.

298 §.

Die Gröſſe der Tangente MT zwiſchen dem Berührungspunct M und dem Durchſchnittspunct T mit der Zwergaxe zu finden.

Aufl. Es iſt $TM^2 = PT^2 + PM^2 = \frac{a^4y^4}{b^4x^2} + y^2 = \frac{a^4y^4 + b^4x^2y^2}{b^4x^2} = \frac{yy}{b^4x^2}\cdot(a^4y^2 + b^4x^2)$, und $aayy = aabb - bbxx$; alſo $MT^2 = \frac{yy}{b^4x^2}(a^4b^2 - a^2b^2x^2 + b^4x^2) = \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{x^2}$. Im vor. §. war $FT = \frac{aa - x\sqrt{(aa-bb)}}{x}$, und

GT =

$GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$, demnach wird

$MT^2 = \frac{y^2}{b^2} . FT . GT$ und $MT = \frac{y}{b}\sqrt{}$ $FT . GT$.

Für die Hyperbel hat man $aayy = bbxx - aabb$, alſo $TM^2 = \frac{yy}{b^4 x^2}(a^2 b^2 x^2 - a^4 b^2 + b^4 x^2) = \frac{y^2}{b^2} . \frac{x^2(a^2 + b^2) - a^4}{x^2}$, mithin ebenfalls $MT = \frac{y}{b}\sqrt{FT . GT}$.

Für die Parabel wird aber $MT^2 = y^2 + 4x^2 = px + 4xx$, und $MT = \sqrt{x(p + 4x)}$, oder auch $MT = 2\sqrt{x(\frac{1}{4}p + x)} = 2\sqrt{AP . FT}$ (297. §.), oder $MT = 2\sqrt{FT . AT}$.

299. §.

Die Linie PT, welche zwiſchen dem Durchſchnittspunct der Tangente und Abſciſſenlinie und der dem Berührungspunct zugehörigen Applicate liegt, und welche bisher zur Beſtimmung der Lage der Tangente gebraucht iſt, heiſt die Subtangente der krummen Linie. Zieht man durch M auf der Tangente eine andre grade Linie MR ſenkrecht; ſo ſtehet dieſe zugleich in dem Punct M auf der krummen Linie ſelbſt ſenkrecht: und wenn ſie die Abſciſſenlinie in R ſchneidet, ſo heiſt PR die Subnormallinie, ſo wie MR ſelbſt die Normallinie genannt wird.

Die Subnormallinie PR kann eben ſo, wie die Subtangente zur Beſtimmung der Lage der Tangente MT dienen. Hat man nemlich PR, und zieht RM, ſo kann man durch M die Tangente auf RM ſenkrecht ziehen.

300. §.

Für einen gegebenen Punct M des Regelſchnitts die Subnormallinie zu finden.

Aufl. Es iſt $PR = \frac{PM^2}{PT}$ (214. §. G.)

und es war $PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$ (297. §.) mithin erhält

man $PR = \frac{b^2 x}{a^2}$. In der Parabel iſt $PT = 2x$,

mithin wird $PR = \frac{y^2}{2x} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$.

Die Normallinie ſelbſt kann man vermittelſt der Proportion finden $PM : MT = PR : MR$, d. i.

$y : \frac{y}{b}\sqrt{FT \,.\, GT} = \frac{b^2 x}{a^2} : MR$, und das giebt

$MR = \frac{bx}{aa}\sqrt{FT \,.\, GT}$; in der Parabel aber

$y : 2\sqrt{FT \,.\, AT} = \frac{1}{2}p : MR$, mithin $MR = \frac{p}{y}\sqrt{FT \,.\, AT}$.

301. §.

Wenn von einerley Punct M der Ellipſe, oder Hyperbel in beyde Brennpuncte F und G grade Linien MF, MG gezogen werden; ſo iſt in der Ellipſe die Summe dieſer Linien, in der Hyperbel aber ihre Differenz der Zwergaxe gleich.

Beweis. Es iſt $FM^2 = PF^2 + PM^2$, und $GM^2 = PG^2 + PM^2$. Weil nun in der Ellipſe $PF = CF - CP = \sqrt{(aa-bb)} - x$, und $PG = CG + CP = \sqrt{(aa-bb)} + x$; ſo erhält man $FM^2 = aa - bb - 2x\sqrt{(aa-bb)} + xx + yy$, und $GM^2 = aa - bb + 2x\sqrt{(aa-bb)} + xx + yy$. Aber die Gleichung für die Ellipſe giebt $yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$,

alſo wird $FM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa-bb)} + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$, und $GM^2 = aa + 2x\sqrt{(aa+bb)} + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$. Aus beyden Werthen läſt ſich die Quadratwurzel nehmen, und man erhält $FM = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, ſo wie $GM = a + \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$. Demnach iſt die Summe $FM + GM = 2a$.

In der Hyperbel hat man $PF = CP - CF = x - \sqrt{(aa+bb)}$, und

 PG=

$PG = CP + CG = x + \surd\,(aa + bb)$, mithin $FM^2 = x^2 - 2x\surd\,(aa + bb) + aa + bb + yy$, und $GM^2 = x^2 + 2x\surd\,(aa + bb) + aa + bb + yy$. Aber die Gleichung der Hyperbel iſt $yy = \frac{bb\,xx}{aa} - bb$, alſo erhält man

$$FM^2 = \frac{(aa + bb)\,xx}{aa} - 2x\surd\,(aa + bb) + aa,$$

$$GM^2 = \frac{(aa + bb)\,xx}{aa} + 2x\surd\,(aa + bb) + aa.$$

Das giebt $FM = \frac{x\surd\,(aa + bb)}{a} - a$,

$$GM = \frac{x\surd\,(aa + bb)}{a} + a,$$ mithin

$GM - FM = 2a$.

302 §.

Beyde grade Linien, MF, MG, welche aus dem Punct M des Kegelſchnitts in die Brennpuncte laufen, ſind gegen die Tangente in M unter einerley Winkel geneigt.

Beweis. Im Dreyeck FMT iſt $\sin FMT = \frac{FT}{FM}\sin CTM$, und im Dreyeck GTM hat man $\sin GMT = \frac{GT}{GM}\sin CTM$. Es iſt aber

106 F. in der Ellipſe $FT = \frac{aa - x\surd\,(aa - bb)}{x}$,

GT =

$GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$; (297. §.) ferner iſt

$FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ und

$GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ (301 §.) Folglich

hat man $FT : FM = a : x$, und $GT : GM = a : x$, und das giebt ferner $\frac{FT}{FM} = \frac{GT}{GM}$, alſo $\sin FMT = \sin GMT$, und $GMT = 180° - FMT$. Aber auch GMT 180° − GMt, folglich FMT = GMt.

In der Hyperbel iſt $FT = \frac{x\sqrt{(aa + bb)} - aa}{x}$, 108 F.

$GT = \frac{x\sqrt{(aa + bb)} + aa}{x}$ (297. §.) und

überdem $FM = \frac{x\sqrt{(aa + bb)} - aa}{a}$,

$GM = \frac{x\sqrt{(aa + bb)} + aa}{a}$. (301. §.) Mithin

ebenfalls $\frac{FT}{FM} = \frac{a}{x} = \frac{GT}{GM}$, und

$\sin FMT = \sin GMT$, alſo hier FMT = GMT, oder FMT = gMt.

303. §.

107 F. Wenn man aus einem Punct M der Parabel eine grade Linie MF in den Brennpunct ziehet, und zugleich die Tangente MT, ſo wird MF = FT.

Beweis. Es iſt $FM^2 = PF^2 + PM^2$, und $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, alſo $FM^2 = xx - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}pp + yy$. Weil nun die Gleichung für die Parabel $yy = px$ giebt, ſo findet man $FM^2 = xx + \frac{1}{2}p.x + \frac{1}{16}pp$, und $FM = x + \frac{1}{4}p$. Aber auch $FT = x + \frac{1}{4}p$, (297. §.) mithin FM = FT.

304 §.

Wird durch M ein Durchmeſſer der Parabel MG gezogen, und überdem wie vorhin MF nebſt der Tangente MT; ſo ſind MG, MF gegen die Tangente unter einerley Winkel geneigt.

Beweis. Weil MG mit AC parallel iſt, ſo hat man GM*t* = CTM. Weil ferner FT = FM iſt, (303 §.) ſo hat man auch CTM = FMT, mithin GM*t* = FMT.

305 §.

Von der im 302. und 304. §. bewieſenen Eigenſchaft haben die Brennpuncte des Kegelſchnitts ihre Nahmen erhalten. Wenn ein Lichtſtrahl auf eine Fläche fällt, die ihn zurück wirft, ſo iſt der Einfalls-Winkel ſo groß als der Zurückwerfungswinkel, wovon die Catoptrik weitern Unterricht geben wird. Wäre alſo GM ein auf M fallender Lichtſtrahl, ſo würde er nach MF zurückgeworfen werden. Alle

Strah-

Strahlen, welche auf den Bogen MAN der Parabel mit der Zwergaxe parallel fallen, werden ſo zurück geworfen, daß ſie ſich in F vereinigen: und wenn dies Sonnenſtrahlen ſind, ſo verurſachen ſie in F eine Hitze, wodurch brennbare Körper entzündet werden können. Mit den Brennpuncten der übrigen Kegelſchnitte hat es eine ähnliche Bewandniß, und in der Catoptrik wird davon umſtändlicher gehandelt werden.

306. §.

Wenn AMDBEA eine Ellipſe, AB ihre Zwergaxe, DE ihre zugeordnete Axe iſt, PM aber eine 109F.
auf AB ſenkrechte halbe Ordinate; wenn ferner aus dem Mittelpunct C der Ellipſe mit einem der halben Zwergaxe CA gleichen Halbmeſſer ein Kreis verzeichnet wird, und man verlängert PM bis an den Umfang des Kreiſes in N; ſo iſt PM:PN=CD:CA.

Denn CP=x geſetzt hat man PM= $\frac{b}{a}\surd(aa-xx)$,

und PN=$\surd(aa-xx)$, mithin PM:PN= $\frac{b}{a}:1$,

oder PM:PN=$b:a$=CD:CA.

Dieſe Eigenſchaft der Ellipſe leitet auf ein in manchen Fällen bequemes Mittel, wenn der Mittelpunct und beyde Axen der Ellipſe gegeben ſind, ſo viele Puncte im Umfang der Ellipſe, als man verlangt zu finden. Durch den Mittelpunct C ziehe man AB und DE auf einander ſenkrecht, und mache CA=CB der halben Zwergaxe a, CD=CE der halben zugeordneten Axe b gleich. Um hiernächſt

für

für eine angenommene Abſciſſe CP $=x$ die dazu gehörige Ordinate zu finden, verzeichne man aus dem Mittelpunct C mit den Halbmeſſern CA und CD ein paar Kreiſe, ziehe durch P eine auf AB ſenkrechte Ordinate PN des Kreiſes ANB, hiernächſt aber den Halbmeſſer CN, und wenn derſelbe den Kreis DnE in n ſchneidet, ſo ziehe man durch n mit AB eine Parallele np, welche PN in M ſchneidet, ſo iſt PM die der Abſciſſe CP zugehörige halbe Ordinate der Ellipſe, und M liegt in ihrem Umfang. Denn es iſt CN : Cn = PN : PM, oder $a:b=$ PN : PM, und

$$PN=\sqrt{(aa-xx)},\ \text{mithin } PM=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)},$$

wie erfordert wird.

Die Bogen AN und an ſind einander ähnlich, und faſſen von ihren Peripherien gleich viele Grade, wenn N, n, C in grader Linie liegen: und umgekehrt, wenn die Bogen AN und an von gleich vielen Graden angenommen werden, ſo liegen C, n, N, in grader Linie. Wird hiernächſt NP mit DE, und np mit AB parallel gezogen, ſo ſchneiden beyde Parallelen einander in einem Punct M, der in der Ellipſe liegt. Iſt nun der zu dieſen ähnlichen Bogen gehörige Winkel am Mittelpunct $=\varphi$, ſo gehört der Punct M in der Ellipſe zu einer Abſciſſe $x=a.\cos\varphi$, und die ihr zugehörige halbe Ordinate $y=$ PM

$$\text{wird}=\frac{b}{a}\cdot a\sin\varphi,=b\sin\varphi=qn.$$

Man kann alſo nun den Mittelpunct C, wenn die beyden Hauptaxen AB und DE gegeben ſind die Ellipſe auf folgende Art zeichnen.

Um den Mittelpunct C verzeichne man mit den Halbmeſſern CA und CD Kreiſe, und theile jeden von den beyden Quadranten AF, *a*D, in eine beliebige Anzahl gleicher oder ungleicher Theile wie man will, nur daß die Theile des einen, den Theilen des andern ähnlich werden. In ſolcher Abſicht kann man die Theilungspuncte in AF willkührlich nehmen, hierauf aber an jeden dieſer Theilungspuncte N und den Mittelpunct C das Lineal legen, ſo giebt ſich in *a*D der gleichnahmige Theilungspunct *n*. Durch alle Theilungspuncte in AF ziehe man mit der kleinen Axe, und durch alle Theilungspuncte in *a*D mit der Zwergaxe Parallelen, ſo geben die Durchſchnitte von jedem Paar zuſammen gehöriger Parallelen, ſo viele Puncte in der Ellipſe. Auf dieſe Art läßt ſich der Quadrant der Ellipſe AMD zeichnen; und wenn man mit den beyden Quadranten FB und *a*E eben ſo umgeht, ſo ſiehet man wohl, daß für alle vier Quadranten der Ellipſe eben ſo viele Puncte gefunden werden, mithin läßt ſich die ganze Ellipſe zeichnen. 113 F.

Auf die im 301. §. erwieſene Eigenſchaft der Ellipſe gründet ſich eine Art, die Ellipſe auf einer Ebene durch ſtetige Bewegung eines Puncts zu verzeichnen, wenn ihre Brennpuncte F, G, nebſt der Länge der Zwergaxe gegeben ſind. Man befeſtige die äuſſerſten Enden eines Fadens, der ſo lang iſt, als die Zwergaxe ſeyn ſoll, in den beyden Brennpuncten, dehne hiernächſt den Faden vermittelſt eines Stifts, und führe letztern ſo herum, daß der Faden beſtändig gedehnt bleibt, ſo wird der Stift die Ellipſe beſchreiben. Während dieſer Bewegung

des Stifts, den man ſich in M vorſtellen kann, werden ſich die beyden Enden deſſelben FM, GM um F und G drehen müſſen, und damit die Länge des Fadens während dieſer Bewegung ſich nicht ändern, muß man die Einrichtung ſo machen, daß ſich MF und MG völlig frey um F und G drehen können. Hieraus wird zugleich begreiflich, wie ſich ein Inſtrument angeben lieſſe, vermittelſt deſſen man die Ellipſe auf ähnliche Art, wie die Kreislinie vermittelſt des Cirkel-Inſtruments verzeichnen könnte. Für die Parabel und Hyperbel laſſen ſich dergleichen Inſtrumente ebenfalls angeben. Weil ihr Gebrauch aber bey weiten ſo bequem nicht gemacht werden kann, wie der Gebrauch des Cirkel-Inſtruments, ſo begnügt man ſich gewöhnlich, ſo viele Puncte zu ſuchen, als man jedesmahl nöthig findet, durch welche der Kegelſchnitt durchgehen muß, und ihn hiernächſt aus freyer Hand durch dieſe Puncte durchzuführen, ſo wie dazu für die Ellipſe nicht allein hier, ſondern auch oben im 69. u. f. §. §. beſondre Anleitungen ſind gegeben worden.

Der

Der XVIII. Abſchnitt.

Von einigen beſondern Eigenſchaften der Hyperbel, und ihrer Aſymtoten.

307. §.

Wenn man aus einem Brennpunct G der Hyperbel auf eine Aſymtote eine grade Linie GH ſenkrecht zieht, ſo wird GH $= b$, und das Stück der Aſymtote CH $= a$. 108F

Beweis. In den Dreyecken GCH und ACK ſind die Winkel an C gleich groß, bey A und H aber ſind rechte Winkel. Ueberdem iſt CA $= a$, AK $= b$ (280. §.) alſo CK $= \surd\,(aa + bb)$. Weil nun auch CG $= \surd\,(aa + bb)$, (295 §.) ſo erhält man CG $=$ CK. Dieſemnach haben die Dreyecke GCH, und ACK gleiche Seiten und Winkel, und man findet CH $=$ CA $= a$, ſo wie GH $=$ AK $= b$.

308 §.

Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden, wenn die Abſciſſen auf einer Aſymtote vom Mittelpunkt angerechnet, und die Applicaten darauf ſenkrecht angenommen werden.

Aufl. Es ſey Mp auf der Aſymtote CS ſenkrecht, und C$p = t$, pM $= u$, der halbe Aſymtoten- 110F

Winkel ACS $=\alpha$. Wenn nun CB und pM einander in q ſchneiden; ſo hat man $Cq = t \sec\alpha$, $Pq = y \tang\alpha$, alſo $CP = x = t \sec\alpha + y \tang\alpha$. Ferner iſt $pq = t.\tang\alpha$, $qM = y \sec\alpha$, mithin $pM = u = t.\tang\alpha + y \sec\alpha$. Die letzte Gleichung giebt $y = u \cos\alpha - t \sin\alpha$, und dieſer Werth in die erſte geſetzt giebt $x = t \sec\alpha + u \sin\alpha - t \sin\alpha \tang\alpha$. Es iſt aber $\sec\alpha - \sin\alpha \tang\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha} = \cos\alpha$, mithin wird $x = t \cos\alpha + u \sin\alpha$. Die gefundenen Werthe von x und y ſetze man in die Gleichung zwiſchen $CP = x$, und $PM = y$, welche für die Hyperbel dieſe war $yy = \frac{bb}{aa} xx - bb$, und nehme $\frac{b}{a} = n$ an, ſo findet man

$$\left.\begin{matrix}\cos\alpha^2 \\ - n^2 \sin\alpha^2\end{matrix}\right\}.u^2 \quad \left.\begin{matrix}- \; 2 \sin\alpha\cos\alpha \\ - \; 2n^2 \sin\alpha\cos\alpha\end{matrix}\right\}.tu$$

$$\left.\begin{matrix}+ \sin\alpha^2 \\ - n^2 \cos\alpha^2\end{matrix}\right\}.t \quad + \quad b^2 = 0.$$

Weiter bemerke man, daß $n = \frac{b}{a} = \tang\alpha$ ſey, ſo wird $n^2 \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2$, und $\sin\alpha^2 - n^2 \cos\alpha^2 = 0$. Eben ſo iſt $\sin\alpha \cos\alpha + n^2 \sin\alpha \cos\alpha = \sec\alpha^2 \sin\alpha \cos\alpha = \tang\alpha$, und $\cos\alpha^2 + n^2 \sin\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2 - \tang\alpha^2 \sin\alpha^2 = 1 - \sec\alpha^2 \sin\alpha^2 = 1 - \tang\alpha^2$. Demnach erhält man

$$u^2 - \frac{2 \tang\alpha}{1 - \tang\alpha^2} . tu + \frac{b^2}{1 - \tang\alpha^2} = 0,$$

oder

oder $u^2 - \frac{2\,\mathrm{tang}\,\alpha\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}\cdot tu + \frac{b^2\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2} = 0$, d. i. $u^2 - \mathrm{tang}\,2\alpha \,.\, tu + \frac{b^2\cos\alpha^2}{\cos 2\alpha} = 0$. Aus $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{b}{a}$ findet man nun $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos 2\alpha = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $\mathrm{tang}\,2\alpha = \frac{2ab}{aa-bb}$, und $\frac{\cos\alpha^2}{\cos 2\alpha} = \frac{aa}{aa-bb}$. Demnach verwandelt ſich die gefundene Gleichung in folgende $uu - \frac{2ab}{aa-bb}\cdot tu + \frac{aabb}{aa-bb} = 0$.

309. §.

Die gefundene Gleichung ſo zu verändern, daß zwar eine Aſymtote die Abſciſſenlinie bleibt, den Anfangspunct der Abſciſſen im Mittelpunct genommen, die Applicaten aber mit der andern Aſymtote parallel laufen.

Aufl. Man ziehe MQ mit der Aſymtote CV parallel, ſetze $CQ = r$, $QM = s$; ſo hat man $pM = u = s \,.\, \sin 2\alpha$, $Qp = s \,.\, \cos 2\alpha$, und $Cp = t = r + s \,.\, \cos 2\alpha$. Dieſe Werthe ſetze man ſtatt t und u in der Gleichung des vor. §. ſo findet man

man $tu = r.s.\sin 2\alpha + ss.\sin 2\alpha \cos 2\alpha$, und $ss.\sin 2\alpha^2 - \text{tang}\, 2\alpha \sin 2\alpha.r.s - \text{tang}\, 2\alpha \sin 2\alpha$

$$\cos 2\alpha.ss + \frac{bb\cos\alpha^2}{\cos 2\alpha} = 0.$$ Es iſt aber

$\text{tang}\, 2\alpha \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \sin 2\alpha^2$, alſo wird $\sin 2\alpha^2.$

$r.s = bb.\cos\alpha^2$, oder $r.s = \dfrac{bb\cos\alpha^2}{\sin 2\alpha^2}$: und

weil $bb\cos\alpha^2 = \dfrac{aa\,bb}{aa+bb}$, $\sin 2\alpha^2 = \dfrac{4\,aa\,bb}{(aa+bb)^2}$,

ſo erhält man $r.s = \frac{1}{4}(aa+bb)$.

Vom Scheitelpunct A der Hyperpel ziehe man AB und AD mit den Aſymtoten parallel, ſo wird CD = DL, weil AK = AL iſt; überdem war $CL = \sqrt{(aa+bb)}$ alſo iſt $CD = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)}$. Aber vermöge der gefundenen Gleichung iſt $CD.DA = \frac{1}{4}(aa+bb)$, alſo wird auch $DA = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)}$, und CD = DA. Eben daſſelbe fließt auch ſchon daraus, weil CL : DL = CK : DA, und $DL = \frac{1}{2}CL$, ſo iſt $DA = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{2}CL = CD$. Wird alſo CD = DA $= h$ geſetzt, ſo hat man für die Hyperbel die Gleichung $r.s = hh$.

310. §.

Man nennt dies die Gleichung der Hyperbel zwiſchen ihren Aſymtoten. Sie drückt die Eigenſchaft der Hyperbel aus, daß das Parallelogramm CRMQ allemahl einerley Gröſſe behalte, wo auch der Punct M in der Hyperbel angenommen wird: es bleibt nemlich beſtändig eben ſo groß, als das gleichſeitige Parallelogramm ABCD iſt, und

das letztere wird auch die Potenz der Hyperbel genannt. In der gleichſeitigen Hyperbel wird dies ein Quadrat, und das Parallelogramm CRMQ wird ein Rechteck.

311. §.

Wenn man die der Zwergaxe zugehörige Ordinate MN bis an die Aſymtoten in m und n verlängert; ſo iſt das Rechteck $Mm . Mn = bb$, alſo unveränderlich. 108 F.

Beweis. Es iſt $Pm = \frac{b}{a} x$, $CP = x$ geſetzt, und $PM = \frac{b}{a} \sqrt{(xx - aa)}$, alſo $Pm^2 - PM^2 = bb$, oder $(Pm - PM) . (Pm + PM) = bb$, d. i. $Mm . (Pn + PM) = Mm . Mn = bb$.

Demnach iſt auch $Nn . Nm = Mm . Nm = Nn . Mn = bb$.

312 §.

Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden, wenn zwar eine Aſymtote die Abſciſſenlinie bleibt, und der Mittelpunct zugleich der Anfangspunct der Abſciſſen, der Coordinaten-Winkel aber eine gegebene Gröſſe haben ſoll.

Aufl. Es ſchneide die Applicate MS die Aſymtote CL unter einem beliebigen Winkel $CSM = \varphi$, und treffe verlängert die andre Aſymtote in V, ſo ſchneidet ſie ſelbige daſelbſt unter einem Winkel $= 180° - (2\alpha + \varphi)$. Wenn nun MQ mit 110 F.

der Aſymtote CK parallel iſt, ſo hat man $MQS = 2\alpha$; und, wenn man $CS = p$, $SM = q$ ſetzt, ſo wird $QM = \frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha} \cdot q$, $CQ = p - QS = p - \frac{\sin(2\alpha + \varphi)}{\sin 2\alpha} \cdot q$. Dieſe Werthe ſetze man in die Gleichung $CQ . QM = hh$, (309. §.) ſo findet man $\left(p - \frac{\sin(2\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha} \cdot q\right) \frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha} \cdot q = hh$, oder $\frac{\sin\varphi . \sin(2\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha^2} \cdot q^2 - \frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha} p . q = - hh$, oder auch

$$q^2 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)} p . q + \frac{hh . \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha+\varphi)} = 0.$$

313. §.

110F. Wenn man in der Hyperbel eine Sehne MN in willkührlicher Lage zieht, und ſelbige bis an beyde Aſymtoten in S und V verlängert; ſo iſt allemahl $NS = MV$, und das Rechteck $MV . MS = NV . NS$ bleibt für jede mit MN parallele Sehne von beſtändiger Gröſſe.

Beweis. Vermöge der im vor. §. gefundenen Gleichung hat für jede Abſciſſe $CS = p$, die Ordinate q zwey Werthe SN und SM, deren Summe $SN + SM = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)} \cdot p$, (201. §. Allg.

Rech.

Rech.) Es iſt aber $VS = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \varphi)} \cdot p$, alſo $SN + SM = SV = SM + MV$. Folglich $NS = MV$, und daraus folgt, daß auch $SM = NV$ ſey. Ferner iſt vermöge eben der Gleichung des vor. §. $SN . SM = \frac{hh \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha + \varphi)}$. (201. §. Allg. Rech.) und dieſer Ausdruck bleibt einerley, wenn φ einerley bleibt. Demnach bleibt das Rechteck $SN . SM = SN . NV = MV . MS$ für jede mit MN parallele Sehne einerley.

Wenn man EF mit VS parallel ziehet, ſo iſt $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\varphi} = \frac{EF}{CE}$, und $\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \varphi)} = \frac{EF}{CF}$, mithin wird $SN . SM = \frac{EF^2 . hh}{CE . CF}$, und dieſe Gröſſe bleibt einerley, ſo lange VS mit EF parallel bleibt. Demnach iſt auch $MV . MS = NS . NV = \frac{EF^2 . hh}{CE . CF}$.

314. §.

Die Gleichung zwiſchen p und q (312. §.) giebt

$$q = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \varphi)} \cdot \tfrac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha^2}{\sin(2\alpha + \varphi)^2} \cdot \tfrac{1}{4} p^2 - \frac{hh \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha + \varphi)}\right)},$$

und beyde Werthe werden gleich groß, nemlich beyde =

$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)} \cdot \frac{1}{2}p$, wenn $\frac{\sin 2\alpha^2}{\sin(2\alpha+\varphi)^2}$

$\cdot \frac{1}{4}p^2 = \frac{hh \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha+\varphi)}$ iſt, oder

$\frac{1}{4}p^2 = \frac{hh \sin(2\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}$. Man ſetze, daß dies erfolge, wenn $p=$ CW iſt, und ziehe WG mit SM parallel, ſo müſſen nun die Puncte M und N in G zuſammen fallen, und man hat WG $= \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)} \cdot \frac{1}{2}p$. Durch G ſey GH mit CV parallel gezogen, ſo wird auch WG $= \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)}$. WH, mithin WH $= \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$CW. Demnach iſt CH $= \frac{1}{2}p =$ WH und wenn WG die Aſymtote CV in Z trift, ſo wird GZ = WG.

Die grade Linie WZ berührt die Hyperbel in G, weil für poſitive Werthe von p die kleiner als CW ſind, beyde Werthe von q unmöglich werden, für gröſſere aber allemahl möglich ſind. Uebrigens liegt G in der Hyperbel und zugleich in WZ, mithin liegt der Bogen NGM ganz auf einer Seite der Linie WZ, und ſtößt nur mit ihr in dem einzigen Punct G zuſammen, ohne ſie zu ſchneiden.

Demnach folgt aus den bisherigen Schlüſſen umgekehrt eine leichte Methode, durch einen gegebenen Punct G der Hyperbel eine Tangente zu ziehen. Man ziehet GH mit einer Aſymtote parallel, nimmt HW = CH, und ziehet durch W

und G eine grade Linie: dies iſt alsdenn die geſuchte Tangente. Eben die Methode dient, für einen gegebenen halben Durchmeſſer CG den zugehörigen Conjugations-Winkel CGW zu finden.

Man ſtelle ſich vor, die Sehne NM werde um den Punct N umgedreht, ſo daß der Winkel CNM wachſe; ſo wird der Durchſchnittspunct S gegen C zu, V aber von C wegrücken. Zugleich wird der Winkel CSN $= \varphi$ wachſen. So lange alsdenn $2\alpha + \varphi < 180°$ bleibt, ſo lange fällt der Durchſchnittspunct V auf der Seite von C wo B liegt. Wird $2\alpha + \varphi = 180$, ſo giebt es gar keinen ſolchen Durchſchnittspunct mehr, und wenn $2\alpha + \varphi > 180$ wird, ſo fällt dieſer Durchſchnittspunct auf der andern Seite von C in v, und M fällt in dem entgegen geſetzten Stück der Hyperbel in m. Im letzten Fall iſt $\sin(2\alpha + \varphi)$ negativ, und man hat alsdenn zwiſchen $p = Cs$ und $q = sN$ die Gleichung

$$q^2 + \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)} \cdot p \cdot q - \frac{hh \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha+\varphi)} = 0,$$

und $q = -\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\varphi)} \cdot \frac{1}{2} p$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha^2}{\sin(2\alpha+\varphi)^2} \cdot \frac{1}{4} p^2 + \frac{hh \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha+\varphi)}\right)}.$$ Beyde Werthe ſind nun allemahl möglich, und der eine iſt poſitiv, der

andre negativ. Ueberdem iſt nun $sm - sN = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \varphi)} \cdot p$, ſo wie auch

$sv = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \varphi)} \cdot p$, alſo $sm - sN = sv = sm - vm$; mithin $sN = vm$. Ueberdem iſt $sN . sm = \frac{hh \sin 2\alpha^2}{\sin\varphi \sin(2\alpha + \varphi)}$: wird alſo E$f$ mit Nm parallel gezogen, ſo hat man $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\varphi} = \frac{Ef}{CE}$,

$\frac{\sin 2\alpha}{-\sin(2\alpha + \varphi)} = \frac{Ef}{Cf}$, folglich wird

$sN . sm = \frac{Ef . hh}{CE . Cf} = vm . vN.$

315 §.

1.) Zu den beſondern Eigenſchaften der Hyperbel, wodurch ſie ſich vornemlich von der Ellipſe unterſcheidet, gehörte der im 279. §. ſchon bemerkte Umſtand, daß nicht alle ihre Durchmeſſer, wie die Durchmeſſer der Ellipſe, möglich ſind, ſondern nur diejenigen, welche die Zwergaxe unter einem Winkel γ ſchneiden, deſſen Tangente zwiſchen den Gränzen o und $+ \frac{b}{a}$, und wiederum zwiſchen den Gränzen $- \frac{b}{a}$ und o enthalten ſind, wie ſolches auch

die

die Gleichung $p = \frac{ab}{\surd\,(b^2 \operatorname{coſ}\gamma^2 - a^2 \operatorname{ſin}\gamma^2)}$ (288. §.) ergiebt, die ſich auch ſo ausdrücken läßt:

$p = \frac{b \operatorname{ſec}\gamma}{\surd\,((b^2 : a^2) - \operatorname{tang}\gamma^2)}$, oder

$p = \frac{b \operatorname{ſec}\gamma}{\surd\,(\operatorname{tang}\gamma^2 - (b^2 : a^2))\,\surd -1}$. In der

103. Fig. iſt $\operatorname{tang} BCT = \frac{b}{a}$, wenn alſo $BC\mu$ noch 103 F.
ſpitz aber gröſſer als BCT genommen wird, ſo kann $C\mu$ die Hyperbel nicht treffen, und unter dem Winkel $\gamma = BC\mu$ gegen die Zwergaxe läßt ſich kein möglicher Durchmeſſer der Hyperbel mehr ziehen. Wenn man indeſſen $C\mu = \frac{b \operatorname{ſec}\gamma}{\surd\,(tg\gamma^2 - (b^2 : a^2))}$ macht, auf ähnliche Art, wie $CF = b$ genommen wird, obgleich die halbe zugeordnete Axe der Hyperbel eigentlich $= b\surd -1$ iſt; ſo iſt $C\mu$ als ein unmöglicher halber Durchmeſſer der Hyperbel zu betrachten, ſo wie es CG und CO im 263. §. waren. Sucht man eben ſo $C\mu$ für alle Winkel, die zwiſchen den Gränzen BCT und BCY enthalten ſind, ſo liegen alle Puncte μ ebenfalls in einer Hyperbel $\mu F v$, der HF als die Zwergaxe, und BD als die conjugirte Axe zugehört: auch trift $C\mu$ rückwärts verlängert dieſe letztere Hyperbel in μ', wenn $C\mu' = C\mu$ genommen wird. Es iſt nemlich $FC\mu = 90° - \gamma$, wenn $BC\mu = \gamma$ in der Gleichung

$p =$

$$p = \frac{b \sec\gamma}{\sqrt{(tg\gamma^2 - (b^2 : a^2))}}$$ angenommen, und

$C\mu$ durch p verſtanden wird. Wird nun $FC\mu = \eta$ geſetzt, ſo iſt $\tang\gamma = \cot\eta$, und

$$p = \frac{b \operatorname{coſec}\eta}{\sqrt{(\cot\eta^2 - (b^2 : a^2))}},$$ oder

$$p = \frac{ba}{\sqrt{(a^2 \operatorname{coſ}\eta^2 - b^2 \sin\eta^2)}},$$ mithin wird

$p = C\mu$ aus $b = CF$, $a = CB$, und $\eta = FC\mu$ eben ſo beſtimmt, wie $p = C\mu$ aus $a = CB$, $b = CF$, und $\gamma = BC\mu$ beſtimmt wird: oder die Gleichung

$$pp = \frac{b^2\,a^2}{a^2 \operatorname{coſ}\eta^2 - b^2 \sin\eta^2}$$ gehört für eine Hyperbel, deren Zwergaxe $= 2b$, und zugeordnete Axe $= 2a$ iſt.

Dieſe Hyperbel $\mu F \nu O H \mu'$, der die Zwergaxe HF zugehört, iſt klein mit der Hyperbel MBNKDL, wozu die Zwergaxe BD gehört, zuſammen hängendes Stück, es ſind vielmehr alle Puncte jener Hyperbel in Anſehung dieſer als unmögliche Puncte anzuſehen: indeſſen ſieht man doch beyde Hyperbeln als zuſammen gehörige an, und ſie heiſſen bey den Schriftſtellern hyperbolæ conjugata.

2.) Wenn man μp auf CF ſenkrecht ziehet, und $Cp = x$, $p\mu = y$ ſetzt, ſo hat man $x = p \operatorname{coſ}\eta$, $y = p \sin\eta$; und dieſe Werthe in die Gleichung

$$p^2 = \frac{b^2\,a^2}{a^2 \operatorname{coſ}\eta^2 - b^2 \sin\eta^2},$$ oder $(a^2 \operatorname{coſ}\eta - b^2 \sin\eta^2)\,p^2 = b^2 a^2$ geſetzt, geben $a^2 x^2 - b^2 y^2 = b^2 a^2$,

alſo

alſo $b^2 y^2 = a^2 (x^2 - b^2)$, als die Gleichung für die zugeordnete Hyperbel zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten, die Abſciſſen auf ihrer Zwergaxe vom Mittelpunct gerechnet. Wird aber der Scheitel F für den Anfangspunct der Abſciſſen genommen, ſo hat man $yy = \frac{2aa}{b} \cdot x + \frac{2aa}{a} \cdot \frac{xx}{2b}$.

Uebrigens hat auch in dieſer Hyperbel jeder halbe Durchmeſſer $C\mu = p$ einen ihm zugeordneten halben Durchmeſſer $= q$, der von jenem unter einem Winkel ζ geſchnitten wird, deſſen Tangente $= \frac{a^2 \cot\eta - b^2 \operatorname{tang}\eta}{b^2 + a^2}$. Nimmt man auf $C\mu$ die Abſciſſen vom Mittelpunct, und die Applicaten mit dem zugeordneten Durchmeſſer parallel, ſo iſt die Gleichung für dieſe Hyperbel $y^2 = \frac{q^2}{p^2}(x^2 - p^2)$: wird aber im Scheitel μ des Durchmeſſers der Anfangspunct der Abſciſſen genommen, ſo iſt $yy = \frac{2qq}{p} x + \frac{2qq}{p} \cdot \frac{xx}{2p}$, und man hat

$$p = \frac{ba}{\sqrt{(a^2 \operatorname{cos}\eta^2 - b^2 \operatorname{sin}\eta^2)}},$$

$$q = \frac{\sqrt{(b^4 \operatorname{sin}\eta^2 + a^4 \operatorname{cos}\eta^2)}}{\sqrt{(b^2 \operatorname{sin}\eta^2 - a^2 \operatorname{cos}\eta^2)}}.$$

3.) Nun gehe man nochmahl zur Betrachtung der erſten Hyperbel zurück, der die Zwergaxe BD $= 2a$, und zugeordnete Axe HF $= 2b$ zugehört, ſo iſt die allgemeine Gleichung

$yy =$

$yy = \frac{qq}{pp}(x^2 - p^2)$ die Abſciſſen CP vom Mittelpunct auf einem Durchmeſſer genommen, für den Coordinations-Winkel ζ, deſſen Tangente $= \frac{b^2 \cot\gamma - a^2 \tan g\gamma}{a^2 + b^2}$, BCP$=\gamma$ geſetzt: da dann $p = \frac{ab}{\surd(b^2 \cos\gamma^2 - a^2 \sin\gamma^2)}$,

$q = \frac{\surd(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^3}{\surd(a^2 \sin\gamma^2 - b^2 \cos\gamma^2)}$, und $\frac{2qq}{p}$

$= \frac{2(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2)}{ab\surd(a^2 \sin\gamma^2 - b^2 \cos\gamma^2)\surd - 1}$

$= \frac{2(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2)}{ab\surd(b^2 \cos\gamma^2 - a^2 \sin\gamma^2)}$. So lange nun $\tan g\gamma$ von 0 bis $\frac{b}{a}$ wächſt, ſo lange bleibt p möglich, und q unmöglich: für $\tan g\gamma = \frac{b}{a}$ werden beyde unendlich groß, und ζ verſchwindet. Wächſt aber $\tan g\gamma$ über $\frac{b}{a}$, ſo wird p unmöglich, q aber möglich, qq und pp bekommen das entgegen geſetzte Zeichen, und die Gleichung zwiſchen x und y wird folgende $yy = \frac{qq}{pp}(x^2 + p^2)$. Dieſemnach iſt

die

die Gleichung $yy = \frac{qq}{pp}(x^2 - p^2)$ für jeden Durchmeſſer, auf welchem man auch die Abſciſſen vom Mittelpunct annehmen will, gleich brauchbar.

4.) Dagegen hat es mit der Gleichung für die Hyperbel eine andre Bewandniß, wenn man den Anfangspunct der Abſciſſen im Scheitelpunct E eines Durchmeſſers, die Abſciſſen EP ſelbſt auf dieſem Durchmeſſer, und die Applicaten mit den ihm zugeordneten Durchmeſſer OG parallel annimmt. Man hat nun zwiſchen $EP = x$, $PM = y$ die Gleichung $yy = \frac{2qq}{p}x + \frac{qq}{pp}xx$, und dieſe Gleichung iſt nur brauchbar, ſo lange $\tang \gamma^2$ nicht gröſſer als $\frac{b^2}{a^2}$, mithin ſo lange p möglich, und q unmöglich iſt: denn nur die möglichen Durchmeſſer haben die Eigenſchaft, daß die durch ihren Scheitelpunct mit dem zugeordneten Durchmeſſer parallel gezogenen Ordinaten verſchwinden. Bey der Vorausſetzung $\tang \gamma^2 > \frac{b^2}{a^2}$ bekommen qq und pp das entgegen geſetzte Zeichen, und wenn man $\frac{2(a^4 \sin \gamma^2 + b^4 \cos \gamma^2)}{ab\sqrt{(a^2 \sin \gamma^2 - b^2 \cos \gamma^2)}} = g$ ſetzt, ſo wird $\frac{2qq}{p} = \frac{g}{\sqrt{-1}}$, mithin hätte man $yy = \frac{gx}{\sqrt{-1}} + \frac{qq}{pp} \cdot xx$. Weil nun vermöge der Vorausſe-

ſetzung die Abſciſſen im Scheitel des Durchmeſſers $2p$ anfangen ſollen, und hier p unmöglich iſt, ſo müſten in Rückſicht auf dieſen Umſtand alle Abſciſſen als unmögliche angeſehen, und $\frac{x}{\surd -1}$ ſtatt x geſchrieben werden, da dann $yy = -gx - \frac{qq}{pp} xx$ gefunden würde, und auch alle Werthe von y unmöglich wären. Alle Endpuncte dieſer unmöglichen Ordinaten liegen in der zugeordneten Hyperbel, worin man ſich die Scheitelpuncte der unmöglichen Durchmeſſer vorſtellet, wie im num. 1.

5.) Mit den beyden Gleichungen für die Ellipſe $yy = \frac{qq}{pp}(p^2 - x^2)$, und $yy = \frac{2qq}{p} - \frac{qq}{pp} xx$, worin p und q ein paar zuſammen gehörige halbe Durchmeſſer bedeuten, p aber insbeſondre denjenigen, worauf man die Abſciſſen, entweder vom Mittelpunct, oder vom Scheitelpunct anrechnet, hat es eine andre Bewandniß. Beyde ſind für jedes Paar Durchmeſſer gleich brauchbar, wenn man durch p denjenigen halben Durchmeſſer verſteht, welcher die Zwergaxe unter dem Winkel γ ſchneidet, und durch q den ihm zugeordneten, da dann

$$p = \frac{ab}{\surd(a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2)}, \quad \text{und}$$

$$q = \frac{\surd(a^4 \sin\gamma^2 + b^4 \cos\gamma^2)}{\surd(a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2)} \quad \text{iſt, ſo wie}$$

$$\tan\zeta = \frac{a^2 \tan\gamma + b^2 \cos\gamma}{a^2 - b^2}.$$

Der

Der XIX. Abſchnitt.

Von den mancherley Projections-Arten einer Kugel.

316. §.

Alle Strahlen, die von einer Kugel ins Auge des Zuſchauers kommen, ſind in dem Raum eines graden Kegels enthalten, deſſen Axe durchs Auge und den Mittelpunct der Kugel geht, und deſſen Grundfläche derjenige Kreis iſt, welcher das dem Auge zugekehrte Segment, von dem übrigen abſondert. Geht man bis auf den 18. §. der Optik zurück und vergleicht die 6te Figur, ſo findet man daſelbſt bewieſen, daß das Auge eigentlich nie eine völlige Halbkugel auf einem mahle überſehen kann: vielmehr nur ein Segment LAM, deſſen Grundfläche ein auf der Geſichtsaxe EO ſenkrechter kleinerer Kreis iſt, wozu der Halbmeſſer CL = CM gehört. Es wird hiebey vorausgeſetzt, daß die Geſichtsaxe gegen die Mitte der Kugel gerichtet ſey, wovon der Grund im 15. §. Opt. iſt angegeben worden. Im 36. und 37. §. der Optik iſt hieraus weiter geſchloſſen worden, daß jede Kugel in hinlänglich groſſer Entfernung dem Auge wie ein Kreis erſcheine, wenn nemlich das Auge die Krümmung des Segments LAM nicht weiter unterſcheiden kann. Würde als-

denn das Segment LAM von der Kugel abgeſchnitten, und alles übrige bliebe wie vorhin, ſo würde das Auge in O noch eben die Empfindung behalten, wenn es gleich jetzt nur den Kreis betrachtete, deſſen Durchmeſſer LM wäre.

317. §.

111F. Nunmehro ſtelle in der 111. Fig. die Zeichnung eine Kugel um den Mittelpunct C vor, in O ſtehe das Auge, und OAMEN ſey der Strahlenkegel, deſſen Spitze das Auge iſt, und deſſen Oberfläche die Kugel in dem Kreiſe AMEN berührt: ſo iſt allemahl OAMEN ein grader Kegel. Ferner erhellet, daß die Projection der Kugel auf jeder gegebenen Ebene einerley ſey mit der Projection des Kreiſes AMEN auf derſelben Ebene. Demnach iſt die ſcenographiſche Projection der Kugel allemahl ein Schnitt eines graden Kegels: mithin allemahl eine Ellipſe, wenn die Tafel zwiſchen der Kugel und dem Auge ſteht, und dieſe wird nur in dem einzigen Fall ein Kreis, wenn die Tafel auf der Geſichtsaxe ſenkrecht, mithin mit der Grundfläche des Geſichtskegels parallel iſt. (289. §.) Das Bild des Mittelpuncts der Kugel fällt alsdenn in den Haupt-Augenpunct.

Wenn das Auge vom Mittelpunct der Kugel unendlich weit entfernt iſt, und der optiſche Kegel ſich in einen Cylinder verwandelt, ſo bleibt die orthographiſche Projection der Kugel ebenfalls eine Ellipſe, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn die Tafel die Geſichtsaxe ſenkrecht ſchneidet. (259. §.)

Anfangs könnten dieſe Sätze bedenklich ſcheinen, weil uns eine Kugel, in welcher Entfernung und Lage wir ſie auch betrachten, nie eyrund, ſondern allemahl kreisrund vorkommt. Um dieſen Zweifel zu heben, muß man erwägen, daß die Erſcheinung der Geſtalt einer Sache, ſo wie wir ſie nach unſrer Empfindung zu beurtheilen gewohnt ſind, mit ihrer Projection auf der perſpectiviſchen Tafel nicht allemahl ſchlechthin überein komme, dazu daß ein Kreis dem Auge als ein Kreis erſcheine, wird erfordert, daß nicht allein alle Durchmeſſer, ſondern auch alle Halbmeſſer deſſelben, unter gleichen optiſchen Winkeln wahrgenommen werden. (20. §. Opt.) Weil nun dies allemahl der Fall iſt, wenn das Auge eine Kugel betrachtet; weil nicht allein alle Winkel AOE, ſondern auch alle Winkel KOA, KOE gleich groß ſind; ſo muß die Kugel kreisrund erſcheinen. Völlig eben ſo erſcheinet auch ihre elliptiſche Projection auf der Tafel, wenn anders das Auge in dem rechten Geſichtspunct ſtehet. Man ſtelle ſich vor, daß *a*, *c*, *e*, die Projectionen der Puncte A, K, E, auf der perſpectiviſchen Tafel ſind, und daß letztere nicht mit der Ebene des Kreiſes AMEN parallel ſey: ſo ſind *ca*, *ce*, die Projectionen der Halbmeſſer KA, KE, und dabey zwar ungleich groß; weil ſie aber unter gleichen optiſchen Winkeln erſcheinen, ſo kommen ſie dem Auge gleich groß vor. Die Projectionen aller übrigen Durchmeſſer laufen auch durch *c*, und ſie werden nicht allein ſelbſt unter gleich groſſen Winkeln geſehen, ſondern auch die Stücke von ihnen, die zu beyden Seiten des Puncts *c* liegen, und Projectionen der Halbmeſſer ſind. So wird begreiflich, wie die Projection der Kugel eine Ellipſe seyn kön-

könne, wenn gleich die Kugel ſelbſt dem Auge allemahl kreisrund erſcheint: ihre elliptiſche Projection aus dem rechten Geſichtspunct betrachtet wird dem Auge eben ſo erſcheinen. Indeſſen verleitet der Umſtand, daß eine Kugel allemahl kreisrund erſcheint, die Mahler und Zeichner gewöhnlich, daß ſie Kugeln faſt allemahl kreisrund zeichnen, auch wenn ihr Mittelpunct nicht mit dem Hauptaugenpunct zuſammen fällt. Vielleicht glaubt man gar, es werde nicht natürlich ausſehen, wenn man eine Kugel eyrund zeichnen wollte. Allein dies hat nur ſeine Richtigkeit, wenn man die Zeichnung auſſer dem rechten Geſichtspunct betrachtet, und das hat die Zeichnung der Kugel mit allen andern Arten perſpectiviſcher Zeichnungen gemein, die nach der verſchiedenen Geſtalt und Lage der abgebildeten Sachen mehr oder weniger unnatürlich ſcheinen, wenn man ſie nicht aus dem rechten Geſichtpunct betrachtet. Eine nach richtigen Regeln der Perſpectiv elliptiſch gezeichnete Kugel thut die Wirkung, daß der Zuſchauer genöthiget wird, den rechten Geſichtspunct zu ſuchen, und er wird alsdenn durch das Vergnügen belohnt, daß die ganze Zeichnung ſo ausſiehet, als wenn die abgebildeten Sachen ſelbſt da ſtünden, beſonders wenn er ſie mit einem Auge, allenfalls auch durch die hohle Hand betrachtet. Dieſemnach wird es wohl der Mühe verlohnen, die Regeln aufzuſuchen, wie man ſich bey perſpectiviſcher Zeichnung der Kugel zu verhalten hat, zumahl weil die wenigſten Schriftſteller dazu Anleitung geben.

318. §.

Die Tafel ſtehet vertical, und der Mittelpunct der Kugel liegt in der Verticalfläche des Auges, man ſoll das Bild der Kugel zeichnen.

Auflöſung. Die Ebene des Papiers ſtelle die Verticalfläche des Auges vor, C ſey der Mittelpunct der Kugel, O das Auge, alſo OC die Geſichtsaxe durch der Kugel Mittelpunct. Ferner ſey RT die Verticallinie des Auges, R der Hauptaugenpunct, alſo OR auf RT ſenkrecht. Eine horizontale Ebene, welche die Kugel unten in D berührt, ſchneide die Verticalfläche des Auges in TD, ſo iſt T der Fußpunct des Auges, OS=RT die Höhe des Auges über derjenigen Horizontalfläche, worauf die Kugel liegt. Weiter ſey AOE der Geſichtskegel, AMEN ſeine Grundfläche, oder die Gränze des ſichtbaren Segments der Kugel, K der dazu gehörige Mittelpunct, KL ſeine Entfernung von der Tafel, ſo wie CF=TD die Entfernung des Mittelpuncts der Kugel von der Tafel. Weil dieſer Mittelpunct C in der Ebene des Auges angenommen iſt, ſo liegt OC in der Ebene ORT, und die Ebene ROC fällt mit der Ebene des Auges zuſammen. Es iſt aber dieſe Ebene ROC beydes auf der Tafel und der Ebene des Kreiſes AMEN ſenkrecht; mithin iſt ſie die Neigungsebene des Kreiſes AMEN gegen die Tafel: und wenn der Durchmeſſer AE in dieſer Ebene liegt, die Verticallinie des Auges aber dieſen verlängerten Durchmeſſer in *t* ſchneidet, ſo iſt R*t*K der Neigungswinkel der Kreisfläche AMEN gegen die Tafel. Die Projection der Kugel auf der Tafel iſt 111 F.

 mit

mit der Projection des Kreiſes AMEN einerley, und letztere wird dem 265. §. gemäß leicht gefunden, wenn tK, der Neigungswinkel KtR und die Abmeſſungen des Geſichtskegels OAMEN bekannt ſind.

Es ſey alſo, wie in den allgemeinen Formuln $Kt = \delta$, $KtR = \psi$, $KA = r$, $KO = c$, $OR = D$, $OS = RT = a$, der Halbmeſſer der Kugel $CD = G = \varrho$. Wenn nun OC und RT einander in c ſchneiden, ſo iſt c das Bild des Mittelpuncts der Kugel und $ROc = OCF = RtK = \psi$, mithin $Oc = D \sec\psi$. Wird ferner die Entfernung $CF = DT$ des Mittelpuncts der Kugel von der Tafel $= h$ geſetzt, ſo iſt $Cc = h \sec\psi$, alſo $OC = (D + h)\sec\psi$; und wenn OS von CF in Q geſchnitten wird, ſo hat man

$OQ = a - \varrho$, alſo $\tan\psi = \frac{OQ}{CQ} = \frac{a - \varrho}{D + h}$.

Noch ſetze man den ſcheinbaren Halbmeſſer der Kugel

$COA = \omega$, ſo iſt $\sin\omega = \frac{\varrho}{OC} = \frac{\varrho}{(D + h)\sec\psi}$,

oder $\sin\omega = \frac{\varrho \cos\psi}{D + h}$, und $r = \varrho \cos\omega$. Ueberdem

hat man $CK = \varrho \sin\omega$, $OK = OC = CK = (D + h) \sec\psi - \varrho \sin\omega = c$, und $cK = OK - Oc = c - D\sec\psi$, oder $cK = h\sec\psi - \varrho\sin\omega$, mithin $Kt = cK, \cot\psi$, oder $\delta = h \operatorname{cosec}\psi - \varrho \sin\omega \cot\psi$. Durch t läuft die Grundlinie der Ebene AMEN mit der Grundlinie des Horizonts parallel, und wenn man Or mit Kt parallel zieht, ſo iſt r für dieſe Ebene AMEN der Augenpunct, durch welchen ihre Gränzlinie mit der Grundlinie des Horizonts parallel läuft.

Will

Will man nun die Gleichung für die Projection haben, ſo wendet man die allgemeinen Formeln des 265. und 266. §. leicht an, wenn man bemerkt, daß hier der Geſichtskegel ein grader Kegel, mithin der dortige Winkel β hier $=90^\circ$, alſo hier das dortige $a=c\sin\beta=c$, und $\zeta=90^\circ$ ſey, ſo wie das dortige f hier $=o$ iſt. Uebrigens hat man $L=c.\text{coſec}\psi$, $\delta=h\,\text{coſec}\psi-\varrho\,\text{ſin}\omega\,\text{cot}\psi$, und $b=D\,\text{coſec}\psi+\delta$ $=(D+h)\,\text{coſec}\psi-\varrho\,\text{ſin}\omega\,\text{cot}\psi$. Daraus findet man für die Abmeſſungen der Projection

$$p=\frac{r.c.D\,\text{coſec}\psi^2}{((D+h)\,\text{coſec}\psi-\varrho\,\text{ſin}\omega\,\text{cot}\psi)^2-\varrho^2\,\text{coſ}\omega^2},$$

oder

$$p=\frac{r.c.D}{(D+h-\varrho\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ}\,\psi)^2-\varrho^2\,\text{coſ}\,\omega^2\,\text{ſin}\,\psi^2},$$

$$q=\frac{r.D}{\sqrt{((D+h-\varrho\,\text{ſin}\omega\,\text{coſ}\psi)^2-\varrho^2\,\text{coſ}\omega^2\,\text{ſin}\psi^2)}},$$

und die Gleichung für die Projection iſt $y^2=\frac{qq}{pp}(2p-x)x$. Für die Scheitelpuncte des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers findet man

$$ta=\frac{(\delta-r)L}{b-r},\ \text{und}\ te=\frac{(\delta+r)L}{b+r}.$$

Soll die Projection orthographiſch ſeyn, ſo muß der Neigungswinkel OBT der Geſichtsaxe OC gegen den Horizont, welcher nun die Höhe des Auges über dem Horizont heiſt, gegeben ſeyn. Eben dieſer Winkel iſt alsdenn $=\psi$, und man nimmt nun

$b = c \cdot \cot\psi$, ſo hat man $p = \frac{r \cdot L}{b}$

$= \frac{\varrho \sin\omega \operatorname{coſec}\psi}{\cot\psi} = \varrho \sin\omega \sec\psi$, $q = r$; der Mittelpunct der Projection fällt mit c zuſammen, und man hat $tc = tf = \frac{\delta \cdot L}{b} = (h\sec\psi - \varrho\sin\omega)\operatorname{coſec}\psi$.

136F. Auf der Tafel ſelbſt läßt ſich die Projection am bequemſten ſo zeichnen. Es ſey R der Hauptaugenpunct, RH die Horizontallinie, RT die Verticallinie des Auges. Man ſuche die Projection c des Mittelpuncts C der Kugel nach den Regeln des 12. §.; oder wie man hier noch kürzer verfahren kann: man mache auf der Horizontallinie RO = D, RD = h, ziehe DC vertical, und mache $Dc = a - \varrho$. Wird hiernächſt OC gezogen, ſo giebt ihr Durchſchnitt c mit der Verticallinie des Auges das geſuchte Bild des Mittelpuncts. Zugleich hat man tang DOC $= \frac{a - \varrho}{D + h}$, alſo DOC $= \psi$, und Rc = D tang ψ.

Hätte man c auf andre Art gefunden; ſo würde man RO = D, RD = h nehmen, Oc ziehen, und DC auf RD ſenkrecht ſetzen, ſo fände man den Durchſchnittspunct C. Allemahl aber iſt Rc = D tang ψ, oder $\operatorname{tang}\psi = \frac{RC}{D}$, mithin wäre auch nun ROc $= \psi$, und weil DC $= (D + h) \operatorname{tang}\psi$ wird, ſo wäre DC $= a - \varrho$, und OC $= (D + h) \sec\psi$. Um den Mittelpunct C beſchreibe man mit dem Halbmeſſer ϱ der

Ku-

Kugel einen Kreis, und ziehe aus O ein Paar Tangenten OA, OE dieſes Kreiſes, ſo wird $\sin COA = \sin COB = \frac{\varrho}{OC} = \frac{\varrho \cos\psi}{D+h}$, mithin iſt $COA = \omega =$ dem ſcheinbaren Halbmeſſer der Kugel. Man ziehe die Sehne AE, welche RT in t ſchneidet und OC in K, ſo iſt erſtlich der Winkel $RtK = \psi$, und überdem $CK = \varrho \sin\omega$, $OK = (D+h)\sec\psi - \varrho\sin\omega$, mithin $cK = h\sec\psi - \varrho\sin\omega$, und $Kt = (h\sec\psi - \varrho\sin\omega)\cot\psi = h\operatorname{cosec}\psi - \varrho\sin\omega\cot\psi = \delta$, ſo wie $ct = (h\sec\psi - \varrho\sin\omega)\operatorname{cosec}\psi$. Demnach iſt t der Fußpunct für die Ebene des abzubildenden Kreiſes, und wenn Or mit tK parallel gezogen wird, ſo iſt r dieſer Ebene Augenpunct, durch t läuft ihre Grundlinie, durch r ihre Gränzlinie mit RH parallel. Die Vergleichung mit der 111. Fig. ergiebt nun, daß die Durchſchnittspuncte a, e, der Tangenten OA, OE, mit RT ſchon die Scheitelpuncte der in den Augenpunct laufenden Axe der Projection ſind, daß alſo ae dieſe in den Augenpunct laufende Axe ſey. (Man darf ſich nur vorſtellen, die Ebene rOKt werde um rt ſo weit herum gedrehet, bis ſie auf der Ebene HRT der Tafel ſenkrecht zu ſtehen kommt.) Eben dieſe Axe aber könnte auch ſo gefunden werden. Man müſte auf der Gränzlinie $r\Omega = r$O nehmen, und auf der Grundlinie $tQ = tK = \vartheta$, $Q\alpha = Q\varepsilon = \varrho\cos\omega = KA$, und hiernächſt $\Omega\alpha$, $\Omega\varepsilon$, ziehen, ſo müſſen dieſe Linien ebenfalls durch a und e laufen. Man nehme ferner $tM = tN = KA$, ziehe rM, rN, und durch c mit der Grundlinie eine Parallele bis an dieſe Geſichtslinien in m und n, ſo iſt mn das Bild des mit der Grundlinie

parallelen Durchmeſſers des abzubildenden Kreiſes, und man kann übrigens die Projection nach den Regeln des 71. §. zeichnen.

319 §.

Die Tafel ſtehet noch vertical, aber der Mittelpunct der abzubildenden Kugel liegt nicht in der Verticalfläche des Auges: man ſoll das Bild der Kugel zeichnen.

112F. Aufloͤſung. Es ſey TY die Tafel, in O das Auge, ORTS die Ebene des Auges, wovon der Mittelpunct C der Kugel um den Abſtand TF $=g$, entfernt iſt, von der Tafel aber um den Abſtand FD $=h$. Ferner ſey DFTS eine horizontale Ebene, welche die Kugel unten in D berührt, OC die Geſichtsaxe durch den Mittelpunct der Kugel, welche die horizontale Grundfläche DFTS in B trift, CD ein verticaler Halbmeſſer; ſo liegt B in der graden Linie SD, und dieſe iſt die Durchſchnittslinie der verticalen Ebene OCDS mit der Grundfläche, alſo DBO der Axe OC Neigung gegen den Horizont. Weiter iſt TSB die Abweichung der Ebene OCDS von der Verticalfläche des Auges, und es ſey TSB $=\alpha$, SBO $=\beta$. Wenn nun AMEN die Grundfläche des Geſichtskegels iſt, welche OC in K ſchneidet, ſo wird dieſe Ebene AMEN auch die Grundfläche und die Tafel ſchneiden. Es ſey $\alpha\varepsilon$ ein Durchmeſſer in der Ebene OBS, und er treffe verlängert die Grundfläche in H, ſo liegt H in SB: durch H aber läuft beyder Ebenen AMEN und der Grundfläche Durchſchnittslinie HG, und weil dieſe beyden Ebenen auf OBS ſenkrecht ſind, ſo iſt HG auch

auch darauf ſenkrecht, mithin BHG $=90^\circ$, und BHK iſt der Ebene AMEN Neigungswinkel gegen die Grundfläche. Wenn nun HG mit der Grundlinie der Tafel in G zuſammen ſtößt; ſo ſchneidet AMEN die Tafel in einer graden Linie GV, die durch G läuft. Wenn ferner auſſer TG die Winkel TGH und BHK bekannt ſind; ſo iſt die Lage der Ebene AMEN bekannt. Es iſt aber TGH $=$ TSW $=\alpha$, und BHK $=90^\circ-\beta$. Eben die Ebene AMEN ſchneidet die Tafel in GV unter einem Winkel, den ich $=\psi$ ſetze, und wenn TGV $=\varphi$ geſetzt wird, ſo laſſen ſich dem 85. §. gemäß die Winkel φ und ψ aus TGH und BHK finden. Wenn nemlich TGH $=\eta$, BHK $=\vartheta$ genommen wird, wie im 85. §., ſo iſt $\tang\varphi = \tang\vartheta \sin\eta$, $\cos\psi = \sin\vartheta \cos\eta$. Hier iſt nun $\eta=\alpha$, und $\vartheta = 90^\circ-\beta$, alſo $\tang\varphi = \cot\beta \sin\alpha$, $\cos\psi = \cos\alpha \cos\beta$. Weiter iſt die Ebene ROK auf der Tafel, und zugleich auf AMEN ſenkrecht, mithin iſt ſie der letztern Ebene Neigungsebene gegen die Tafel. Wenn nun c das Bild des Mittelpuncts C der Kugel iſt, ſo muß die Ebene ROK die Tafel in einer graden Linie ſchneiden, die durch R und c läuft: dieſe treffe GV, als die Grundlinie der Ebene AMEN in t, ſo liegt t zugleich in der Ebene AMEN, ſo wie K, mithin iſt Kt der Ebenen AMEN und ROK Durchſchnittslinie, und RtK iſt der Ebene AMEN Neigungswinkel gegen die Tafel, der hier $=\psi$ geſetzt iſt; Rt und Kt ſind auf GV ſenkrecht, und Rt iſt die zur Ebene AMEN gehörige Linie des Auges. Wird alſo Or mit tK parallel gezogen, ſo iſt r der zu dieſer Ebene gehörige Augenpunct, und man hat Rr $=$ D$\cot\psi$. (Wegen Mangel des Raums iſt in der 112. Fig. eine kleine

Un-

Unregelmäßigkeit zugelaſſen. Das Bild c des Mittelpuncts C der Kugel ſollte eigentlich in einer aus W lothrecht aufgerichteten graden Linie liegen, da wo c' ſteht, und Rc ſollte durch c' laufen.

Aus den gegebenen Linien OS $= a$, dem Halbmeſſer CA $= \varrho$, OR $=$ D, TF $= g$, FD $= h$, hat man nun $\tang \alpha = \frac{g}{D+h}$, $\tang \beta = \frac{a-\varrho}{\sqrt{((D+h)^2+g^2)}}$, alſo auch $\tang \varphi = \sin\alpha \cot\beta$, und $\cos\psi = \cos\alpha \cos\beta$. Ferner hat man $Oc = D\sec\psi$, $Rc = D\tang\psi$, $OC = (D+h)\sec\psi$, $\sin\omega = \frac{\varrho\cos\psi}{D+h}$, $r = \varrho\cos\omega$, $CK = \varrho\sin\omega$, $OK = (D+h)\sec\psi - \varrho\sin\omega = c$, $cK = h\sec\psi - \varrho\sin\omega$, $ct = (h\sec\psi - \varrho\sin\omega)\cosec\psi$, und $tK = h\cosec\psi - \varrho\sin\omega\cot\psi = \delta$, da dann ω der ſcheinbare Halbmeſſer der Kugel iſt. Noch ziehe man Ch mit KH parallel, ſo iſt $Hh = CK \sec\beta = \varrho\sin\omega\sec\beta$, alſo $DH = \varrho(\tang\beta + \sin\omega\sec\beta)$, $DI = DH\sec\alpha = \varrho(\tang\beta + \sin\omega\sec\beta)\sec\alpha$, $FI = h - DI = h - \varrho\sec\alpha(\tang\beta + \sin\omega\sec\beta)$, mithin $FG = FI\cot\alpha = h\cot\alpha - \varrho\cosec\alpha(\tang\beta + \sin\omega\sec\beta)$ oder $FG = \frac{h\cos\alpha - \varrho(\tang\beta + \sin\omega\sec\beta)}{\sin\alpha}$, und man hat auch $TG = h + FG$. Demnach ſind TG, $TGH = \alpha$, und $BHK = 90° - \beta$ bekommt, wodurch die Lage der Ebene des Kreiſes AMEN beſtimmt wird. Daraus könnte nun $TGV = \varphi$ und $RtK = \psi$ gefunden werden, und hiernächſt ferner die Linie des Auges Rt, welche vom Hauptaugenpunct auf GV ſenk-

ſenkrecht fällt: auf derſelben könnte alsdenn $ta = \frac{(\delta - r)L}{b-r}$, $te = \frac{(\delta + r)L}{b+r}$ genommen werden, ſo hätte man die Scheitelpuncte des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers der Projection. Die Hälfte dieſes Durchmeſſers iſt $= p = \frac{r.L.D\mathrm{coſec}\psi}{b^2 - r^2}$, und der halbe ihm zugeordnete mit der Grundlinie GV parallele Durchmeſſer $q = \frac{r.D\mathrm{coſec}\psi}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$, wenn man $L = c.\mathrm{coſec}\psi$, $r = \varrho\,\mathrm{coſ}\omega$, und $b = D\mathrm{coſec}\psi + \delta = (D+h)\mathrm{coſec}\psi - \varrho\,\mathrm{ſin}\omega\,\mathrm{cot}\psi$ nimmt.

Bey der Zeichnung auf der Tafel läßt ſich die Lage der Linien des Auges für die Ebene des abzubildenden Kreiſes AMEN bequemer ſo finden. Man 137 F. ſuche das Bild c des Mittelpuncts der Kugel C nach Vorſchrift des 12. §., ſo hat man ſchon die Lage der Linie des Auges Rc, durch R ziehe man eine grade Linie auf Rc ſenkrecht, und nehme auf derſelben RO=D, ſo iſt $\mathrm{tang}\,\mathrm{RO}c = \frac{\mathrm{R}c}{\mathrm{D}} = \mathrm{tang}\psi$, mithin RO$c = \psi$. Weiter nehme man RD$=h$, ziehe O$c$, und durch D auf RD eine grade Linie ſenkrecht, welche Oc in C ſchneidet, ſo iſt $\mathrm{OC} = (\mathrm{D}+h)\,\mathrm{ſec}\psi$. Um den Mittelpunct C beſchreibe man mit dem Halbmeſſer ϱ der Kugel einen Kreis, und ziehe die Tangenten OA, OE, nebſt der Sehne AE, welche OC in K ſenkrecht ſchneidet, ſo iſt $\mathrm{ſin}.\mathrm{COA} = \frac{\varrho}{\mathrm{OC}}$

=

$= \frac{\varrho \cos\psi}{D+h} = \sin\omega$, alſo COA $= \omega$ der ſcheinbare Halbmeſſer der Kugel und OC der Abſtand ihres Mittelpuncts vom Auge. Wenn alſo AE die Linie des Auges Rc in t ſchneidet, ſo iſt $OK = OC - CK = (D+h)\sec\psi - \varrho\sin\omega$, $cK = OK - Oc = h\sec\psi - \varrho\sin\omega$, und $ct = (h\sec\psi - \varrho\sin\omega)\operatorname{cosec}\Psi$: mithin iſt t der Fußpunct für die Ebene des abzubildenden Kreiſes, und durch t läuft ihre Grundlinie auf Rt ſenkrecht. Weiter iſt $RtK = \psi$, wenn alſo Or mit tK parallel gezogen wird, ſo iſt r der erwehnten Ebene Augenpunct, und $r\Omega$ auf Rr ſenkrecht geſetzt, ihre Gränzlinie: auch iſt $tK = cK\cot\psi = (h\sec\psi - \varrho\sin\omega)\cot\psi = \delta$. Man ſiehet wohl, daß nun die Durchſchnittspuncte a und e der Tangenten OA und OE mit der Linie des Auges ſchon die Scheitelpuncte der in den Augenpunct laufenden Axe der Projection ſind, die ſonſt auch ſo würden gefunden werden. Man nehme $tQ = \delta = tK$, $Q\alpha = Q\varepsilon = KA$, $r\Omega = rO = D\operatorname{cosec}\psi$, und ziehe $\Omega\alpha$, $\Omega\varepsilon$, ſo müſſen dieſe Linien durch a und e laufen, ſo wie ΩQ durch c läuft. Noch nehme man $tM = tN = KA$, ziehe Mr, Nr, und durch c mit der Grundlinie tQ eine Parallele, welche dieſe Geſichtslinie in m und n ſchneidet, ſo iſt mn das Bild des mit der Grundlinie parallelen Durchmeſſers, und man kann übrigens die Projection nach den Regeln des 71. §. zeichnen.

320 §.

111 F. Wenn O eine Lichtflamme iſt, welche die Kugel erleuchtet, ſo iſt der Schatten, den letztere auf jede gegebene Ebene wirft, ebenfalls ein Schnitt des

gra-

graden Kegels OAMEN: er iſt einerley mit der Projection der Kugel auf dieſe gegebene Ebene, und die Gleichung für die Geſtalt des Schattens wird leicht gefunden, auch der Schatten ſelbſt auf der Ebene leicht gezeichnet, wenn die Lage der Ebene gegen die Grundfläche und Axe des Kegels bekannt iſt. Wollte man in der 111. Fig. den Schatten ſuchen, den die Kugel um C auf die horizontale Grundfläche wirft, in O eine Lichtflamme angenommen, ſo müſte man vorläufig GK, und den Neigungswinkel KGB ſuchen. Aus OS, CD, SD, hat man $\tang OBS = \frac{OS = CD}{DS}$, und $KGB = 90° - OBS$: wenn demnach $COA = \omega$, der Halbmeſſer der Kugel $= r$ geſetzt wird, ſo hat man $CK = r \sin \omega$, $HK = r \sin \omega \sin OBS$, und $GK = (r + HK) \sec . OBS$. Was nun im 266. §. r war, das iſt hier $AK = r \cos \omega$, und was daſelbſt ψ war, iſt hier KGB, nur mit dem Unterſcheid, daß dieſer Winkel hier in Abſicht des im 266. §. mit ψ bezeichneten negativ genommen werden muß, weil er nicht mit der Spitze des Kegels auf einerley Seite der Grundfläche liegt. Nimmt man dieſen Winkel ψ in den Formuln des 266. §. negativ, und ſchreibt $r \cos \omega$ ſtatt r, ſo verwandeln ſie ſich in folgende:

$$p = \frac{r \cos \omega (c . \cot \psi + \delta) c . \operatorname{coſec} \psi}{c^2 \cot \psi^2 - r^2 \cos \omega^2},$$

$$q = \frac{r \cos \omega (c . \cot \psi + \delta)}{\sqrt{(c^2 \cot \psi^2 - r^2 \cos \omega^2)}}, \text{ und } k = \frac{(\delta . c . \cot \psi + r^2 \cos \omega^2) c . \operatorname{coſec} \psi}{c^2 \cot \psi^2 - r^2 \cos \omega^2}.$$

Nun ſey

hier

hier OS $= a$, DS $= b$, ſo iſt $\tang OBS = \frac{a-r}{b}$ $= \cot\psi$, und was im 266. §. c und δ waren, iſt hier OK $= \surd((a-r)^2 + b^2) - r \sin\omega$, und GK $= r(1 + \sin\omega \cos\psi) \cosec\psi$, da dann $\sin\omega = \frac{r}{\surd((a-r)^2 + b^2)}$, und $\cos\omega = \surd \frac{(a-r)^2 + b^2 - r^2}{a^2 - r^2 + b^2}$ iſt. Man nehme alſo $c =$ OK, $\delta =$ GK an, ſo hat man $c = \surd((a-r)^2 + b^2) - \frac{r^2}{\surd((a-r)^2 + b^2)}$, oder

$$c = \frac{(a-r)^2 + b^2 - r^2}{\surd((a-r)^2 + b^2)},$$

und der Schatten iſt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem $c^2 \cot\psi^2 >= $ oder $< r^2 \cos\omega$, oder nachdem $\cot\psi^2 > =$ oder $< \frac{r^2 \cos\omega^2}{c^2}$ iſt. Nun war

$$\cot\psi^2 = \frac{(a-r)^2}{b^2},$$

und dieſer Werth iſt $> =$ oder $< \frac{r^2}{b^2}$, nachdem $a > =$ oder $< 2r$ iſt.

Weiter hat man $\frac{r^2 \cos\omega^2}{c^2}$

$$= \frac{r^2}{(a-r)^2 + b^2 - r^2},$$

und dieſer Werth

iſt

iſt $<=$ oder $>\frac{r^2}{b^2}$, nachdem $a>=$ oder $<2r$ iſt, folglich $\cot\psi^2>=$ oder $<\frac{r^2\cos\omega^2}{c^2}$, nachdem $a>=$ oder $<2r$ iſt, da dann im erſten Fall der Schatten eine Ellipſe, im zweyten eine Parabel, im dritten eine Hyperbel wird. Für alle drey Fälle hat man die nöthigen Abmeſſungen aus den eben angeführten Formuln für p, q, und k, nur in dem Fall der Parabel wird k unendlich groß, wie der Natur dieſer Linie gemäß iſt, weil k die Entfernung Gf ihres Mittelpuncts von der Grundlinie des Schnitts wäre. Eben ſo werden auch p und q unendlich groß: man findet aber ſtatt deſſen aus Vergleichung mit dem 266. §. den Abſtand ihres Scheitels $G\alpha=\frac{(\delta-r)\cos\omega)c.\operatorname{cosec}\psi}{2r\cos\omega}$, und ihr Parameter iſt $=\frac{2r\cos\omega(\delta-r\cos\omega)}{c.\operatorname{cosec}\psi}$.

In dieſen letztern Fall, wenn der Schatten eine Parabel wird, hat man $\cot\psi=\frac{r}{b}$, $\operatorname{cosec}\psi=\frac{\sqrt{(b^2+r^2)}}{b}$, und $\sin\psi=\frac{b}{\sqrt{(b^2+r^2)}}$. Aber auch $\cos\omega=\frac{b}{b^2+r^2}$, mithin $\sin\psi=\cos\omega$, und $\psi=90°-\omega$. Das giebt $GK=\delta=c(1+\cos\psi^2\operatorname{cosec}\psi, r\cos\omega=r\sin\psi$

 $=$

$= r\sin\psi^2 \operatorname{coſec}\psi$, und $\delta - r\operatorname{coſ}\omega = r(1 + \operatorname{coſ}\psi^2 - \sin\psi^2)\operatorname{coſec}\psi$, oder $\frac{\delta - r\operatorname{coſ}\omega}{\operatorname{coſec}\psi} = 2r\operatorname{coſ}\psi^2$.

Aber $\frac{r\operatorname{coſ}\omega}{c} = \cot\psi$, folglich iſt der Parameter der Parabel $= 4r\operatorname{coſ}\psi^2 \cot\psi$; und weil $\operatorname{coſ}\psi = \frac{r}{\sqrt{(b^2+r^2)}}$, $\cot\psi = \frac{r}{b}$, ſo wird eben dieſer Parameter $= \frac{4r^4}{b(b^2+r^2)}$. Weiter iſt $(\delta - r\operatorname{coſ}\omega)\operatorname{coſec}\psi = 2r\operatorname{coſ}\psi^2 \operatorname{coſec}\psi^2 = 2r\cot\psi^2$, und dies durch $\frac{2r\operatorname{coſ}\omega}{c} = 2\cot\psi$ dividirt giebt

$$G\alpha = r\cot\psi = \frac{rr}{b}.$$

Uebrigens hat man allemahl $DG = (r + HK)\cot\psi + CH = r(1 + \sin\omega\operatorname{coſ}\psi)\cot\psi + r\sin\omega\operatorname{coſ}\psi$, alſo auch $Df = Gf - DG$. Für die Parabel wird $DG = r((1 + \operatorname{coſ}\psi^2)\cot\psi + \operatorname{coſ}\psi^2)$, alſo $D\alpha = DG - G\alpha = r\operatorname{coſ}\psi^2(1 + \cot\psi)$, oder

$$D\alpha = \frac{r^3(b+r)}{b(b^2+r^2)}.$$

321 §.

Aus dieſen Schlüſſen ergiebt ſich, wie die eigentliche Geſtalt des Schattens der Kugel, den ſie auf den horizontalen Boden wirft, gefundin werden könne: und hievon muß die Projection des Schattens

tens auf der perſpectiviſchen Tafel noch unterſchieden werden. Letztere wird ein Schnitt eines kegelartigen Körpers, deſſen Grundfläche der Schatten in dem horizontalen Boden ſelbſt wäre. Wollte man die perſpectiviſche Abbildung dieſes Schattens auf der Tafel ſuchen; ſo könnte man, nachdem der Schatten ſelbſt im horizontalen Grundriß gehörig gezeichnet worden, der allgemeinen im 15. und 53. §. gegebenen Anleitung gemäß verfahren. Gewöhnlich kann es genügen, wenn man die Bilder der vornehmſten Puncte im Umfang des Schattens ſucht, und das übrige aus freyer Hand zeichnet, weil dabey eben keine groſſe Schärfe nöthig iſt. Eine Gleichung für das Bild des Schattens auf der Tafel würde man nach Anleitung der allgemeinen Aufgabe des 102. §. finden.

322. §.

Wird die Kugel von der Sonne erleuchtet, ſo iſt der volle körperliche Schatten ein grader Kegel, deſſen Axe 215mahl länger, als der Kugel Halbmeſſer iſt, der hier von dem Halbmeſſer der Grundfläche des Schatten-Kegels ſehr wenig verſchieden iſt. Hier kann alſo nunmehro die Aufgabe des 79. §. Opt. in gröſſerer Allgemeinheit aufgelößt, und die Geſtalt des Schattens jedesmahl gefunden werden, wenn die Stelle der Axe des Schattenkegels gegeben iſt, woſelbſt dieſelbe von der Ebene, die den Schatten auffängt, geſchnitten wird, nebſt der Neigung dieſer Ebene und der Axe des Schattenkegels gegen einander. Wenn nemlich in der 111. F. angenommen wird, daß die Sonne in der verlängerten CB ſtehe, und AOE der volle Schattenkegel

 ſey,

ſey, ſo iſt COA $=\omega$ der ſcheinbare Halbmeſſer der Sonne, und man hat CO $=r\operatorname{coſec}\omega$, CK $=r\sin\omega$, AK $=r\operatorname{coſ}\omega$. Nun ſey TR eine Ebene, die den Schatten auffängt, C*c*T die Neigung der Axe des Schattenkegels gegen dieſe Ebene, ſo iſt K*tc* $=\psi=$ $90°-$ C*c*T. (Wenn die Ebene TR horizontal iſt, ſo iſt C*c*T die Höhe der Sonne über dem Horizont.) Weiter ſey CF $=b$ gegeben, ſo iſt C*c* $=b\operatorname{ſec}\psi$ und K*c* $=b\operatorname{ſec}\psi-r\sin\omega$, mithin K*t* $=(b\operatorname{ſec}\psi-r\sin\omega)\cot\psi=\delta$ gegeben, und KO $=r\operatorname{coſ}\omega\cot\omega=c$. Werden dieſe Werthe in den Formuln des 266. §. gebraucht, $r\operatorname{coſ}\omega$ ſtatt r geſetzt, ſo hat man die nöthigen Abmeſſungen für den Schatten. Damit die Stelle der Kugel beſtimmt ſey, muß in der Ebene TR der Punct F gegeben ſeyn, alsdenn hat man F*t* $=(b-r\sin\omega\operatorname{coſ}\psi)\cot\psi$, und $tf=k=$
$$\frac{\delta.c.\cot\psi+r^2\operatorname{coſ}\omega^2}{c^2\cot\psi^2-r^2\operatorname{coſ}\omega^2}.c.\operatorname{coſec}\psi,$$
mithin auch F*f* $=tf-$ F*t*, für die Stelle des Mittelpuncts f.

Wenn die Kugel die Ebene TR berührt, wie wenn ſie auf einer wagrechten Ebene läge; ſo iſt $b=r$. In allen Fällen beurtheilt man leicht, ob der Schatten eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel iſt, denn dieſe Fälle treten ein, nachdem $c^2\cot\psi^2 > =$ oder $< r^2\operatorname{coſ}\omega^2$ iſt, mithin nachdem $r^2\operatorname{coſ}\omega^2\cot\omega^2\cot\psi^2 > =$ oder $< r^2\operatorname{coſ}\omega^2$ iſt, oder $\cot\omega > =$ oder $< \operatorname{tang}\psi$. Iſt nun TR horizontal, und β die Höhe der Sonne, ſo iſt $\operatorname{tang}\psi=\cot\beta$, und jene Fälle treten ein, nachdem $\cot\omega > =$ oder $< \cot\beta$ iſt, oder $\operatorname{tang}\beta > = < \operatorname{tang}\omega$. So lange alſo die Höhe der Sonne ihren ſcheinbaren Halbmeſſer übertrift, ſo lange iſt der Schatten eine El-

Ellipſe: er wird eine Parabel, wenn beyde gleich ſind, eine Hyperbel, wenn ihre Höhe kleiner, als der ſcheinbare Halbmeſſer iſt.

Uebrigens iſt $c \,.\, \cot\psi + \delta = r \operatorname{coſ}\omega \cot\omega \cot\psi - (b \operatorname{ſec}\psi - r \operatorname{ſin}\omega) \cot\psi$, und dieſer Ausdruck verſchwindet, wenn $r \operatorname{coſ}\omega \cot\omega = b \operatorname{ſec}\psi - r \operatorname{ſin}\omega$ iſt oder $b = \frac{r(\operatorname{ſin}\omega + \operatorname{coſ}\omega \cot\omega)}{\operatorname{ſec}\psi}$. Alsdenn geht die Ebene RT durch die Spitze des Kegels, und es giebt auf der Ebene keinen vollen Schatten mehr. Iſt $c \,.\, \cot\psi < \delta$, mithin $b > (r \operatorname{ſin}\omega + \operatorname{coſ}\omega \operatorname{ſin}\omega) \operatorname{ſin}\beta$, ſo nimmt der Kegelſchnitt die entgegen geſetzte Lage an, und das iſt hier der Fall, wenn ſich der volle Schatten in Halbſchatten verwandelt.

323. §.

Die Kugel iſt bisher als ein ſolider undurchſichtiger Körper betrachtet worden, von deſſen Oberfläche das Auge nur ein Stück überſehen kann, das allemahl kleiner als eine Halbkugel iſt, es wäre denn das Auge unendlich weit von der Kugel entfernt. Wenn man ſich die Kugel hohl und an einer dem Auge zugekehrten Seite offen vorſtellt, damit das Auge in die innere Höhlung hinein ſehen kann; ſo läſt ſich die innere hohle Kugelfläche auf ähnliche Art perſpectiviſch zeichnen, wie man ſonſt den innern Raum eines Zimmers perſpectiviſch zu zeichnen gewohnt iſt. Befinden ſich alsdenn an der innern Kugelfläche Figuren von der Art, wie man in der Geometrie als ſolche kennen lernt, die ſich auf einer Kugelfläche verzeichnen laſſen, z. E. ſphäriſche Dreyecke, oder andre

von Kreisbogen eingeſchloſſene; ſo kann man ihre Bilder in die Zeichnung bringen auf ähnliche Art, wie ſonſt die Thür- und Fenſter-Oefnungen in der perſpectiviſchen Zeichnung eines Zimmers abgebildet werden. Hiezu hat man in den Geographiſchen und Aſtronomiſchen Wiſſenſchaften ſehr oft Veranlaſſungen: und obgleich die eben genannten Wiſſenſchaften davon hauptſächlich Unterricht geben müſſen, ſo gehören doch die Gründe davon eigentlich zur Perſpectiv, und müſſen deswegen hier noch erklärt werden.

324. §.

114F. Am natürlichſten wird man annehmen, daß das Kugelſtück ein Kugelabſchnitt wie CAPBD, und die kreisförmige Grundfläche deſſelben CD offen ſey, damit das Auge durch dieſe Oefnung hinein ſehen könne. Die Stelle des Auges Ω wird man ferner am beſten in der Axe ΩT des Kreiſes CD annehmen, die man als die Axe des ganzen Segments betrachten kann, und dabey vorausſetzen, daß die Geſichtsaxe mit der Axe des Segments zuſammen falle, mithin durch der Kugel Mittelpunct gehe: iſt alsdenn das Kugelſtück nicht gröſſer, als eine Halbkugel, ſo wird das Auge bey jeder Entfernung vom Mittelpunct der Kugel, auch wenn ſie unendlich groß wäre, die ganze innere Kugelfläche des Abſchnitts überſehen können. Wenn dagegen das Kugelſtück die Gröſſe der Halbkugel übertrift, ſo läßt ſich auf folgende Art finden, wie weit das Auge höchſtens entfernt ſeyn kann, wenn es noch die innere Kugelfläche des Abſchnitts ganz überſehen ſoll. Durch die Axe des Segments lege man eine Ebene, die den gröſten Kreis OAPB giebt, und der

die

die offene Grundfläche des Segments in C und D ſchneidet. Durch einen Durchſchnittspunct C ziehe man eine Tangente des gröſten Kreiſes, welche die Axe des Segments in Ω ſchneidet, ſo iſt TΩ die gröſte Entfernung vom Mittelpunct, in der das Auge noch die innere Kugelfläche des Segments ganz überſehen kann. Es iſt aber $T\Omega = r \sec OTC$, den Halbmeſſer der Kugel $= r$ geſetzt. Dieſer Abſtand nähert ſich der Gröſſe des Halbmeſſers deſto mehr, je kleiner OTC wird, je mehr ſich alſo die Gröſſe des Kugelabſchnitts der ganzen Kugel nähert. Für $OTC = o$, wäre $T\Omega = r$, und Ω fiele in O. Wenn man ſich alſo in O eine ganz kleine Oefnung vorſtellt, durch welche das Auge in die Kugel hinein ſehen könnte, ſo würde daſſelbe an dieſer Stelle O in der Kugelfläche ſelbſt die ganze innere Kugelfläche noch überſehen können.

325. §.

Dieſe Betrachtungen werden nun ſchon die Wahl der Stelle des Auges in der Geſichtsaxe lenken, nur bleibt noch die Frage übrig: was die Tafel für eine Stelle und Lage haben ſoll. Es wird nicht leicht erfordert, mehr als die halbe Kugel APB in die Projection zu bringen, und alsdenn wird man am natürlichſten den gröſten Kreis AB, als die Grundfläche der Halbkugel ſelbſt, für die Tafel annehmen. Geſetzt man müſte auch Bilder von Puncten oder Kreisbogen mit auf die Tafel bringen, die in der Halbkugelfläche AOB liegen, ſo würde dies noch angehen, wenn man ſich die Ebene des gröſten Kreiſes AB nach allen Seiten erweitert vorſtellet. Nur würden alsdenn dergleichen Bilder auſſerhalb

der Gränzen des Kreiſes AB fallen. Es würde demnach dieſe Vorausſetzung die Stelle der Tafel ſowohl, als auch ihre Lage gegen die Geſichtsaxe beſtimmen, weil die Ebene des Kreiſes AB durch der Kugel Mittelpunct geht, und auf der Geſichtsaxe ſenkrecht iſt. Ob man nun gleich bey dieſer Stellung der Tafel noch jede Entfernung des Auges wählen kann, welche die Gröſſe $T\Omega = r \sec OTC$ nicht übertrift; ſo hat es doch in vieler Abſicht ſeine Bequemlichkeit, wenn man die Stelle des Auges in O, mithin ſeinen Abſtand von der Tafel dem Halbmeſſer der Kugel gleich annimmt. Eine ſolche Abbildung der innern Fläche eines Kugelſtücks, wobey man das Auge in der Axe dieſes Kugelſegments, die Tafel auf dieſer Axe durch den Mittelpunct der Kugel ſenkrecht, und das Auge um den Halbmeſſer der Kugel von der Tafel entfernt annimmt, hat man die Stereographiſche Projection der Kugel genannt. Nimmt man das Auge von der Tafel unendlich weit entfernt an, ſo wird dieſe Projection orthographiſch. (199. §.) Es ſcheint, daß Franciſcus Aguilonius Opticorum Lib. ſex. Antwerp. 1612 den Nahmen der ſtereographiſchen Projection zuerſt eingeführet habe: wenigſtens ſagt er ſelbſt Lib. VI. Præfat. ad Stereographicen pag. 572. daß vor ihm niemand das Wort gebraucht habe. Vom Ptolomäus, (der ſo viel man weis im zweyten Jahrhundert nach Chriſti Geburt das erſte den damahligen Kentniſſen gemäſſe Lehrbuch der Aſtronomie, unter dem Titel Μεγαλη Συνταξιω, aufgeſetzt hat, welches, nachdem die Araber im neunten Jahrhundert es in ihre Sprache überſetzt hatten, unter dem Titel Almageſtum auch ins La-

tei-

teiniſche überſetzt iſt,) ſind beyde Projectionsarten, und zwar die ſtereographiſche unter dem Titel: Aſtrolabium, die orthographiſche unter dem Titel: Analemma, zuerſt betrachtet worden; jene in einem beſondern Werk: Complanatio ſuperficii Sphæræ ſ. de Planiſphærio, dieſe in einem andern: de Analemmate. Der Umſtand, daß die Tafel durch den Mittelpunct der Kugel geführt ſey, iſt nicht nothwendig, wiewohl man ihn gewöhnlich annimmt; aber die auf der gegen der Kugel Mittelpunct gerichteten Geſichtsaxe ſenkrecht angenommene Lage der Tafel iſt beyden Projectionsarten weſentlich eigen.

326. §.

Will man ein dem Auge zugekehrtes erhabenes Stück der Kugelfläche, wie z. E. COD wäre, perſpectiviſch entwerfen, ſo kann man am füglichſten die Tafel in O auf der Geſichtsaxe ΩT ſenkrecht annehmen, da ſie denn die Kugel berührt. Nur die orthographiſche Projection kann alsdenn eine völlige Halbkugel faſſen, wenn nur dasjenige in die Zeichnung kommen ſoll, was das Auge auf einmahl überſehen kann. Bey Abbildung der innern Fläche eines Segments, das kleiner als die Halbkugel iſt, nimmt man die Stelle des Auges auch wohl im Mittelpunct T der Kugel, und die Tafel ſo an, daß ſie den Kugelabſchnitt im Pol P ſeiner Grundfläche berührt: dies könnte alsdenn die Central-Projection der Kugel heiſſen. Alle dieſe Projectionsarten, beſonders aber die ſtereographiſchen und orthographiſchen Kugelprojectionen, werden in den Geographiſchen und Aſtronomiſchen Wiſſenſchaften ſo häufig, und mit ſo vielem Vortheil gebraucht, daß es

ſich der Mühe verlohnen wird, hier ſchon die Theorie davon etwas umſtändlicher vorzutragen. Von ältern Schriftſtellern, welche dieſe Theorie von den Projectionen der Kugelſchnitte abhandeln, gehören vornemlich auſſer des ſchon angeführten Aguilonii Werk, noch folgende hieher, Clavii Aſtrolabium im Tomo III. der Operum Clavii, die in den Jahren 1611 und 1612 zu Maynz in fünf Folio-Bänden herausgekommen ſind: Taquet Optices Libro III. in den Operibus Mathematicis Antwerp. 1669. De-chales Tractat. de Aſtrolabiis im Tomo III. des Mundi Mathematici Lugd. 1674. Alle dieſe Schriftſteller bedienen ſich, wie es damahls noch gewöhnlich war, des ſynthetiſch-geometriſchen Vortrags. Der ehemahlige Wittenbergiſche Lehrer der Mathematik, Hr. **Joh. Matthias Haſe** hatte den Vorſatz ein vollſtändiges Werk von den Kugel-Projectionen zu ſchreiben, und er machte den Entwurf davon in folgender kleinen Schrift bekannt: Sciagraphia integri tractatus de conſtructione mapparum omnis generis, Geographicarum, Hydrographicarum & Aſtronomicarum, & in ſpecie de projectionibus ſphærarum imprimis ſtereographica. Lipſ. 1717. Das Werk ſelbſt aber, wovon dieſe kleine Schrift den Abriß enthält, iſt ſo viel ich weis, nicht bekannt geworden. Nach der Zeit ſind über die hieher gehörigen Theorien eben keine neuere Unterſuchungen angeſtellet worden, bis die Herrn de la Caille und **Käſtner** angefangen haben, auch die Analyſin auf die Perſpectiv anzuwenden. Im V Bande der Abhandlungen der **Churfürſtl. Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften** findet ſich ein hieher gehöriger Aufſatz von mir, worin

ich

ich dieſe Theorie aus allgemeinen Formuln herge- leitet habe, die Hr. Käſtner im Anhange zur deut- ſchen Ausgabe von Smiths Optik, und in einer zu Leipzig im Jahr 1752 heraus gegebenen kleinen Schrift: Perſpectivæ & projectionum theoria ge- neralis analytica gebraucht hatte; die er auch nach der Zeit wiederum in einer ausführlichern Abhand- lung: Theoria projectionis Stereographicæ hori- zontalis zum Grunde gelegt hat. M. ſ. ſeine Diſ- ſertationes Mathematicas & Phyſicas Altenb. 1771. pag. 88. Hier werde ich alles leichter und kürzer aus den bisher vorgetragenen Gründen herleiten können, und ich bemerke nur noch daß auch ganz kürzlich Hr. Lambert Anmerkungen und Zuſätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten auf- geſetzt, und im 3. Theil ſeiner Beyträge zur Math. Berlin 1772. bekannt gemacht hat.

Der XX. Abſchnitt.

Allgemeine Theorie der ſtereographiſchen und orthographiſchen Kugel-Projectionen.

327. §.

Wenn die Grundfläche des Kegels ein Kugelſchnitt iſt, und die Spitze deſſelben in der Oberfläche der Kugel liegt; ſo iſt jeder Schnitt dieſes Kegels ein Kreis, deſſen Ebene auf derjenigen Axe der Kugel ſenkrecht ſteht, die durch des Kegels Spitze geht.

115F. Beweis. Es ſey ANEM ein Kugelſchnitt, und auf demſelben ſtehe ein Kegel, deſſen Spitze O in der Oberfläche der Kugel liegt, deren Mittelpunct T iſt. Durch O und T ſey eine Axe der Kugel gezogen, und TC auf der Ebene des Kugelſchnitts ANEM ſenkrecht, ſo iſt C der Mittelpunct des Kreiſes ANEM, und wenn eine Ebene durch C, T, O, gelegt wird, die ANEM in AE, die Kegelfläche aber in OA, OE ſchneidet, ſo iſt AE ein Durchmeſſer der Grundfläche des Kegels, die Ebene OAE, welche zugleich einen gröſten Kreis der Kugel giebt, iſt auf des Kegels Grundfläche ſenkrecht, mithin die Neigungsebene ſeiner Axe OC gegen die Grundfläche. Nun lege man durch T eine Ebene BX*b*Y auf

OT

OT ſenkrecht, ſo ſteht auch dieſe auf der Ebene OAE ſenkrecht, und ihre Durchſchnittslinie XY mit ABEN iſt auf OAE ſenkrecht. Wenn alſo letztere von BX*b*Y in B*b* von AMEN aber in AE geſchnitten wird, B*b* aber und AE einander in F ſchneiden, ſo liegt F in XY, und es iſt EF*b* der ſchneidenden Ebene BX*b*Y Neigungswinkel gegen des Kegels Grundfläche, die Winkel EFX, TFX ſind rechte Winkel, und die Seitenlinien OA, OE des Kegels treffen die Ebene BX*b*Y in Puncten *a* und *e*, die in B*b* liegen.

Will man nun die im XV. und XVI. Abſchnitt vorgetragene Theorie hier anwenden, und die Winkel hier eben ſo, wie dort bezeichnen, ſo iſt $CFX = \eta = 90°$, $CFT = \psi$, und $ACO = \beta$; auch hat man $AC = r$, $OC = c$. Man verlängere CT nach q, ſo iſt q des Kreiſes ANEM Pol, und es wird $OTq + OTF = OTq + 90° = \psi + 90°$, alſo $OTq = \psi$. Weiter hat man im Dreyeck OCT den Winkel an $C = 90° - \beta$, und $\psi = TCO + COT$ oder $\psi = 90° - \beta + COT$, alſo $COT = \psi + \beta - 90°$, und $\sin COT = -\cos(\psi + \beta)$. Eben das Dreyeck COT giebt $\frac{OT}{\sin OCT} = \frac{OC}{\sin\psi}$, und

$$\frac{CT}{\sin COT} = \frac{OC}{\sin\psi}, \text{ mithin } OT = \frac{c.\cos\beta}{\sin\psi},$$

und $CT = -\frac{c.\cos(\psi+\beta)}{\sin\psi}$. Es iſt aber vermöge der Natur der Kugel $OT^2 = r^2 + CT^2$, mithin $\frac{c^2\cos\beta^2}{\sin\psi^2} = r^2 + \frac{c^2 . \cos(\psi+\beta)^2}{\sin\psi^2}$,

und

und daraus folgt $c^2 . \cos\beta^2 = r^2 \sin\psi^2 + c^2 (\cos\psi^2 \cos\beta^2 - 2 \sin\beta \cos\beta \sin\psi \cos\psi + \sin\psi^2 \sin\beta^2)$, oder $c^2 \cos\beta^2 (1 - \cos\psi^2) = (r^2 + c^2 \sin\beta^2) \sin\psi^2 - c^2 \sin 2\beta \sin\psi \cos\psi$. Dividirt man mit $\sin\psi^2$, ſo erhält man $c^2 . \cos\beta^2 = r^2 + c^2 \sin\beta^2 - c^2 . \sin 2\beta \cot\psi$, oder $c^2 (\cos\beta^2 - \sin\beta^2) = r^2 - c^2 . \sin 2\beta \cot\psi$. Weil nun $\cos\beta^2 - \sin\beta^2 = \cos 2\beta$, ſo wird

$$\cot\psi = \frac{r^2 - c^2 . \cos 2\beta}{c^2 . \sin 2\beta},$$ oder

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{c^2 . \sin 2\beta}{r^2 - c^2 . \cos 2\beta}$$ gefunden. Weil ferner vorhin bewieſen iſt, daß der Schnitt auf der Neigungsebene der Axe des Kegels ſenkrecht ſey, ſo hat er beyde Eigenſchaften der ſectionis ſubcontrariæ, (289. 290. §.) und wird demnach allemahl ein Kreis.

Ob nun gleich bey dieſen Schlüſſen angenommen iſt, daß der Schnitt des Kegels durch den Mittelpunct der Kugel geführt ſey, ſo ändert ſich doch ſeine Natur nicht, wenn er nur auf der Axe OT ſenkrecht, oder mit dem angenommenen Schnitt BX*b*Y parallel bleibt. (257. §.)

Wenn die Ebene der Grundfläche des Kegels durch der Kugel Mittelpunct gehet, mithin ein gröſter Kreis der Kugel iſt, ſo hat man $r = c$, und das iſt der beſondre Fall des 291. §. Nun fallen C und T mithin OC und OT zuſammen, und der Schnitt iſt auf der Axe des Kegels ſenkrecht, dem 291. §. gemäß.

328 §.

328. §.

Jede ſtereographiſche Projection eines 115F.
Kugelſchnitts ANEM iſt ein Kreis, die Projection der Axe pq dieſes Kugelſchnitts geht durch den Mittelpunct T der Tafel, und ſteht auf der Durchſchnittslinie XY der Ebene des Kugelſchnitts mit der Tafel ſenkrecht.

Beweis. Denn das Auge O ſteht in einem Punct der Oberfläche der Kugel, und iſt die Spitze des optiſchen Kegels, wovon die Grundfläche der abzubildende Kreis iſt. Die Tafel ſchneidet diejenige Axe der Kugel, die durchs Auge mithin durch die Spitze des optiſchen Kegels geht, im Mittelpunct der Kugel ſenkrecht: mithin iſt die Projection, als der Schnitt des optiſchen Kegels mit der Tafel, ein Kreis. (327. §.) Uebrigens liegt die Projection PΠ der Axe pq in der Ebene der Axen OZ der Tafel und pq des Kugelſchnitts ANEM, mithin in der Ebene des gröſten Kreiſes $OqZp$, alſo in deſſen Durchſchnittslinie Bb mit der Tafel, die durch ihren Mittelpunct T geht. Eben dieſe Linie Bb ſteht auf XY ſenkrecht, weil XY auf der Ebene der Axen OZ und pq, als der Neigungs-Ebene der Tafel und des Kugelſchnitts ANEM gegen einander, ſenkrecht iſt.

Der Fall der ſtereographiſchen Projection eines Kugelſchnitts gehört alſo in der Perſpectiv zu denjenigen, wo der Mittelpunct des abzubildenden Kreiſes in der Ebene des Auges liegt: die Ebene der Axen OZ und pq iſt hier die Ebene des Auges, und Bb die Linie des Auges. Uebrigens leitet die Vergleichung mit den Schlüſſen des vor. §. noch auf folgende Sätze.

1.

1. Der Bogen Oq iſt der Abſtand des Auges von demjenigen Pol des abzubildenden Kreiſes, der dem Auge am nächſten liegt, und Ap der Abſtand dieſes Kreiſes ſelbſt von ſeinem nächſten Pol. Aus dem 497. §. Geom. weis man, daß zu jeder Axe der Kugel, wie pq iſt, eine Reihe darauf ſenkrechter Parallel-Kreiſe gehöre, wovon einer ÆQ durch der Kugel Mittelpunct geht, mithin ein gröſter Kreis iſt, der die Kugel halbirt. Von dieſer letztern Eigenſchaft heiſt ÆQ auch ein Aequator der Kugel; dieſerwegen gehört zu jeder Axe der Kugel ein Aequator, und wenn die Lage der Axe pq eines Kreiſes ANEM der Kugel bekannt iſt, ſo iſt zugleich die Lage des zugehörigen Aequators bekannt. Um hiernächſt die Lage eines der dazu gehörigen Parallelkreiſe zu beſtimmen, wie ANEM iſt, kann nicht allein ſein Abſtand Ap oder Ep von ſeinem nächſten Pol, ſondern auch ſein Abſtand EQ vom Aequator dienen, weil Ep und EQ einander zu 90° ergänzen. Eben ſo kann auch die Lage des Auges O durch den Abſtand OÆ von demſelben Aequator beſtimmt werden.

Man ſetze demnach die Winkel ÆTA $= \varepsilon$, ÆTO $= \lambda$, ſo hat man $\psi + \lambda = 90°$, weil CFT $= \psi =$ OTq war; (327. §.) mithin ergänzt der Abſtand des Auges vom Aequator des abzubildenden Kugelſchnitts allemahl denjenigen Winkel zu 90°, unter welchem die Ebene des Kugelſchnitts die Tafel ſchneidet. Wird ferner der Halbmeſſer der Kugel $= \varrho$ geſetzt, ſo iſt AC $= r = \varrho . \cos\varepsilon$, CT $= \varrho \sin\varepsilon$. Im vor. §. aber war auch CT $= -\frac{c . \cos(\psi + \beta)}{\sin\psi}$, alſo wird hier

CT =

$$CT = -\frac{c.\cos(90-\lambda+\beta)}{\cos\lambda},$$ und

$\cos.(90° - (\lambda - \beta)) = \sin(\lambda - \beta)$, mithin

$CT = -\frac{c.\sin(\lambda - \beta)}{\cos\lambda}$. Dieſer Werth dem vorigen gleich geſetzt giebt $\varrho \sin\varepsilon \cos\lambda = - c.\sin(\lambda - \beta)$, und $\frac{\varrho}{c} = \frac{\sin(\beta - \lambda)}{\sin\varepsilon.\cos\lambda}$. Aber das Dreyeck OCT giebt $\frac{\varrho}{c} = \frac{\cos\beta}{\sin\psi} = \frac{\cos\beta}{\cos\lambda}$, alſo erhält man $\sin(\beta - \lambda) = \sin\varepsilon \cos\beta$, oder $\sin\beta \cos\lambda - \cos\beta \sin\lambda = \sin\varepsilon \cos\beta$, mithin $\tan\beta \cos\lambda - \sin\lambda = \sin\varepsilon$, und $\tan\beta = \frac{\sin\varepsilon + \sin\lambda}{\cos\lambda}$. So wie demnach $\psi = 90 - \lambda$ durch λ beſtimmt wird, ſo kann auch β aus ε und λ gefunden werden.

Noch hat man $CF = CT \cot\psi$, und $CT = \varrho \sin\varepsilon$, folglich $CF = \varrho \sin\varepsilon \tan\lambda$; und dieſe Linie wird den Bezeichnungen des 290. §. gemäß $= \delta$. Uebrigens war $c = \frac{\varrho \sin\psi}{\cos\beta} = \varrho \cos\lambda \sec\beta$, und es wird

$$\sec\beta = \frac{\sqrt{(1 + 2\sin\varepsilon \sin\lambda + \sin\varepsilon^2)}}{\cos\lambda},$$ alſo

$c = \varrho\sqrt{(1 + 2\sin\varepsilon \sin\lambda + \sin\varepsilon^2)}$. Demnach kann man c, r, δ, durch den Halbmeſſer der Kugel ϱ und die Winkel ε, λ, ausdrücken.

329 §.

Den Mittelpunct und Halbmeſſer der ſtereographiſchen Projection eines Kugelſchnitts, imgleichen die ſtereographiſche Projection ſeiner Axe und Pole zu finden, wenn der Abſtand des Auges vom Aequator der Axe dieſes Kreiſes ſowohl, als auch der Abſtand dieſes Kreiſes ſelbſt von eben dem Aequator gegeben ſind.

115 F. Aufl. Wenn XY die Grundlinie der Tafel iſt, und Fb die Linie, worin die Tafel von der Ebene des Auges geſchnitten wird; ſo iſt Fb auf XY ſenkrecht, und der geſuchte Mittelpunct liegt in der graden Linie Fb: wenn alſo f dieſer Mittelpunct iſt, ſo hat man $Ff = \frac{b\delta - r^2}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$, und der Halbmeſſer der Projection iſt $= \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2 - r^2)}}$, vorausgeſetzt, daß $b = \frac{r^2 + c^2}{2c \cdot \operatorname{coſ}\beta}$ angenommen ſey. (290. §.) In eben der Linie Bb liegt die Projection der Axe pq, (328. §.) mithin auch die Projectionen der Pole p und q: und wenn Op die Tafel in P durchbort, ſo liegt P in Bb, und P iſt die Projection desjenigen Pols p, der hinter der Tafel liegt. Weil nun $Zp = Oq = 90° - \lambda$ iſt, mithin TOP $= \frac{1}{2}(90° - \lambda)$; ſo hat man TP $= \varrho \text{tang}\, \frac{90° - \lambda}{2}$. Wenn ferner O$q$ und Bb einander in Π ſchneiden; (man

(man vergleiche die 120. Fig. weil in der 115. Fig. der Punct Π wegen Mangel des Platzes nicht hat ausgedrückt werden können,) ſo hat man $Zq = 90° + \lambda$, mithin $TO\Pi = \frac{1}{2}(90° + \lambda)$ und $T\Pi = \varrho . \mathrm{tang} \frac{90° + \lambda}{2}$ für die Projection desjenigen Pols der vor der Tafel liegt.

Aus dem 328. §. hat man nun $c^2 = \varrho^2 (1 + 2 \sin \varepsilon \sin \lambda + \sin \varepsilon^2)$, und $r^2 = \varrho^2 \cos \varepsilon^2$, alſo $r^2 + c^2 = 2 \varrho^2 (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda)$. Ferner iſt $c . \cos \beta = \varrho \cos \lambda$, alſo wird $b = \frac{\varrho (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda)}{\cos \lambda}$, oder $b = \varrho (\sec \lambda + \sin \varepsilon \mathrm{tang} \lambda)$. Weiter war $\delta = \varrho \sin \varepsilon \mathrm{tang} \lambda$, alſo $b - \delta = \varrho \sec \lambda$, und $r(b - \delta) = \varrho^2 \cos \varepsilon \sec \lambda$. Endlich wird $b^2 = \varrho^2 (\sec \lambda^2 + 2 \sin \varepsilon \mathrm{tang} \lambda \sec \lambda + \sin \varepsilon^2 \mathrm{tang} \lambda^2)$ alſo $b^2 - r^2 = \varrho^2 (\sec \lambda^2 + 2 \sin \varepsilon \mathrm{tang} \lambda \sec \lambda + \sin \varepsilon^2 \mathrm{tang} \lambda^2 - \cos \varepsilon^2)$, oder $b^2 - r^2 = \varrho^2 \sec \lambda^2 (1 + 2 \sin \varepsilon \sin \lambda + \sin \varepsilon^2 \sin \lambda^2 - \cos \varepsilon^2 \cos \lambda^2)$ und $1 - \cos \varepsilon^2 \cos \lambda^2 = 1 - \cos \varepsilon^2 + \cos \varepsilon^2 \cos \lambda^2 = \sin \varepsilon^2 + \cos \varepsilon^2 \sin \lambda^2$, mithin erhält man $b^2 - r^2 = \varrho^2 \sec \lambda^2 (\sin \varepsilon^2 + 2 \sin \varepsilon \sin \lambda + \sin \lambda^2) = \varrho^2 \sec \lambda^2 (\sin \varepsilon + \sin \lambda)^2$, und $\sqrt{(b^2 - r^2)} = \varrho \sec \lambda (\sin \varepsilon + \sin \lambda)$, woraus der Halbmeſſer $\frac{r(b - \delta)}{\sqrt{(b^2 - r_2)}} = \frac{\varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon + \sin \lambda}$ gefunden wird.

Weiter hat man $b\delta = \varrho^2 (\sin \varepsilon \mathrm{tang} \lambda \sec \lambda + \sin \varepsilon^2 \mathrm{tang} \lambda^2)$ und $b\delta - r^2 = \varrho^2 (\sin \varepsilon tg \lambda \sec \lambda + \sin \varepsilon^2 \mathrm{tang} \lambda^2 - \cos \varepsilon^2)$, oder auch $b\delta - r^2 = \varrho^2 \sec \lambda^2 (\sin \varepsilon \sin \lambda + \sin \varepsilon^2 \sin \lambda^2 - \cos \varepsilon^2 \cos \lambda^2)$; und weil

$\cos\varepsilon^2 \cos\lambda^2 = \cos\lambda^2 - \sin\varepsilon^2 \cos\lambda^2$, ſo findet man $b\delta - r^2 = \varrho^2 \sec\lambda^2 (\sin\varepsilon \sin\lambda + \sin\varepsilon^2 - \cos\lambda^2)$, und

$$Ff = \varrho \sec\lambda \left(\sin\varepsilon - \frac{\cos\lambda^2}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}\right) \text{ oder}$$

$$Ff = \varrho \sin\varepsilon \sec\lambda - \frac{\varrho \cos\lambda}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}.$$

Hieraus läſt ſich auch der Abſtand Tf des Mittelpuncts der Projection vom Mittelpunct der Kugel ſo finden. Es iſt $TF^2 = CT^2 + CF^2 = \varrho^2 (\sin\varepsilon^2 + \sin\varepsilon^2 \tang\lambda^2) = \varrho^2 \sin\varepsilon^2 \sec\lambda^2$, alſo $TF = \varrho \sin\varepsilon \sec\lambda$. Das giebt nun $Tf = TF - Ff = \dfrac{\varrho \cos\lambda}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}$.

Weil fa, fe, Halbmeſſer der Projection ſind, ſo iſt jede dieſer Linien $= \dfrac{\varrho \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}$, und man hat $Ta = Tf + fa = \dfrac{\varrho(\cos\lambda + \cos\varepsilon)}{\sin\lambda + \sin\varepsilon}$, ſo wie $Te = Tf - fe = \dfrac{\varrho(\cos\lambda - \cos\varepsilon)}{\sin\lambda + \sin\varepsilon}$. Aus dem (451. §. Geom.) ſubſtituire man die Werthe

$$\cos\lambda + \cos\varepsilon = 2 \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \lambda) \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \lambda)$$
$$\cos\lambda - \cos\varepsilon = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \lambda) \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \lambda)$$
$$\sin\lambda + \sin\varepsilon = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \lambda) \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \lambda),$$

ſo erhält man

$$Ta = \varrho . \cot\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \lambda), \quad \text{und}$$
$$Te = \varrho . \tang\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \lambda).$$

Wenn $\varepsilon = \lambda$ iſt, ſo wird $Te = 0$, und die Projection geht durch den Mittelpunct der Tafel.

330 §.

330. §.

Die orthographiſche Projection eines Kugelſchnitts iſt allemahl eine Ellipſe, weil jede orthographiſche Projection des Kreiſes eine Ellipſe iſt, (259. §.) nur daß ſie in dem beſondern Fall ein Kreis wird, wenn die Tafel mit der Ebene des abzubildenden Kreiſes parallel liegt. Man ſtelle ſich in der 115. Fig. vor, daß das Auge O unendlich weit hinaus rücke, TO aber bleibe eine Axe der Kugel, mit der Axe des Strahlen-Cylinders CO parallel, und auf derſelben ſey die Tafel BXbY ſenkrecht. Nun war im 327. §. COT $+ 90 = \psi + \mu$, und hier iſt COT $= 0$, mithin wird $\beta = 90° - \psi$, wie auch aus Betrachtung der Figur ſogleich erhellet. Weiter bleibt $\psi + \lambda = 90°$, alſo iſt $\lambda = 90° - \psi = \beta$. Ueberdem iſt hier c unendlich groß und fällt aus der Rechnung weg, es bleibt aber $r = \varrho \cos\varepsilon$, CT $= \varrho \sin\varepsilon$, CF $= \delta = \varrho \sin\varepsilon \tang\lambda$, und TF $= \varrho \sin\varepsilon \sec\lambda$. 115 F.

Weil das Auge noch in der Axe TO, wiewohl von T unendlich weit entfernt, angenommen wird, ſo liegen zwar die orthographiſchen Projectionen der Pole p und q noch in Bb: weil aber pO und qO nun mit TO parallel werden, mithin auf Bb ſenkrecht ſind; ſo erhält man TP $=$ T$\Pi = \varrho \sin\lambda$, weil BT$p = bTq = \lambda$ iſt.

331 §.

Den Mittelpunct und die beyden Axen der orthographiſchen Projection eines Kugelſchnitts zu finden, wenn ſowohl der Abſtand des Auges, als auch des abzubildenden Kreiſes vom Aequator des letztern gegeben ſind.

115F. Aufl. Es bleibe, wie im 329. §. XY die Grundlinie der Tafel, und Fb die Durchſchnittslinie der Ebene des Auges mit der Tafel, ſo liegt der geſuchte Mittelpunct in Fb, und wenn f dieſer Mittelpunct iſt; ſo hat man $Ff = \frac{\delta \,\mathrm{coſec}\,\psi \,\mathrm{coſec}\,\zeta}{\cot\psi + \cot\beta \sin\eta}$ (265. §.) Wenn ferner der auf der Grundlinie der Tafel ſenkrechte Durchmeſſer $= 2p$, der mit ihr parallele $= 2q$ iſt, ſo hat man $p = \frac{r \sin\beta \,\mathrm{coſec}\,\psi \,\mathrm{coſec}\,\zeta}{\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta}$ (265. §.) und $q = r$.

Hier iſt nun $\eta = 90$, mithin auch $\zeta = 90°$, und es wird $p = \frac{r \,\mathrm{coſec}\,\psi}{\cot\psi + \cot\beta}$, ſo wie $Ff = \frac{\delta \,\mathrm{coſec}\,\psi}{\cot\psi + \cot\beta}$. Weiter iſt hier $\beta = \lambda = 90° - \psi$, (330. §.) alſo wird $p = \frac{r \sec\lambda}{\mathrm{tang}\,\lambda + \cot\lambda} = \frac{r \sec\lambda \,\mathrm{tang}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\lambda^2 + 1} = \frac{r \,\mathrm{tang}\,\lambda}{\sec\lambda} = r \sin\lambda$. Ueberdem iſt hier $r = \varrho \cos\varepsilon$, alſo wird $p = \varrho \cos\varepsilon \sin\lambda$, und $q = \varrho \cos\varepsilon$.

Um eben ſo Ff zu finden, ſetze man $\varrho \sin\varepsilon \,\mathrm{tang}\,\lambda$ ſtatt δ, (330. §.) und λ ſtatt β und $90° - \psi$, ſo wird $Ff = \frac{\varrho \sin\varepsilon \,\mathrm{tang}\,\lambda \sec\lambda}{\mathrm{tang}\,\lambda + \cot\lambda} = \frac{\varrho \sin\varepsilon \,\mathrm{tang}\,\lambda^2}{\sec\lambda}$ $= \varrho \sin\varepsilon \,\mathrm{tang}\,\lambda \sin\lambda$, oder $Ff = \frac{\varrho \sin\varepsilon \sin\lambda^2}{\cos\lambda}$.

Will

Will man den Abſtand Tf des Mittelpuncts der Projection vom Mittelpunct der Kugel ſuchen; ſo erhält man $Tf = TF - Ff = \varrho \sin\varepsilon \sec\lambda - \frac{\varrho \sin\varepsilon \sec\lambda^2}{\cos\lambda} = \varrho \sin\varepsilon \cdot \frac{1 - \sin\lambda^2}{\cos\lambda}$, oder

$Tf = \varrho \sin\varepsilon \cos\lambda$.

Hier hat man nun $fe = fa = p = \varrho \cos\varepsilon \sin\lambda$, mithin wird

$Ta = Tf + fa = \varrho(\sin\varepsilon\cos\lambda + \cos\varepsilon\sin\lambda) = \varrho \sin(\varepsilon + \lambda)$

$Te = Tf - fe = \varrho(\sin\varepsilon\cos\lambda - \cos\varepsilon\sin\lambda) = \varrho \sin(\varepsilon - \lambda)$.

Wenn man aus dieſen Formuln die Puncte a und e ſucht, und den Abſtand zwiſchen beyden halbirt; ſo iſt ebenfalls der Mittelpunct f gefunden.

332 §.

Die künſtliche Erdkugel, oder den ſo genannten Globum terreſtrem lernt man gewöhnlich ſchon bey Erlernung der politiſchen Geographie wenigſtens ſo weit kennen, daß man einen Begrif von der Welt-Axe, den Weltpolen, und dem Aequator der Erdkugel hat, geſetzt daß auch dieſe Kenntniſſe vielleicht noch ziemlich mangelhaft geblieben wären. Die Mathematiſche Geographie giebt von allen demjenigen umſtändlichen Unterricht, was die künſtliche Erdkugel gleichſam im Modell vorſtellt. Wenn nun gleich die Mathematiſche Geographie in der Ordnung der Mathematiſchen Wiſſenſchaften unten allererſt folgen wird; ſo wird es doch kein erheblicher Fehler wider die Methode ſeyn, wenn ich hier annehme, daß man die künſtliche Erdkugel nach ihrem gemeinen Gebrauch kenne. Wer die Geometrie aus den beyden erſten Theilen dieſes Lehrbuchs inne hat,

und meinem Vortrage der Perſpectiv bisher hat folgen können, der wird mich leicht verſtehen, wenn ich nun noch von den bisherigen Lehren eine Anwendung auf die perſpectiviſche Abbildung des Globi mache.

Ich ſetze alſo voraus, daß man den Aequator der Erde, oder die von den Schiffern ſo genannte Linie, die Axe dieſes Aequators, oder die Weltaxe und ihre Pole, die ſo genannten **Welt-Pole** kenne. Ich ſetze ferner voraus, daß man wiſſe, was der Meridian eines Orts ſey, oder ſich wenigſtens durch folgende Erklärung vorläufig einen Begrif davon mache. Alle gröſte Kreiſe durch die Welt-Pole, die folglich auf dem Aequator und allen ſeinen Parallelen ſenkrecht ſtehen, heiſſen **Meridiane**, oder **Stunden-Kreiſe**, und der ſphäriſche Winkel, den ein Paar ſolcher Meridiane an den Polen des Aequators einſchlieſſen, heiſt ein **Stundenwinkel**. Wenn man ſich einen ſolchen Meridian durch einen beſtimmten Ort auf der Erdfläche vorſtellt, ſo heiſt derſelbe der Meridian dieſes Orts. Nimmt man auf den beyden Schenkeln eines Stundenwinkels vom Pol angerechnet Bogen von 90°, ſo liegen die Endpuncte im Aequator, und der Bogen des Aequators zwiſchen beyden Puncten iſt das Maaß des Stundenwinkels. Gewöhnlich ſind auf dem Globo Stundenkreiſe unter Winkeln von 15 zu 15 Graden verzeichnet: wird die Lage eines dieſer Meridiane als bekannt angenommen und derſelbe der **erſte Meridian** genannt, ſo läßt ſich die Stelle eines jeden Puncts auf der Oberfläche der Erde vermittelſt ſeines Stundenwinkels und ſeines Abſtandes vom Pol beſtimmen.

men. Es ſtelle nemlich in der 115. Fig. $pEQq$ den erſten Meridian vor, und L ſey ein Punct auf der Erdfläche, dem der Meridian pLq zugehört; ſo iſt die Lage deſſelben durch den Stundenwinkel QpL und den Abſtand pL vom Pol beſtimmt. Wenn der Meridian pLq den Aequator in D ſchneidet, ſo iſt der Bogen des Aequators QD das Maaß des Stundenwinkels QpL, und der Abſtand DL des Puncts L vom Aequator ergänzt pL zu 90°. Demnach können auch QD und DL ſtatt QpL und pL dienen, den Ort des Puncts L zu beſtimmen. In der Geographie heiſt DL die Breite des Orts L, und QD ſeine geographiſche Länge. 115 F.

333. §.

Noch werde ich im folgenden vorausſetzen, daß man wiſſe, was der Horizont eines Orts, und ſeine beyden Pole, das Zenith und Nadir, ſind. Wenn man durch einen willkührlichen Ort auf der Erdfläche, z. E. Paris, eine Axe der Kugel durch ihren Mittelpunct ziehet, ſo heiſt dieſe die Scheitellinie des Orts. (Man vergleiche den 11. 12. §. Stat. und 12. §. der Aeroſt.) und der zu dieſer Axe gehörige gröſte Kreis heiſt der Horizont des Orts. Er wird beym Globo durch den groſſen hölzernen Reifen vorgeſtellet, der die Kugel umgiebt, und ihr zugleich zur Unterſtützung dient. Auſſerdem iſt der Globus noch mit einem meßingenen Ringe umgeben, der einen allgemeinen Meridian vorſtellet: in demſelben ſind die Pole des Aequators ſo befeſtiget, daß die Kugel um die Axe des Aequators gedrehet, und jeder Ort unter den meßingenen Meridian geführet werden kann. Letzterer ſtehet auf dem höl-

zernen Horizont ſenkrecht, und läſt ſich zugleich um ſeinen Mittelpunct herum ſchieben. Stellet man nun dieſen meßingenen Meridian ſo, daß die Stelle deſſelben, worunter ſich der angenommene Ort befindet, zu beyden Seiten 90° vom Horizont entfernt iſt; ſo ſteht die Scheitellinie des Orts auf dem hölzernen Horizont ſenkrecht, und letzterer ſtellet den Horizont des angenommenen Orts vor. Derjenige Pol dieſes Horizonts, welcher in der obern Halbkugel liegt, heiſt das Zenith, der andre in der untern Halbkugel das Nadir.

Die gröſten Kreiſe durch die Axe des Horizonts heiſſen Vertical-Kreiſe, ſie ſind in Anſehung des Horizonts das, was die Meridiane in Anſehung des Aequators ſind: der Winkel am Zenith, unter welchem ein Paar Verticalkreiſe einander ſchneiden, heiſt ein Azimuthalwinkel. Wird unter den Verticalkreiſen einer als der erſte angenommen, wozu hier am bequemſten der Meridian desjenigen Orts dienet, womit man die Lage der übrigen vergleichen will; ſo kann die Lage eines jeden Orts auf der Erdfläche eben ſo vermittelſt des Azimuthalwinkels und ſeines Abſtandes vom Zenith beſtimmet werden, wie ſie ſich vermittelſt des Stunden-Winkels und des Abſtandes vom Pol beſtimmen läſt. Wenn in der 115. Fig. der gröſte Kreis BY*b*X den Horizont, OZ die Scheitellinie Z das Zenith, Z*p*AOQE den erſten Verticalkreis vorſtellt, ZLGO aber den Verticalkreis des Orts L, der den Horizont in G ſchneidet, ſo iſt *b*ZL das Azimuth des Puncts L, und ZL ſein Abſtand vom Zenith. Der Bogen des Horizonts *b*G iſt nun das Maaß des Azimuthalwinkels

*b*Z*l*,

bZl, und LG der Abſtand des Orts L vom Horizont, oder ſeine Höhe über dem Horizont: alſo können auch bG und GL dienen, die Stelle des Puncts L auf der Kugelfläche zu beſtimmen.

Der XXI. Abſchnitt.

Von der ſtereographiſchen und orthographiſchen Polar-Projection.

334. §.

Wenn man den Globum ſo ſtellet, daß der Aequator und Horizont zuſammen fallen, ſo fällt auch die Weltaxe mit der Scheitellinie, oder der Axe des Horizonts zuſammen, der eine Welt-Pol fällt ins Zenith, der andre ins Nadir, und alle Parallelkreiſe des Aequators ſind zugleich Parallelkreiſe des Horizonts, die Meridiane ſind zugleich Verticalkreiſe, und die Stundenwinkel zugleich Azimuthalwinkel. Man ſtelle ſich nun vor, das Auge ſtehe im Nadir, oder dem damit zuſammen fallenden Pol des Aequators, die Tafel aber ſey der Aequator, der jetzt mit dem Horizont einerley iſt, das Auge ſehe alſo durch die Ebene des Aequators in die Hölung derjenigen Halbkugel hinein, die über dem Horizont liegt.

liegt. Werden nun die Meridiane nebſt den Parallelkreiſen des Aequators ſo abgebildet, wie ſie dem Auge in der angenommenen Stelle erſcheinen müſſen, ſo nennt man dies die Polar-Projection der Kugel.

335 §.

Die Regeln zur Zeichnung der ſtereographiſchen Polar-Projection der Kugel zu finden.

114F. Aufl. Es ſey AGBH der Aequator und hier zugleich der Horizont, P der eine Welt-Pol und hier zugleich das Zenith, O der andre mit dem Nadir zuſammen fallende Pol, worin das Auge ſteht, alſo OP die mit der Scheitellinie zuſammen fallende Weltaxe. Ferner ſey PAOB ein Meridian durch einen bekannten Punct auf der Erdfläche von welchem die Azimuthalwinkel, die hier mit den Stundenwinkeln einerley ſind, anfangen ſollen: überdem ſey PLSO ein andrer Meridian, der dem vorigen unter dem Winkel APS ſchneidet, deſſen Maaß der Bogen AS iſt. Endlich ſey MLEN ein Parallelkreis des Aequators, deſſen Abſtand vom Aequator der Bogen SL, und deſſen Abſtand vom Pol P der Bogen PL iſt.

Was nun zuerſt die Projectionen der Meridiane betrift, ſo erhellet ohne daß es einmahl nöthig iſt, auf die allgemeine Aufgabe des 329. §. zurück zu gehen, von ſelbſt, daß ihre Projectionen grade Linien ſind, die ſich insgeſammt in dem Punct T ſchneiden, weil das Auge in der Ebene eines jeden dieſer Meridiane ſteht. Die Projection des Quadranten PLS iſt die grade Linie TS, und der Winkel

kel ATS hat mit dem ſphäriſchen Winkel APS einerley Anzahl von Graden: beyder Maaß iſt der Bogen AS in Graden ausgedrückt, und ATS iſt das Bild des Stundenwinkels oder Azimuthalwinkels APS. Die allgemeinen Formuln des 329. § geben übrigens eben daſſelbe. Denn für den Halbmeſſer der Projection iſt der allgemeine Ausdruck $\frac{\varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon + \sin \lambda}$ gefunden, und hier iſt $\varepsilon = 0$, weil der Meridian ein gröſter Kreis iſt, und $\lambda = 0$, weil das Auge im Umfange des abzubildenden Kreiſes ſteht: mithin wird der Halbmeſſer der Projection $= \frac{\varrho}{0} = \infty$, das heiſt die Projection iſt eine grade Linie, dieſe grade Linie muß auch den übrigen Formuln des 329. §. gemäß mit derjenigen einerley ſeyn, worin die Ebene des abzubildenden Kreiſes die Tafel ſchneidet. Wenn nemlich TS dieſe Linie für den Meridian PSO iſt, ſo müſte der Mittelpunct der Projection in einer durch T auf TS ſenkrecht geſetzten Linie liegen, und nach der Bezeichnung der 115. Fig. um den Abſtand $Tf = \frac{\varrho \cos \lambda}{\sin \varepsilon + \sin \lambda}$ davon entfernt ſeyn. Weil nun dieſer Abſtand hier auch unendlich groß wird; ſo läuft die Projection mit TS parallel. Ueberdem aber iſt in dem gegenwärtigen Fall auch $\varepsilon = \lambda$, alſo läuft die Projection durch T (329. §. am Ende) und es iſt TS ſelbſt die Projection.

Auſſer den Projectionen der Meridiane gehören noch die Projectionen der Parallelkreiſe, wovon

MLEN

MLEN einen vorſtellt, in die Zeichnung, und auf einen ſolchen Parallelkreis wendet man für die angenommene Stelle des Auges die Formuln des 329 §. ſo an. Hier iſt der Bogen SL in Graden ausgedrückt $= \varepsilon$, was aber im 329. §. λ war, iſt hier $= 90°$, weil das Auge um einen Quadranten vom Aequator des Kreiſes MLEN entfernt iſt, demnach wird der Halbmeſſer der Projection $= \frac{\varrho \cos\varepsilon}{1 + \sin\varepsilon}$.

Weil nun $\frac{\sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon} = \tan\frac{1}{2}\varepsilon$ (459. §. Geom.)

ſo iſt $\frac{\sin(90° - \varepsilon)}{1 + \cos(90° - \varepsilon)} = tg.\frac{1}{2}(90° - \varepsilon)$ oder

$\frac{\cos\varepsilon}{1 + \sin\varepsilon} = \tan(45° - \frac{1}{2}\varepsilon)$, und der Halbmeſſer der Projection iſt $= \varrho \tan(45° - \frac{1}{2}\varepsilon)$. Den Abſtand ihres Mittelpuncts vom Mittelpunct der Kugel giebt die allgemeine Formul des 329. §.

$Tf = \frac{\varrho \cos\lambda}{\sin\varepsilon + \sin\lambda} = 0$, das heiſt T iſt ſelbſt der Mittelpunct.

Das alles giebt ſich auch aus Betrachtung der Figur. Denn die Projection iſt ein Schnitt des optiſchen Kegels OMN, deſſen Ebene mit der Grundfläche MN parallel liegt: mithin iſt ſie ein Kreis, deſſen Mittelpunct in der Axe des Kegels liegt, alſo in T weil T in der Axe und zugleich in der Ebene des Schnitts liegt. Wenn nun FM ein Halbmeſſer des Parallelkreiſes iſt, und OM die Tafel in *m* durch-

durchbort, ſo iſt T*m* der Halbmeſſer der Projection, und man hat $Tm = \frac{OT}{OT + TF}$.

$$FM = \frac{\varrho}{\varrho + \varrho \sin \varepsilon} \cdot \varrho \cos \varepsilon = \frac{\cos \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon} \cdot \varrho,$$

wie vorhin. Weil auch $PM = 90° - \varepsilon$, alſo $POM = 45° - \frac{1}{2}\varepsilon$, und $Tm = OT . tg . POM$ iſt, ſo hat man auch $Tm = \varrho . \tang (45° - \frac{1}{2}\varepsilon)$.

Nun ſtelle AGBH den Horizont, oder Aequator, als die Tafel, für ſich allein vor, T ſey ihr Mittelpunct, und AB die Projection desjenigen Meridians oder Verticalkreiſes, den man für den erſten annehmen will, GH das Bild eines andern, der den vorigen ſenkrecht ſchneidet. Den Quadranten AH theile man in ſeine Grade ein, und zähle ſie von A nach H, ſo kann man die Bilder aller übrigen Meridiane leicht zeichnen, wenn man aus T in alle Theilungspuncte grade Linien ziehet. Weiter ziehe man von G in alle Theilungspuncte des Quadranten AH grade Linien, ſo geben die Durchſchnittspuncte mit TA die Halbmeſſer für die Projectionen der Parallelkreiſe, ſo wie ſie hier für die geographiſchen Breiten von 15, 30°, u. ſ. f. vorgeſtellet ſind. 116F.

336. §.

Die Tafel ſtellt die ſtereographiſche Polar-Projection einer Halbkugel der Erde vor, man ſoll das Bild K eines Puncts L finden, deſſen Geographiſche Länge und Breite gegeben iſt: 114 116F.

Aufl.

Aufl. Es ſey z. E. die Länge 55° die Breite 40°. Von A nach S zähle man die Grade der Länge und ziehe TS, ſo liegt das geſuchte Bild in TS. Von A nach M zähle man ferner die Grade der Breite, und ziehe GM: wenn nun TA und GM einander in *m* ſchneiden, ſo trage man T*m* auf TS aus T in K, ſo iſt K das geſuchte Bild.

Weil auch die Tafel hier zugleich den Horizont vorſtellen kann, ſo iſt der Bogen AS das Azimuth, AM aber die Höhe des abgebildeten Puncts über dem Horizont.

Wäre das Bild K eines Puncts auf der Tafel gegeben, und man ſollte die Länge und Breite des abgebildeten Puncts finden, ſo könnte man ſo verfahren. Man ziehe TK bis an S und zähle die Grade von A bis S, ſo hat man die Länge. Weiter trage man TK auf TA von T in *m*, ziehe G*m* in M, zähle die Grade von A bis M, ſo hat man die Breite des abgebildeten Puncts. Stellt die Tafel zugleich den Horizont vor, ſo findet man eben ſo das Azimuth und die Höhe des abgebildeten Puncts.

Wenn man den Durchſchnittspunten in AT die ihnen zukommende Zahl der Grade der Breite beyfügt; ſo zeigt die Zeichnung unmittelbar die Länge und Breite, oder das Azimuth und die Höhe aller der Puncte an, worin die Bilder der Meridiane und Parallelkreiſe einander ſchneiden. So iſt z. E. die Länge des Puncts Z 70 Grad ſeine Breite 15 Grad. Iſt die Tafel zugleich der Horizont, ſo iſt auch das Azimuth des Puncts Z 70 Grad, und ſeine Höhe 15 Grad.

337. §.

337. §.

Die Regeln zur Zeichnung der orthographiſchen Polar-Projection zu finden.

Aufl. Die orthographiſchen Projectionen der Meridiane ſind wie die ſtereographiſchen grade Linien, die einander in T ſchneiden, und zwar unter Winkeln, die denjenigen gleich ſind, unter welchen die Meridiane einander ſelbſt ſchneiden. Dies folgt ſchon daraus, weil das Auge in der Ebene eines jeden dieſer Meridiane ſteht, und die allgemeinen Formuln des 331. §. geben eben daſſelbe. Was im 331. §. ε und λ war, iſt hier $=0$ wie im 335. §. und die Formuln des 331. §. verwandeln ſich in folgende $p=0$, $q=\varrho$, $Ff=0$. Eigentlich heiſt das, die Projection iſt kein Cylinderſchnitt, ſondern ein Schnitt einer Ebene mit einer andern. Denn es iſt $\lambda=\beta$, mithin hier zugleich $\beta=0$, oder die Axe des Cylinders liegt in ſeiner Grundfläche, mithin iſt es kein Cylinder mehr, ſondern eine Ebene.

Die orthographiſche Projection des Parallelkreiſes MLEN iſt ein Kreis um den Mittelpunct T, deſſen Halbmeſſer $T\mu$ eben ſo groß, als der Halbmeſſer FM des Parallelkreiſes iſt, nemlich $=\varrho\cos\varepsilon$. Denn die Projection iſt ein Schnitt mit der Grundfläche des Cylinders parallel. Es iſt nun im 331. §. $\lambda=90°$, und man findet $p=\varrho\cos\varepsilon=q$, $Tf=0$. 114F.

Wollte man demnach die 116. Fig. für den Fall der orthographiſchen Projection zeichnen, ſo könnte man übrigens wie im 335. §. verfahren, nur müſte man die Linien durch die Theilungspuncte des

Quadranten AH nicht in G, ſondern insgeſammt mit GH parallel, oder auf TA ſenkrecht ziehen.

338. §.

Man ſiehet alſo leicht, wie ſich die Auflöſung der Aufgabe des 336. §. für den Fall der orthographiſchen Projection ändern würde. Alles übrige bleibt den dortigen Regeln gemäß, nur daß man ſich
116F. vorſtellen muß, der Vereinigungspunct G liege unendlich weit hinaus. Man zählt alſo von A nach S die gegebenen Grade der Länge, ziehet TS, zählt ferner von A nach M die gegebenen Grade der Breite, zieht $M\mu$ auf AT ſenkrecht, und trägt hierauf $T\mu$ von T nach k ſo iſt k die geſuchte orthographiſche Projection. Umgekehrt nun die Länge und Breite des gegebenen Puncts k zu finden, ziehet man Tk in S, ſo hat man von A nach S die Grade der Länge: weiter trägt man Tk in $T\mu$ und zieht μM mit GH parallel, ſo hat man von A nach M die Grade der Breite.

Die ſtereographiſche Projection K eines Puncts
114F. L auf der Oberfläche der Kugel, und eben deſſelben Puncts L orthographiſche Projection k liegen allemahl mit dem Mittelpunct der Kugel oder der Tafel in grader Linie. Denn OL liegt in der Ebene der Parallelen OT, ωL, mithin liegen T, K, k, in der Durchſchnittslinie der Ebene dieſer Parallelen mit der Tafel. Es war aber $TK = \frac{\varrho \cos \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon}$, und $Tk = \varrho \cos \varepsilon$, mithin iſt $TK : Tk = \frac{1}{1 + \sin \varepsilon} : 1 = 1 : 1 + \sin \varepsilon$. Dieſe Anmerkung dient, wenn eine

eine von beyden Projectionen des Puncts L gegeben iſt, die andre leicht zu finden, wenn man ein für allemahl die Gleichung $TK = \frac{Tk}{1 + \sin\varepsilon}$, oder $Tk = TK(1 + \sin\varepsilon)$ bemerkt, da dann allemahl $Tk > TK$ iſt. Weil übrigens $1 + \sin\varepsilon = \frac{\cos\varepsilon}{\tan\frac{1}{2}(90° - \varepsilon)}$, ſo iſt auch

$$Tk = \frac{TK \cdot \cos\varepsilon}{\tan\frac{1}{2}(90° - \varepsilon)}.$$

Der XXII. Abſchnitt.

Von der ſtereographiſch- und orthographiſch-äquatoriſchen Kugel-Projection.

339 §.

Man ſtelle nun die künſtliche Erdkugel, oder den ſo genannten Globum ſo, daß die Weltpole, mithin auch die Weltaxe, im Horizont liegen; ſo wird der Horizont zugleich einen Meridian vorſtellen, und der Aequator mit allen ſeinen Parallelkreiſen wird auf dem Horizont ſenkrecht ſeyn. Die Schei-

tellinie mit dem Zenith und Nadir, oder die Pole des Horizonts liegen bey dieſer Stellung der Kugel im Aequator: und wenn wie im 334. §. die Vorausſetzung beybehalten wird, daß das Auge im Nadir ſtehe und durch die Ebene des Horizonts in die innere Hölung der über dem Horizont liegenden Halbkugel hineinſehe; ſo nennt man es die Aequatoriſche Projection der Kugel, wenn die Meridiane und Parallelkreiſe auf dem Horizont ſo abgebildet werden, wie ſie bey dieſer Stellung des Auges und der Tafel erſcheinen müſſen. Man nimmt am bequemſten an, daß derjenige Meridian mit dem Horizont zuſammen falle, den man für den erſten anſehen will, damit die Tafel ſelbſt zugleich der erſte Meridian ſey. Uebrigens iſt die Projection ſtereographiſch, wenn das Auge im Nadir um den Halbmeſſer der Kugel von der Tafel entfernt iſt. Wenn aber, ohne die übrigen Vorausſetzungen zu ändern, angenommen wird, das Auge ſtehe zwar in der Scheitel-Linie aber unendlich weit von der Tafel entfernt; ſo wird eben dieſe Aequatoriſche Projection orthographiſch.

340. §.

Die Regeln zur Zeichnung der ſtereographiſch-aequatoriſchen Projection der Kugel zu finden.

117F Aufl. In der 117. Fig. ſey GPHQ der erſte Meridian, und zugleich der Horizont, welcher hier für die Tafel angenommen wird, Z ſey das Zenith, und das Auge O ſtehe im Nadir. Weiter ſey PLEQA ein andrer Meridian der den erſten unter dem Winkel GTE oder GPE $= \gamma$ ſchneidet, ſo iſt der

der Mittelpunct und Halbmeſſer der Projection aus den Formuln des 329. §. leicht gefunden. Hier iſt nemlich $\varepsilon = 0$, weil der Meridian ein gröſter Kreis iſt; der Winkel $\psi = 90° - \lambda$ (328. §.) iſt hier der Stunden-Winkel GTE oder GPE $= \gamma$; alſo hat man hier $\lambda = 90° - \gamma$. Dieſemnach wird der Halbmeſſer der Projection $\frac{\varrho \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}$ (329. §.) hier

$$= \frac{\varrho}{\sin\lambda} = \frac{\varrho}{\cos\gamma} = \varrho \sec\gamma.$$ Weil ferner PQ die Durchſchnittslinie der Grundfläche des Geſichtskegels mit der Ebene der Tafel iſt; ſo liegt der Mittelpunct der Projection in GH, wenn GH und PQ einander in T ſenkrecht ſchneiden. Dieſer Mittelpunct ſey f, ſo hat man $Tf = \frac{\varrho \cos\lambda}{\sin\varepsilon + \sin\lambda} =$ $\varrho \cot\lambda = \varrho \operatorname{tang}\gamma$. Auch hat man $Ta = \varrho \cot \frac{1}{2}\lambda = \varrho \operatorname{tang}(90° - \frac{1}{2}\lambda)$ und $Te = -\varrho \operatorname{tang} \frac{1}{2}\lambda$; (329. §.) da dann ae in f halbirt den Mittelpunct giebt. Weil nun hier $\lambda = 90° - \gamma$ iſt, ſo erhält man

$$Ta = \varrho \operatorname{tang}(45 + \tfrac{1}{2}\gamma) = \varrho \operatorname{tang} \frac{90° + \gamma}{2}$$

$$Te = -\varrho \operatorname{tang} \frac{90° - \gamma}{2}.$$

Für $\gamma = 90°$, erhellet von ſelbſt, daß die Projection mit der graden Linie PQ einerley ſey, wie denn auch der Halbmeſſer $\varrho \sec\gamma$ unendlich groß, $Te = 0$, und Ta ebenfalls unendlich groß wird.

In eben der Zeichnung ſtelle $A'YLE'X$ einen Parellelkreis des Aequators $OGZH$ vor, der die Tafel in XY mit GH parallel ſchneidet; ſo iſt der Bogen LE hier $= \varepsilon$, und $\lambda = 0$. Mithin wird der Halbmeſſer der Projection des Parallelkreiſes

$$\frac{\varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon + \sin \lambda} = \varrho \cot \varepsilon,$$ der Mittelpunct derſelben

liegt in TP, und wenn derſelbe f iſt, ſo hat man

$$Tf' = \frac{\varrho \cos \lambda}{\sin \varepsilon + \sin \lambda} = \varrho \operatorname{cosec} \varepsilon.$$ Eben ſo findet

man $Ta' = \varrho \cot \tfrac{1}{2} \varepsilon$ und $Te' = \varrho \tan \tfrac{1}{2} \varepsilon$. Die Projection des Aequators ſelbſt iſt mit der graden Linie GH einerley. Weil für ihn $\varepsilon = 0$ iſt, ſo wird der Halbmeſſer $\varrho \operatorname{cosec} \varepsilon$, ſo wie auch Ta' unendlich groß, und Te' wird $= 0$. Zu bemerken iſt hiebey noch, daß die Puncte X und Y in dem Parallelkreiſe und zugleich in ſeiner Projection liegen, und daß jeder der Bogen $PY = PX = 90° - \varepsilon$ ſey. Wenn demnach der Punct e' der Projection gefunden iſt, ſo hat man drey Puncte X, e', Y, durch welche ſich ein Kreis, als die geſuchte Projection verzeichnen läßt.

Nunmehro ſtelle der Kreis $GPHQ$ den Hori-
118 F. zont, oder den erſten Meridian, als die Tafel beſonders vor, PQ ſey die Weltaxe, und dieſe werde von GH in T rechtwinklicht geſchnitten; ſo iſt PQ zugleich die Projection desjenigen Meridians, der den Horizont, welcher hier zugleich der erſte Meridian iſt, unter einem rechten Winkel ſchneidet, GH aber iſt die Projection des Aequators. Man theile den Halbkreis QHP in ſeine Grade von Q nach P zu; ſo

ſo läſt ſich die Projection eines jeden Meridians, der den erſten unter dem Winkel γ ſchneidet, ſo zeichnen. Man nehme $Qq = 2\gamma$, ziehe Pq, welche TH in f ſchneidet; ſo iſt f der Mittelpunct, und fP der Halbmeſſer der Projection: denn man hat $Tf = \varrho \tan . \gamma$ und $fP = \varrho \sec \gamma$, wie erfordert wird.

Wenn nun die Projection PeQ und TG einander in e ſchneiden, ſo iſt $Te = -\varrho \tan \frac{90° - \gamma}{2}$.

Um dieſen Punct e zu finden, könnte man den Quadranten GP in ſeine Grade theilen $Gg = \gamma$ nehmen, und Qg ziehen, welche TG in e ſchneidet: alsdenn wäre $TQg = \frac{90° - \gamma}{2}$, $Fe = \varrho \tan \frac{90° - \gamma}{2}$, mithin e ein Punct in der Projection. Weil nun auch P und Q in der Projection liegen, ſo hätte man drey Puncte P, e, Q, wodurch ſich ein Kreis, als die Projection, durchführen lieſſe. (M. ſ. Wolfii Elem. Math. Vniverſæ Tom. IV. pag. 73. Geograph. §. 275.) Allein dies Verfahren iſt nicht ſo bequem, wie das eben gewieſene, nach welchem ſich der Mittelpunct f und Halbmeſſer FP ſogleich von ſelbſt ergeben.

Um nun auch jeden Parallelkreis abzubilden, deſſen Abſtand vom Aequator $= \varepsilon$ iſt, nehme man auf dem Quadranten HP von H aus einen Bogen $Hp = \varepsilon$, alſo $Pp = 90° - \varepsilon$, und ziehe Gp, welche TP in e' ſchneidet, ſo liegt e' in der Projection des Parallelkreiſes, weil $TGp = \frac{1}{2}\varepsilon$, mithin $Te' = \varrho \tan \frac{1}{2}\varepsilon$ wird. Der Mittelpunct liegt in der verlängerten Te', und der Halbmeſſer iſt $= \varrho \cot \varepsilon$.

Demnach nehme man den Bogen $PHq = 2\varepsilon$, mithin $Qq = 180^\circ - 2\varepsilon$; ſo wird $Tf = \varrho . \tang \frac{180^\circ - 2\varepsilon}{2} = \varrho \cot \varepsilon$, und man hat den Halbmeſſer der Projection. Dieſen kann man aus e' in f' tragen, und aus f' mit dieſem Halbmeſſer die Projection zeichnen. Man kann auch Tp ziehen, und pf' darauf ſenkrecht ſetzen, ſo hat man beydes den Mittelpunct f' und Halbmeſſer $f'p$ der Projection: denn es iſt nun $Tf' = \varrho \operatorname{coſec} \varepsilon$ und $f'p = \varrho \cot \varepsilon$.

Weil die Projection durch p und π gehen muß, wenn $Pp = P\pi = 90^\circ - \varepsilon$ genommen wird, ſo hat man, wenn e' gefunden iſt, wiederum drey Puncte der Projection, durch welche man ſie durchführen muß, und der Halbmeſſer kann nach einer bekannten Geometriſchen Aufgabe geſucht werden. (M. ſ. Wolff. Elem. Math. Univerſal. l. c.) Aber das kurz vorhin gelehrte Verfahren iſt wiederum bequemer. In dem Dreyeck PTf hat man immer zugleich den Halbmeſſer eines Meridians und eines Parallelkreiſes, wenn des erſtern Länge dem Complement der Breite des letztern, oder ſeinem Abſtand vom Pol gleich iſt.

341. §.

117 Die Tafel ſtellt die ſtereographiſch-aequa-
118 F. toriſche Projection der Kugel vor: man ſoll auf der Tafel das Bild K eines Puncts L finden, deſſen Geographiſche Länge γ und Breite ε gegeben iſt.

Aufl. Auf der Oberfläche der Erdkugel, wo-ſelbſt der Punct L angenommen wird, ſtelle man ſich durch eben dieſen Punct L einen Meridian und zugleich einen Parallelkreis vor. Jener wird den erſten Meridian unter dem Winkel γ ſchneiden, und dieſer vom Aequator um den Abſtand ε vom Pol aber um den Abſtand $90° - \varepsilon$ entfernt ſeyn. Man zeichne demnach das Bild eines Meridians, deſſen Länge $= \gamma$, und eines Parallelkreiſes, deſſen Breite $= \varepsilon$, ſo wird beyder Durchſchnittspunct K das geſuchte Bild ſeyn, wofern die Länge $\gamma < 180°$ iſt. Wäre aber $\gamma > 180°$, ſo muß man die Bilder der beyden Projectionen auch über den Umfang der Tafel GPHQ hinaus erweitern, da ſich denn ein zweyter Durchſchnittspunct l giebt, und derſelbe iſt in dieſem Fall das geſuchte Bild.

Wenn γ wenig von 90° verſchieden iſt, ſo fallen die Halbmeſſer der Meridiane ſehr groß aus, und alsdenn wird es etwas unbequem, ja wohl gar unthunlich das Bild PKQ des Meridians vermittelſt des gewöhnlichen Cirkel-Inſtruments zu zeichnen. Ein gleiches gilt von den Bildern der Parallelkreiſe, wenn die Breite ε ſehr klein iſt. In Fällen dieſer Art werden folgende Schlüſſe dienen das geſuchte Bild K auf einem bequemen Wege zu finden.

Man ziehe TK, ſo hat man das Bild des Bo- 117
gens ZL des dem Punct L zugehörigen Scheitelkrei- 118 F.
ſes, und PTK iſt das Bild des zugehörigen Azimuthalwinkels. Zugleich iſt TK der Halbmeſſer der Projection eines durch L geführten Parallelkreiſes mit dem Horizont. Nun ſey das Azimuth PZL $= \alpha$, die Höhe des Puncts L über dem Horizont $= \beta$,

mithin $ZL = 90° - \beta$, ſo iſt hier β das, was im 335. §. ε war, und man erhält $TK = \frac{\varrho \cos\beta}{1 + \sin\beta}$.

Weiter hat man im ſphäriſchen Dreyeck PZL den Stundenwinkel $LPZ = 90° - \gamma$, die Seite $PL =$
117 F. $90° - \varepsilon$, und die andre anliegende Seite $PZ = 90°$.
Demnach iſt vermöge des 550. §. Geom. $\cos ZL = \cos PL \cos PZ + \cos P \sin PL \sin PZ$, und vermöge des 551. §. Geom. $\tang PZL = \frac{\sin PL \sin P}{\cos PL \sin PZ - \cos P \cos PZ \sin PL}$. Wenn man alſo obige Werthe ſubſtituirt, ſo giebt das $\sin\beta = \sin\gamma \cos\varepsilon$, und $\tang\alpha = \frac{\cos\varepsilon \cos\gamma}{\sin\varepsilon}$. Daraus findet man $TK = \frac{\varrho \sqrt{(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}}{1 + \sin\gamma \cos\varepsilon}$, und $\tang GTK = \cot PTK = \cot PZL = \cot\alpha = \tang\varepsilon \sec\gamma$. Daraus giebt ſich $\sec GTK = \sqrt{(1 + \tang\varepsilon^2 \sec\gamma^2)}$, und

$$\cos GTK = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang\varepsilon^2 \sec\gamma^2)}}$$

$$= \frac{\cos\varepsilon \cos\gamma}{\sqrt{(\cos\varepsilon^2 \cos\gamma^2 + \sin\varepsilon^2)}},$$

$$\sin GTK = \frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{(\cos\varepsilon^2 \cos\gamma^2 + \sin\varepsilon^2)}}.$$

Weil nun $\cos\varepsilon^2 \cos\gamma^2 + \sin\varepsilon^2 = \cos\varepsilon^2 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2 + \sin\varepsilon^2 = 1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2$, ſo hat man auch

$$\sin GTK = \frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}},$$

cos

$\cos GTK = \frac{\cos\varepsilon \cos\gamma}{\sqrt{(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}}$. Man laſſe KW auf TG ſenkrecht fallen, ſo hat man $TW = TK \cos GTK$ und $WK = TK \sin GTK$, mithin $TW = \frac{\varrho \cos\varepsilon \cos\gamma}{1 + \sin\gamma \cos\varepsilon}$, und

$$WK = \frac{\varrho \sin\varepsilon}{1 + \sin\gamma \cos\varepsilon}.$$

Hieraus flieſſen nun zweyerley Hülfsmittel, das Bild K des Puncts L zu finden, wenn γ und ε gegeben ſind. Man mache nemlich den Winkel GTK ſo groß, daß ſeine Tangente $= \tang\varepsilon \sec\gamma$ wird, und nehme alsdenn $TK = \frac{\varrho \sqrt{(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}}{1 + \sin\gamma \cos\varepsilon}$; oder man nehme $TW = \frac{\varrho \cos\varepsilon \cos\gamma}{1 + \sin\gamma \cos\varepsilon}$, und die auf TW ſenkrechte Linie $WK = \frac{\varrho \sin\varepsilon}{1 + \sin\gamma \cos\varepsilon}$: in beyden Fällen hat man K gefunden.

342. §.

Gewöhnlich kann man die letzten beyden Formuln am bequemſten gebrauchen: ſie dienen ſelbſt für die Projectionen der Meridiane und Parallelkreiſe, deren Halbmeſſer ſo groß ausfallen, daß man ſie auf die gewöhnliche Art nicht bequem zeichnen kann, ſo viel Puncte zu finden, als man nöthig haben mögte, dieſe Projectionen aus freyer Hand durch dieſe Puncte durchzuführen. Es war nemlich

TW =

$$TW = -\frac{\varrho \cos\varepsilon \cos\gamma}{1 + \cos\varepsilon \sin\gamma},$$ und

$$WK = \frac{\varrho \sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon \sin\gamma}.$$ Weiter war

$\cos\varepsilon \sin\gamma = \sin\beta = \cos ZL$, alſo $1 + \cos\varepsilon \sin\gamma = 1 +$

$\cos ZL = \frac{\sin ZL}{\tang \frac{1}{2} ZL}$; (459. §. Geom.) ſetzt man nun ZL, als den Abſtand des abzubildenden Puncts vom Zenith, $= \delta$; ſo erhält man

$$TW = \frac{\varrho \cos\varepsilon \cos\gamma \, tg. \frac{1}{2}\delta}{\sin\delta},$$ und

$$WK = \frac{\varrho \sin\varepsilon \tang \frac{1}{2}\delta}{\sin\delta}.$$ Dieſe Formuln ſind

völlig bequem, die ganze Rechnung vermittelſt der Logarithmen anzuſtellen, weil auch $\cos\delta = \cos\varepsilon \sin\gamma$ leicht vermittelſt der Logarithmen gefunden wird. Weil ſich bey einerley Mittagskreiſe γ nicht ändert, ſo laſſen ſich ſo viele Puncte für eine angenommene Länge γ des Mittagskreiſes finden: als man nöthig hält, um die Projection deſſelben durch dieſe Puncte durchzuführen: man darf nur nach der Ordnung die Vorausſetzungen $\varepsilon = 10°$, $\varepsilon = 20°$, u. ſ. f. oder auch $\varepsilon = 5°$, $\varepsilon = 10°$, $\varepsilon = 15°$, u. ſ. f. annehmen, um die jedesmahligen Werthe von TW und WK zu finden.

Es ſey z. E. $\gamma = 85°$, $\varepsilon = 54°$, $\varrho = 10000000$, ſo giebt die Rechnung

$l \cos\varepsilon$

$l\cos\varepsilon = 9,7692187 - 10$ $l\sin\delta = 9,9088270$

$l\sin\gamma = 9,9983442 - 10$ $l\tan\frac{1}{2}\delta = 9,7086479$

$l\cos\delta = 19,7675629 - 20$ $l\frac{\sin\delta}{\tan\frac{1}{2}\delta} = 0,2001791$

alſo $\delta = 54°\, 9'\, 30''$

$\frac{1}{2}\delta = 27°\, 4'\, 45''$

$l\varrho = 7,0000000$ $l\varrho = 7,0000000$

$l\cos\varepsilon = 9,7692187 - 10$ $l\sin\varepsilon = 9,9079576 - 10$

$l\cos\gamma = 8,9402960 - 10$ $16,9079576 - 10$

$15,7095147 - 20$ $l\frac{\sin\delta}{\tan\frac{1}{2}\delta} = 0,2001791$

$l\frac{\sin\delta}{\tan\frac{1}{2}\delta} = 0,2001791$ $lWK = 6,7077785$

$lTW = 5,5093356$ alſo $WK = 5102447.$

alſo $TW = 323099$

Man kann durch eben dieſes Hülfsmittel auch ſo viele Puncte in der Projection eines und eben deſſelben Parallelkreiſes ſuchen, als man nöthig findet. Für einerley Parallelkreis ändert ſich ε nicht, alſo kann man für γ nach der Ordnung die Werthe 10°, 20°, u. ſ. f. oder 5°, 10°, 15°, u. ſ. f. annehmen, und allemahl die zugehörigen Werthe von TW und WK ſuchen.

343. §.

Die Tafel ſtellet noch die ſtereographiſch-äquatoriſche Projection der Kugel vor: auf derſelben iſt ein Punct K gegeben, man ſoll die geographiſche Länge und Breite des dadurch abgebildeten Puncts der Erdkugel finden. 118F.

Aufl.

Aufl. Man verzeichne durch die drey Puncte, P, K, Q, einen Kreis, und wenn derſelbe TG in D ſchneidet, ſo ziehe man QD bis an den Halbkreis GPH in L, zähle hierauf die Grade des Bogens GL ſo hat man die Länge des Puncts, den K abbildet. Ferner ziehe man KF auf TP ſenkrecht, trage TK in TM, und ſchlage mit dem Halbmeſſer PM aus T einen Bogen, der die verlängerte KF in N ſchneidet. Hiernächſt ziehe man TN, und halbire TN in O mit einer ſenkrechten Linie OC, ſo iſt ihr Durchſchnittspunct C mit TP der Mittelpunct des Parallelkreiſes durch K. Dieſen kann man alſo mit dem Halbmeſſer CK zeichnen, und wenn derſelbe durch R und S gehet, ſo hat man von G bis R, oder von H bis S die geſuchten Grade der Breite des Puncts, welchen K abbildet.

Beweis. Daß der Bogen GL die Grade der Länge richtig angezeigt, ergiebt ſich ſchon von ſelbſt aus dem 340. §. Es iſt nemlich TD $= \varrho \tan \frac{90^\circ - GL}{2}$, alſo geht durch D, P, und Q ein Meridian, deſſen Länge = GL iſt, und weil derſelbe zugleich durch K geht, ſo iſt GL die Länge des Puncts K. Weiter ſey TK $= a$, PTK $= \zeta$, ſo iſt TF $= a \cos \zeta$, TN = PM $= \sqrt{(a^2 + \varrho^2)}$, und TO $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \varrho^2)}$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke NTF, CTO aber hat man TF : TN = TO : TC, oder $a \cos \zeta : \sqrt{(a^2 + \varrho^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \varrho^2)}$: TC, mithin TC $= \frac{a^2 + \varrho^2}{2a\cos\zeta}$. Im Dreyeck CTK aber iſt KC² = KT² − 2KT . TC $\cos \zeta$

+

$+ TC^2$, (453. §. Geom.) und $2KT \cdot TC \cos \zeta = a^2 + \varrho^2$, alſo $KC^2 = CR^2 = -\varrho^2 + TC^2$, und $TC^2 = TR^2 + CR^2$. Demnach iſt $TRC = 90°$, $RC = \varrho \cot . GTR$, $TC = \varrho \operatorname{coſec}. GTR$, und C iſt der Mittelpunct, CR aber der Halbmeſſer eines Parallelkreiſes, deſſen Breite GR; (340. §.) und weil dieſer Parallelkreis durch K gehet, ſo iſt GR die Breite des Puncts K.

Will man lieber rechnen als zeichnen, ſo ſetze man die Länge ſey $= \gamma$ die Breite $= \varepsilon$, ſo weis man aus dem 340. §. daß $TC = \varrho \operatorname{coſec} \varepsilon$ ſeyn müſſe, und eben die Linie iſt hier $= \frac{a^2 + \varrho^2}{2a \cos \zeta}$, mithin

hat man $\operatorname{coſec} \varepsilon = \frac{a^2 + \varrho^2}{2a\varrho \cos \zeta}$, oder

$\sin \varepsilon = \frac{2a\varrho \cos \zeta}{a^2 + \varrho^2}$. Wird ferner die Sehne KQ

mit VB ſenkrecht halbirt, ſo iſt B des Meridians Mittelpunct: ſetzt man alsdenn den Winkel $PQK = TBV = \xi$, $KQ = b$, ſo wird $\frac{1}{2} b \sec \xi + TB \tan \xi = TQ = \varrho$, mithin $TB = (\varrho - \frac{1}{2} b \sec \xi) \cot \xi$. Aber auch $TB = \varrho \tan \gamma$, (340. §.) mithin $\tan \gamma = \frac{\varrho \cot \xi - \frac{1}{2} b \operatorname{coſec} \xi}{\varrho} = \cot \xi - \frac{b}{2\varrho} \operatorname{coſec}. \xi$.

344. §.

Die Regeln zur Zeichnung der orthographiſch-äquatoriſchen Projection der Kugel zu finden.

Aufl.

Aufl. Die orthographiſchen Projectionen der Meridiane ſind Ellipſen, deren Mittelpuncte und Hauptaxen aus dem 331. §. ſo gefunden werden. Für jeden Meridian iſt $\varepsilon = 0$, und was im 330. und 331. §. ψ war, iſt hier γ, mithin das dortige λ hier $= 90° - \gamma$. Der Mittelpunct f liegt in TH
117F. und er iſt $Tf = \varrho \sin\varepsilon \cos\lambda = 0$, das heiſt T iſt ſelbſt der Mittelpunct. Weiter wird $p = \varrho \sin\lambda = \varrho \cos\gamma$, und $q = \varrho$, da dann p die halbe Axe iſt, die in TH und TG liegt, q aber diejenige, welche in TP und TQ liegt. Mithin iſt PQ ſelbſt die Zwergaxe der Projection eines jeden Meridians, und wenn man
119F. den Bogen $GZ = \gamma$ nimmt, ZY aber auf TG ſenkrecht ſetzt, ſo iſt TY die zugeordnete Axe der Projection. Für $\gamma = 90°$ geht die Ellipſe in die grade Linie PQ zuſammen.

Für die Parallelkreiſe iſt $\lambda = 0$, alſo wird für ſie im 331. §. $Tf = \varrho \sin\varepsilon$, überdem $p = 0$ und $q = \varrho \cos\varepsilon$. Das heiſt die Projectionen der Parallelkreiſe ſind grade Linien, wie auch der Natur der Sache gemäß iſt: dieſe graden Linien ſind mit den Durchmeſſern der Parallelkreiſe ſelbſt einerley, und wenn man $Gg = Hh = \varepsilon$ nimmt, ſo iſt die Sehne gh die Projection des Parallelkreiſes, deſſen Breite $= \varepsilon$.

Es ſey nun k die orthographiſche Projection des Puncts L, deſſen Höhe über dem Horizont, der hier allemahl zugleich die Tafel iſt, $= \beta$, ſo iſt hier β, was im 338. §. ε war, und man hat $\sin\beta = \cos\varepsilon \sin\gamma$ (342. §.) Es iſt aber allemahl $Tk = TK(1 + \sin\beta)$, (338. §.) und hier hat man $TK = \dfrac{\varrho\sqrt{(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}}{1 + \cos\varepsilon \sin\gamma}$

(341.

(341. §.) mithin erhält man $Tk = \varrho\surd(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2) = \varrho\cos\beta$. Ferner bleibt $\sin GTk = \frac{\sin\varepsilon}{\surd(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}$, und $\cos GTk = \frac{\cos\varepsilon \cos\gamma}{\surd(1 - \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2)}$. (341. §.) Wird alſo kw auf TG ſenkrecht geſetzt, ſo hat man $Tw = Tk \cos GTk = \varrho \cos\varepsilon \cos\gamma$, und $wk = Tk \sin GTk = \varrho \sin\varepsilon$. Für einerley Meridian ändert ſich γ nicht, alſo können die beyden letzten Formuln wiederum dienen, ſo viele Puncte der orthographiſchen Projection eines Meridians zu finden, als nöthig ſind, um ſie durch dieſe Puncte durchzuführen, wenn man ſtatt ε die Werthe 10°, 20°, u. ſ. f. oder auch 5°, 10°, 15°, u. ſ. f. ſetzt, und die zugehörigen Werthe von Tw und wk ſucht.

Hiemit iſt zugleich die Aufgabe aufgelößt, wenn die Tafel die orthographiſche äquatoriſche Projection der Kugel vorſtellt, wie das orthographiſche Bild eines Puncts gefunden werden könne, deſſen Länge γ und Breite ε gegeben iſt. Man zeichnet nemlich einen Meridian, deſſen Länge γ, und einen Parallelkreis, deſſen Breite ε iſt, ſo liegt das geſuchte Bild in beyder Durchſchnitte.

Wenn ein Punct k auf der Tafel gegeben iſt, und man ſoll die Länge und Breite des dadurch ab- 119F. gebildeten Puncts finden, ſo ziehe man gh durch k mit GH parallel, und die Grade des Bogens Gg oder Hh geben die Breite des Puncts k. Ueber der Zwergare PQ verzeichne man ferner eine Ellipſe, die durch k gehet: wenn dieſe TG in Y ſchneidet, ſo ziehe

man YZ auf TG ſenkrecht, und zähle die Grade des Bogens GZ, als die geſuchte Länge. Um die Ellipſe durch k zu zeichnen muß man ihre zugeordnete Axe ſuchen. In ſolcher Abſicht ſey kp auf PQ ſenkrecht, $Tp=f$, $pk=g$. Weil nun die zugeordnete Axe $=\varrho \cos\gamma$ iſt, ſo hat man $gg=\cos\gamma^2 (\varrho^2-f^2)$; (261. §.) mithin $\cos\gamma^2=\frac{gg}{\varrho^2-f^2}$, und die geſuchte zugeordnete Axe $TY=\frac{g\cdot\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-f^2)}}$. Das giebt folgende Verzeichnung.

Ueber $TH=\varrho$ verzeichne man einen Halbkreis, trage in denſelben $HM=Tp=f$, ziehe TM, mache $TN=pk=g$, und ſetze NY auf TN ſenkrecht, ſo iſt TY die geſuchte halbe conjugirte Axe. Denn es iſt $TM=\sqrt{(\varrho^2-f^2)}$ und man hat $TM:TH=TN:TY$, mithin $TY=\frac{g\cdot\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-f^2)}}$.

Der

Der XXIII. Abſchnitt.

Von der ſtereographiſchen und orthographiſchen Horizontal-Projection.

345. §.

Es ſey wiederum BG*b*H der Horizont eines Orts Z auf der Erdkugel, und das Auge O bleibe, wie bisher im Nadir, der Horizont aber ſey zugleich die Perſpectiviſche Tafel. Wenn nun Z nicht mit einem Weltpol einerley iſt, wie im 334. §. auch nicht im Aequator liegt, wie im 339. §. angenommen wird, ſo wird der eine Weltpol *p* zwiſchen dem Zenith und Herizont, alſo über dem Horizont des Orts Z, der andre *q*, aber zwiſchen dem Nadir und Horizont, unter dem leztern liegen. Man lege durch beyde Axen OZ und *pq* des Horizonts BG*b*H und des Aequators ÆQ eine Ebene, dieſe wird einen gröſten Kreis *p*Z*q*O geben, der zugleich der Meridian des Orts Z iſt. Seine Durchſchnittslinie mit dem Horizont ſey B*b*, ſo iſt *p*B die Höhe des einen Pols über dem Horizont, die Polhöhe des Orts Z, und Z*p* der Abſtand des Pols vom Zenith: beyde ergänzen einander zu 90°. Ferner ſey ÆGQH der Aequator, und GH ſeine Durchſchnittslinie mit dem Horizont ÆQ ſeine Durchſchnittslinie mit dem Meridian des Orts Z: ſo iſt ZQ der Abſtand des Orts Z x20F.

vom Aequator, der wie ſogleich aus der Figur erhellet, der Polhöhe Bp gleich iſt. Weil nun Horizont und Aequator beyde auf dem Meridian des Orts Z ſenkrecht ſind, ſo iſt auch ihre Durchſchnittslinie GH darauf ſenkrecht, und der Verticalkreis GZHO durch GH ſchneidet den Meridian ſenkrecht. In der Aſtronomie heiſt Bb die Mittagslinie und B, G, b, H ſind alsdenn die vier Hauptgegenden des Horizonts, Norden, Oſten, Süden, Weſten, wenn p der Nordpol iſt. Auf der künſtlichen Erdkugel hat man dies alles im Modell vor Augen, wenn man den Globum ſo ſtellt, daß der eine Weltpol über dem Horizont erhaben iſt, uad hiernächſt einen willkührlich gewählten Ort, der hier Z heiſt, unter den meßingenen allgemeinen Meridian führt, der hier durch den gröſten Kreis pZqO vorgeſtellet wird. Bildet man nun die Meridiane und Parallelkreiſe des Aequators ſo ab, wie ſie bey dieſer Stellung der Kugel dem Auge im Nadir erſcheinen müſſen; den Horizont für die Tafel angenommen, ſo heiſt die Abbildung eine ſtereographiſche Horizontal-Projection der Kugel. Bleibt das Auge zwar in der Scheitellinie ZO aber unendlich weit von der Tafel entfernt, ſo verändert ſich die Abbildung in die orthographiſche Horizontal-Projection.

346 §.

Die Regeln zur Zeichnung der ſtereographiſchen Horizontal-Projection der Kugel zu finden.

Aufl. Zuerſt ſey pLAq ein Meridian, oder Stundenkreis, der den Meridian des Orts Z unter

dem ſphäriſchen Winkel $ZpL = \varphi$ ſchneidet, den Horizont, oder die Tafel aber in der graden Linie Nn. Durch T ſey ef auf Nn ſenkrecht gezogen, ſo liegt der Mittelpunct f der Projection des Meridians pLq in ef. Für eben dieſen Meridian hat man nun $\varepsilon = 0$, weil derſelbe ein gröſter Kreis iſt. Was ferner im 328. und 329. §. λ hieß, iſt hier der Abſtand des Auges von dem abzubildenden Stundenkreiſe, und vermöge des 328. §. iſt allemahl $\psi + \lambda = 90°$; hier aber iſt ψ der Winkel BNp unter welchem der Stundenkreis den Horizont ſchneidet, und dieſer Winkel ψ kann aus Betrachtung des ſphäriſchen Dreyecks BpN gefunden werden. In demſelben iſt der Winkel $pBN = 90°$, die Seite $Bp = ZQ =$ der Polhöhe des Orts Z, die ich $= \pi$ ſetze, der Winkel $BpN = ZpL =$ dem Stundenwinkel φ. Demnach hat man $\cos\psi = \cos\pi \sin\varphi$, (538. §. Geom. n. IV.), mithin $\sin\lambda = \cos\pi \sin\varphi$. Das giebt den Halbmeſſer der Projection (329. §.) $\frac{\varrho \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}$

$$= \frac{\varrho}{\cos\pi \sin\varphi} = \varrho \sec\pi \operatorname{cosec}\varphi.$$ Für den Abſtand Tf des Mittelpuncts f der Projection aber hat man

$$Tf = \frac{\varrho \cos\lambda}{\sin\lambda} = \varrho \cot\lambda = \varrho \tan\psi,$$ und um die eigentliche Stelle dieſes Mittelpuncts zu finden, muß man noch den Winkel BTe ſuchen, derſelbe iſt nun $= 90° - BTN$, und des Winkels BTN Maaß iſt der Bogen BN im ſphäriſchen Dreyeck BpN. In demſelben hat man auch $\tan BTN = \sin Bp . \tan BpN$ (538. §. Geom. n. II.), alſo $\cot BTe = \sin\pi \tan\varphi$.

 Aus

Aus f ziehe man fg auf Bb ſenkrecht, ſo hat man $\frac{Tg}{fg} = \cot BTe = \sin\pi \tang\varphi$, und $Tg^2 + fg^2$

$$= Tf^2 = \varrho^2 \cot\lambda^2 = \frac{\varrho^2 (1 - \cos\pi^2 \sin\varphi^2)}{\cos\pi^2 \sin\varphi^2}.$$

Wenn hier der Werth $Tg = fg . \sin\pi \tang\varphi$ ſubſtituirt wird, ſo verwandelt ſich die zweyte Gleichung in folgende: $(\sin\pi^2 \tang\varphi^2 + 1) . fg^2 = \varrho^2 (\sec\pi^2 \cosec\varphi^2 - 1)$. Weil nun $\tang\varphi \cot\varphi = 1 = \sec\pi \cos\pi$, ſo kann man die Gleichung auch ſo ausdrücken $fg^2 . (\sin\pi^2 + \cot\varphi^2) \tang\varphi^2 = \varrho^2 (\cosec\varphi^2 - \cos\pi^2) \sec\pi^2$. Weiter iſt $\cosec\varphi^2 = \cot\varphi^2 + 1$, alſo $\cosec\varphi^2 - \cos\pi^2 = \cot\varphi^2 + \sin\pi^2$, und man findet $fg = \frac{\varrho \sec\pi}{\tang\varphi}$; mithin $Tg = fg . \sin\pi \tang\varphi$ $= \varrho \sec\pi \sin\pi$, oder $Tg = \varrho \tang\pi$.

Hiebey iſt merkwürdig, daß die Linie $Tg = \varrho \tang\pi$ allein durch π und nicht durch φ beſtimmt wird. Demnach iſt bey unveränderter Stellung des Auges die Linie Tg für alle Stundenkreiſe einerley, der Winkel φ ſey, welcher er wolle: folglich liegen die Mittelpuncte der Projectionen aller Stundenkreiſe in einer graden Linie, die durch g auf Bb ſenkrecht läuft.

Durch einen willkührlichen Punct L des Meridians pLq ſtelle man ſich nun auch einen Parallelkreis des Aequators vor, deſſen Ebene den Horizont in der graden Linie gh ſchneidet, ſo wird gh mit GH parallel ſeyn, und der Mittelpunct f' der Projection liegt in TB. Die Breite dieſes Parallelkreiſes, oder

oder ſein Abſtand vom Aequator ſey $= \varepsilon$; weil nun hieſelbſt π den Abſtand des Auges vom Aequator bezeichnet, ſo iſt hier π was im 329. §. λ war, und ε behält die dortige Bedeutung. Demnach iſt der Halbmeſſer der Projection $= \frac{\varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon + \sin \varphi}$, und

$Tf' = \frac{\varrho \cos \pi}{\sin \varepsilon + \sin \pi}$. Sind übrigens e' und a' die Puncte, worin TB von der Projection geſchnitten wird, ſo hat man $Ta' = \varrho \cot \frac{1}{2}(\varepsilon + \pi)$, und $Te' = \varrho \tan \frac{1}{2}(\varepsilon - \pi)$. Für die Projection des Aequators ſetzt man $\varepsilon = 0$, und die Vergleichung mit dem 329. §. ergiebt, das für den Aequator und alle ihm zugehörige Parallelkreiſe Bb die Linie des Auges ſey, worin demnach die Projectionen P und Π der Pole p und q des Aequators und ſeiner Parallelkreiſe liegen. Weil nun das λ des 329. §. hier $= \pi$ iſt, ſo hat man $TP = \varrho \tan \frac{90° - \pi}{2}$ und

$T\Pi = \varrho \tan \frac{90° + \Pi}{2}$. Weil ferner alle Meridiane einander in p und q ſchneiden, ſo werden auch ihre Projectionen einander in P und Π ſchneiden. Dieſe Schlüſſe führen demnach auf folgende Regeln der Verzeichnung.

Der Kreis GBHb ſtelle den Horizont, als die Tafel vor, und man ziehe ein Paar ſenkrechte Durchmeſſer deſſelben Bb und GH, davon der erſtere den Meridian des Orts abbildet, deſſen Horizont die Tafel iſt, der andre GH aber einen Verticalkreis der 121 F.

den Meridian ſenkrecht ſchneidet. Man nehme den Bogen $Bp=\pi$, (er iſt in der Zeichnung $=22\frac{1}{2}°$ angenommen) und ziehe Gp ſo giebt der Durchſchnittspunct P mit TB die Projection des über dem Horizont um den Bogen π erhabenen Pols, denn es iſt $TP=\varrho \tan \frac{90°-\pi}{2}$. Man mache ferner die Bogen GF und $HD=\pi$, ſo werden Fp, und pD Quadranten, wovon man einen jeden von F und D gegen p zu in ſeine 90 Grade theilen kann. Weiter nehme man $HL=2\pi$, ziehe GL, welche Bb in g ſchneidet, durch g aber ziehe man gh mit GH parallel, ſo liegen die Mittelpuncte der Projectionen aller Stundenkreiſe in gh, denn es iſt $Tg=\varrho \tan \frac{1}{2} HL$ $=\varrho \tan \pi$.

Will man nun die Projection eines Stundenkreiſes zeichnen, der den Meridian linker Hand des Auges unter dem Winkel φ ſchneidet, ſo zeichne man an Pg den Winkel $gPf=90°-\varphi$, ſo giebt ſich $gf=Pg.\cot\varphi$. Es iſt aber $Pg=PT+Tg=\varrho$ $(\tan \frac{90-\pi}{2}+\tan\pi)$, und $\tan(45-\frac{1}{2}\pi)$ $=\sec\pi-\tan\pi$ (458. §. Geom.) mithin iſt $Pg=\varrho\sec\pi$, und $gf=\varrho\sec\pi\cot\varphi$. Demnach iſt f der Mittelpunct der Projection des Stundenkreiſes, und fP ſein Halbmeſſer. Letzteres erhellet ſchon daraus, weil alle Stundenkreiſe durch P gehen müſſen: es iſt aber auch $fP^2=Pg^2+gf^2=\varrho^2(\sec\pi^2$ $+\sec\pi^2\cot\varphi^2)$, alſo $fP=\varrho\sec\pi\,\mathrm{coſec}\varphi$, wie erfordert wird. In der Zeichnung iſt MPN die Projection eines Stundenkreiſes für $\varphi=75°$,

alſo

alſo $gPf=15°$. Man kann auf dieſe Art die ganze Linie gh in dem Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer Pg eintheilen, ſo wie ſie hier von 15 zu 15 Graden eingetheilet iſt, und den Theilungspuncten die zugehörige Zahl der Grade beyfügen, ſo hat man die Mittelpuncte einer Reihe von Stundenkreiſen, deren Stundenwinkel die Winkel gPf zu 90° ergänzen. Für $\phi=90°$ fällt f in g, und der Stundenkreis geht durch G und H. Denn es iſt nun der Halbmeſſer $=\varrho \sec \pi$ weil $\operatorname{cosec}\phi=1$ wird, alſo nun $fP=gP=gG=\surd(GT^2+Tg^2)=\surd(\varrho^2+\varrho^2 \operatorname{tang}\pi^2)=\varrho \sec\pi$. Für $\phi=0$, wird gf unendlich groß, ſo wie fP, weil die Projection mit der graden Linie Bb einerley iſt. Werden die Stundenwinkel rechter Hand des Auges angenommen, ſo iſt ϕ mithin $\cot\phi$ negativ, und man muß die Winkel gPf linker Hand an Pg zeichnen, damit die Puncte f linker Hand von g in der nach c verlängerten gh gefunden werden.

Um ferner die Projection eines Parallelkreiſes zu zeichnen, deſſen Abſtand vom Aequator $=\varepsilon$ iſt, nehme man die Bogen $TR=\varepsilon$ und $DS=\varepsilon$, ziehe GR, GS, welche TB in a' und e' ſchneiden, und halbire $e'a'$ in f', ſo iſt f' der Mittelpunct der Projection, und $f'a'=f'e'$ der Halbmeſſer. Denn es iſt der Bogen $GR=\varepsilon+\pi$, alſo $HR=180°-(\varepsilon+\pi)$ und der Winkel $HGR=90°-\frac{1}{2}(\varepsilon+\pi)$, mithin $Ta'=\varrho.\cot\frac{1}{2}(\varepsilon+\pi)$. Weiter iſt $HS=SD-DH=\varepsilon-\pi$, alſo der Winkel $HGS=\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)$ und $Te'=\varrho \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)$, wie erfordert wird. In der Zeichnung iſt $ma'ne'$ die Projection eines Parallelkreiſes von 40 Graden Breite, und die Projectionen

der Parallelkreiſe von 30, 20, 10 Graden Breite, ſo wie auch des Parallelkreiſes von 0° Breite, d. i. des Aequators ſelbſt, ſind eben ſo gezeichnet, Verwirrung zu vermeiden, kann man den Durchſchnittspuncten der Linien G30, G20, G10, G0, mit Bb, deren man allemahl zwey zuſammen gehörige erhält, die ihnen zukommende Zahl der Grade der Breite beyfügen, da ſich denn die Mittelpuncte α, β, γ, C, nach der Ordnung ergeben, wenn man den Abſtand zweyer zuſammen gehöriger Puncte halbirt. Für diejenigen Parallelkreiſe, die auf der andern Seite des Aequators liegen, wird ε negativ, und man kann mit der Zeichnung eben ſo fortfahren, wenn die Quadranten Fq und Dq ebenfalls gehörig eingetheilt ſind. Es wird alsdenn $Ta' = \varrho \cot \frac{1}{2}(-\varepsilon + \pi)$, ſo wie $Te' = -\varrho \tang \frac{1}{2}(\varepsilon + \pi)$, da dann Ta' noch ſo lange wächſt, bis $-\varepsilon = -\pi$ wird: alsdann iſt Ta' unendlich groß, und $Te' = -\varrho \tang \pi = Tg$. Demnach wird die Projection des Parallelkreiſes, deſſen Breite auf der andern Seite des Aequators der Breite des Orts Z gleich iſt, eine grade Linie, die mit gh zuſammen fällt, wie denn auch der Halbmeſſer $\frac{\varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon + \sin \pi}$ unendlich groß wird. Die Urſache davon iſt, weil das Auge in der Ebene dieſes Parallelkreiſes ſteht, wie die Vergleichung mit der 120. Fig. ergiebt. Wenn $-\varepsilon > -\pi$ wird, ſo werden die Werthe $Ta' = \varrho \cot \frac{1}{2}(-\varepsilon + \pi)$ auch negativ, wie die Werthe von Te', und Ta' nimmt wieder ab: auch wird der Halbmeſſer $\frac{\varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon + \sin \pi}$ negativ, weil nun die Mittelpuncte unterhalb e' fallen.

Wenn

Wenn die Werthe von Ta' ſehr groß ausfallen, und es um deswillen beſchwerlich wird, die Puncte a' und hiernächſt die Mittelpuncte f' auf die gewieſene Art zu finden; ſo kann man auch $e'f'$, als den Halbmeſſer der Projection durch Rechnung ſuchen. Es iſt derſelbe $= \frac{\varrho \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon + \sin\pi}$

$$= \frac{\varrho \cos\varepsilon}{2 \sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \pi) \cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \pi)} : (451. §. \text{Geom.})$$

er wird alſo wenn ε negativ iſt

$$= \frac{\varrho \cos\varepsilon}{2 \sin\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon) \cos\frac{1}{2}(\pi + \varepsilon)},$$ und man kann die Rechnung vermittelſt der Logarithmen führen. Für $\varepsilon = -\pi$ wird dieſer Halbmeſſer unendlich groß, ſo wie auch Ta', aber T$e' = -\varrho \tan\pi = $ Tg, wie vermöge der ſchon angezeigten Urſache erfordert wird.

Den Halbmeſſer EC der Projection des Aequators GEH aber hat man, wenn $\varepsilon = 0$ geſetzt wird, und man findet EC $= \varrho \operatorname{cosec}\pi$. Demnach nehme man FA $= \pi$, ſo iſt der Bogen GA $= 2\pi$, und der Winkel TGA $= \frac{1}{2}(180° - 2\pi) = 90° - \pi$. Ferner ziehe man GA bis in C, ſo iſt C der Mittelpunct der Projection des Aequators, und CG der Halbmeſſer. Denn es iſt GC $= \varrho \operatorname{cosec}\pi$, und TC $=$ $\varrho \cot\pi$, wie erfordert wird: denn auch der allgemeine Ausdruck für den Abſtand des Mittelpuncts

$$\text{T}f' = \frac{\varrho \cos\pi}{\sin\varepsilon + \sin\pi}$$ verwandelt ſich in $\varrho \cot\pi$.

347. §.

Die Tafel ſtellt die ſtereographiſche Horizontal-Projection auf dem Horizont eines
120 Orts vor, deſſen Polhöhe $=\pi$ iſt; man ſoll
121 F. das Bild K eines Puncts L finden, wenn die geographiſche Länge und Breite des abzubildenden Puncts L gegeben ſind.

Aufl. Es ſey die Breite des abzubildenden Puncts $=\varepsilon$. Ferner vergleiche man die Geographiſche Länge des Puncts L mit der Länge des Puncts Z, deſſen Horizont die Tafel iſt, und ziehe eine von der andern ab, ſo hat man den Stundenwinkel φ. In der Geographie zählt man die Grade der Länge vom erſten Meridian von Weſten gegen Oſten, mithin in der 120. Fig. von G durch Q nach H. Wenn alſo Z weiter gegen Oſten liegt, als L, ſo liegt der Stundenwinkel φ linker Hand des Meridians durch Z, widrigenfalls aber rechter Hand deſſelben. Man zeichne demnach das Bild eines Stundenkreiſes für den Stundenwinkel φ, und das Bild eines Parallelkreiſes für die Breite ε: beyde werden einander zwar in zweenen Puncten K und l ſchneiden, allein dieſe Puncte ſind um 180° von einander entfernt, und man kann denjenigen leicht unterſcheiden, der eigentlich das geſuchte Bild iſt, wie hier K, weil $\varphi < 90°$ angenommen wird.

Hier tritt nun wiederum der Umſtand ein, daß für kleine Stundenwinkel die Projectionen der Meridiane, und für Parallel-Kreiſe, die dem Parallelkreis des Auges ſehr nahe liegen, die Halbmeſſer ſehr groß ausfallen. In Fällen dieſer Art kann man

man ein ähnliches Hülfsmittel wie im 341. §. brauchen, um das Bild K bequemer zu finden. Auch hier iſt die grade Linie TK das Bild des Bogens Zl, als der Diſtanz des Puncts L vom Zenith, und zugleich iſt TK der Halbmeſſer der Projection eines durch L geführten Parallelkreiſes mit dem Horizont, ſo wie PTK das Bild des Azimuthalwinkels pZL. Dieſer Winkel ſey $= \alpha$, die Höhe des Puncts L über dem Horizont $= \beta$, ſo iſt β das was im 335. §. ε war, mithin $ZL = 90° - \beta$, und man hat

$$TK = \frac{\rho \cos\beta}{1 + \sin\beta}.$$ Weiter hat man im ſphäriſchen Dreyeck pZL den Stundenwinkel $ZpL = \varphi$, die Seite $pL = 90° - \varepsilon$, und die andre anliegende Seite $pZ = 90° - \pi$. Weil nun $\cos ZL = \cos pL \cos pZ + \cos p \sin pL \sin pZ$, (550. §. Geom.) und

$$\tang pZL = \frac{\sin pL \sin p}{\cos pL \sin pZ - \cos p . \cos pZ \sin pL},$$

(551. §. Geom.) ſo erhält man $\sin\beta = \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi$, und

$$\tang\alpha = \frac{\cos\varepsilon \sin\varphi}{\sin\varepsilon \cos\pi - \cos\varphi \sin\pi \cos\varepsilon}.$$ Man ziehe KW auf TB ſenkrecht, ſo findet man ferner

$$\frac{WK}{TW} = \cot\alpha = \tang\varepsilon \cos\pi \cosec\varphi - \cot\varphi \sin\pi,$$

und $WK^2 + TW^2 = TK^2 =$

$$\frac{\rho^2 (1 - (\sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi)^2)}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi}.$$ Den Werth $WK = TW . \cot\alpha$ aus der erſten Gleichung ſetze

ſetze man in die zweyte, und ſchreibe in dem Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen $\sin\varphi^2 \operatorname{cosec}\varphi^2$ ſtatt 1, nach dem Gleichheitszeichen $\cos\varepsilon \sec\varepsilon$ ſtatt 1; ſo findet man

$$TW^2 . \operatorname{cosec}\varphi^2 (\sin\varphi^2 + (\operatorname{tang}\varepsilon \cos\pi - \cos\varphi \sin\pi)^2)$$
$$= \frac{\varrho^2 \cos\varepsilon^2 (\sec\varepsilon^2 - (\operatorname{tang}\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\pi)^2)}{(1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi)^2}.$$

Es iſt aber $\sin\varphi^2 + \operatorname{tang}\varepsilon^2 \cos\pi^2 + \cos\varphi^2 \sin\pi^2 = \sin\varphi^2 + \operatorname{tang}\varepsilon^2 - \operatorname{tang}\varepsilon^2 \sin\pi^2 + \cos\varphi^2 - \cos\varphi^2 \cos\pi^2 = \sec\varepsilon^2 - \operatorname{tang}\varepsilon^2 \sin\pi^2 - \cos\varphi^2 \cos\pi^2$; daher werden die beyden Factoren, worin $TW^2 . \operatorname{cosec}\varphi^2$ und $\varrho^2 \cos\varepsilon^2$ multiplicirt ſind, gleich groß, und man

erhält $TW = \dfrac{\varrho \cos\varepsilon \sin\varphi}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi}$,

mithin $WK = \dfrac{\varrho (\sin\varepsilon \cos\pi - \cos\varphi \cos\varepsilon \sin\pi)}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi}$.

Damit man aus dieſen Formuln bequemer rechnen könne, erwäge man folgendes. Der Nenner jeder dieſer Formuln iſt $= 1 + \sin\beta = 1 + \cos ZL$. Man ſetze $ZL = \delta$, ſo hat man $1 + \sin\beta = 1 + \cos\delta = \dfrac{\sin\delta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}$, mithin $TW = \dfrac{\varrho \cos\varepsilon \sin\varphi \operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}{\sin\delta}$.

Im ſphäriſchen Dreyeck pZL aber hat man $\dfrac{\sin ZL}{\sin ZpL} = \dfrac{\sin pL}{\sin pZL}$, alſo $\dfrac{\sin\delta}{\sin\varphi} = \dfrac{\cos\varepsilon}{\sin\alpha}$,

und $\sin\alpha = \dfrac{\cos\varepsilon \sin\varphi}{\sin\delta}$, mithin hat man

$TW = \varrho \sin\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta$, und das giebt $WK = TW \cot\alpha = \varrho \cos\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta$. Demnach wird die

die Rechnung am bequemſten in der Ordnung geführt.

Man ſuche zuerſt $\cos\delta = \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi$, das heiſt man ſuche im ſphäriſchen Dreyeck pZL aus dem Winkel p und den anliegenden Seiten pZ, pL, die dritte Seite LZ. Ob nun gleich die angezeigte Formul hiezu bequem genug iſt, indem man jeden Theil beſonders vermittelſt der Logarithmen ſuchen kann, da dann beyde Theile zuſammen addirt den $\cos\delta$ ſelbſt geben, wozu man alsdenn den Winkel aus den trigonometriſchen Tafeln findet; ſo kann man doch auch auf die ſonſt bekannte Art das Dreyeck in zwey rechtwinklichte zerfällen. (550. §. Geom.) Aus L ſey nemlich LR auf pZ ſenkrecht 120 F.
herab gelaſſen, und $pR = \zeta$, ſo hat man

$$r : \cos . p = \text{tang}\, pL : \text{tang}\, pR$$

das iſt $r . \cos\varphi = \text{tang}\,(90° - \varepsilon) : \text{tang}\,\zeta$.
Alsdenn wird $ZR = pZ - pR = 90° - \pi - \zeta$ und man hat weiter $\cos pR : \cos ZR = \cos pL : \cos ZL$

$$\text{d. i. } \cos\zeta : \sin(\pi + \zeta) = \sin\varepsilon : \cos\delta.$$

Iſt auf eine von beyden Arten δ gefunden, ſo ſuche man ferner $\sin\alpha = \dfrac{\cos\varepsilon \sin\varphi}{\sin\delta}$, ſo hat man auch α, und hiernächſt findet man ſehr leicht $TW = \varrho \sin\alpha\, \text{tang}\, \frac{1}{2}\delta$, und $WK = \varrho \cos\alpha\, \text{tang}\, \frac{1}{2}\delta$.

Es ſey z. E. $\varrho = 10000000$, $\varphi = 1°$, $\varepsilon = 40°$, $\pi = 22\frac{1}{2}°$, ſo giebt die Rechnung folgendes

$l\cos\varphi = 9,9999338$	alſo $\zeta = 49° 59' 44\frac{1}{2}''$
$l\text{tg}.(90° - \varepsilon) = 10,0761865$	$\pi = 22\ \ 30$
$l\text{tang}\,\zeta = 20,0761203 - 10$	$\pi + \zeta = 72° 29' 44\frac{1}{2}''$
	$l\sin$

$$l\sin(\pi+\zeta) = 9,9794095$$
$$l\sin\varepsilon = 9,8080675$$
$$19,7874770$$
$$l\cos\zeta = 9,8081052$$
$$l\cos\delta = 9,9793718$$
alſo $\delta = 17^\circ\, 31'\, 12''$
und $\frac{1}{2}\delta = 8^\circ\, 31'\, 12''$

$$l\varrho = 7,0000000$$
$$l tg.\tfrac{1}{2}\delta = 9,1877838$$
$$l\varrho tg\tfrac{1}{2}\delta = 6,1877838-10$$

$$l\cos\varepsilon = 9,8842540$$
$$l\sin\varphi = 8,2418553$$
$$18,1261093$$
$$l\sin\delta = 9,4786223$$
$$l\sin\alpha = 8,6474870$$
alſo $\alpha = 2^\circ\, 32'\, 43''$.

$$l\varrho tg\tfrac{1}{2}\delta = 6,1877838$$
$$l\sin\alpha = 8,6474870$$
$$l TW = 14,8352708-10$$
$$l\cot\alpha = 11,3521036-10$$
$$l WK = 6,1873744$$

Demnach erhält man TW = 68433,83 und WK = 1539481. Ich habe dies nehmliche Exempel zur Erläuterung der Rechnung auch in der ſchon oben (326. §.) angeführten Abhandlung von den Projectionen der Kugel gebraucht. (M. ſ. die Abhandlungen der Churfürſtl. Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften V. Band 152. 153 S.) Daſelbſt iſt aber ein Rechnungsfehler eingeſchlichen, und $\frac{1}{2}$ZL $= 9^\circ\, 46'$ ſtatt $8^\circ\, 46'$ angenommen worden.

Bey Anwendung dieſer Formuln iſt noch zu bemerken, daß der Winkel φ = ZpL linker Hand des Meridians angenommen worden, weswegen derſelbe für alle Puncte L, die rechter Hand des Meridians liegen, negativ zu nehmen iſt, da dann allemahl auch TW negativ wird, und von T nach H zu genommen werden muß, weil nun ſinφ negativ iſt, cosφ aber poſitiv bleibt. Was den Werth WK anbetrift, ſo wird derſelbe allemahl negativ,

wenn

wenn $\cos\varphi > \frac{\sin\varepsilon \cos\pi}{\cos\varepsilon \sin\pi}$, oder $\cos\varphi > \tan g\varepsilon \cot\pi$ iſt. Alsdann iſt zugleich $\tan g\alpha$ negativ, wenn φ poſitiv iſt; wäre aber φ negativ, ſo würde $\tan g\alpha$ poſitiv bleiben, wenn gleich $\cos\varphi > \tan g\varepsilon \cot\pi$ wäre. Dies iſt ſo zu verſtehen: mit φ wird zugleich α negativ, oder wenn der Stundenwinkel rechter Hand des Meridians genommen wird, ſo fällt auch das Azimuth rechter Hand deſſelben. Alle Winkel und Bogen ſind übrigens bey der bisherigen Rechnung kleiner als 90° angenommen worden: wenn alſo $\tan g\alpha$ für den Fall $\cos\varphi > \frac{\sin\varepsilon \cos\pi}{\cos\varepsilon \sin\pi}$ das entgegengeſetzte Zeichen hat, ſo zeigt dies an, daß $\alpha > 90°$ ſey. Dies iſt um deswillen zu bemerken, weil die Formul $\sin\alpha = \frac{\cos\varepsilon \sin\varphi}{\sin\delta}$ es nicht anzeigen kann, ob α kleiner oder gröſſer, als 90° ſey: im letzten Fall aber iſt $\cos\alpha$, mithin $WK = \varrho \cos\alpha \tan g \frac{1}{2}\delta$ negativ.

348. §.

Aus den gefundenen Formuln für TW, und WK, werden die im 341. und 342. bereits vorgekommenen, (woſelbſt der Winkel γ nach der jetzigen Bezeichnung $= 90° - \varphi$ iſt,) wenn $\pi = 0$ angenommen wird, wie der Natur der Sache gemäß iſt. Uebrigens ändert ſich φ für einerley Mittags- oder Stundenkreis nicht, ſo wie ſich ε für einerley Parallelkreis nicht ändert: demnach laſſen ſich wiederum ſo viele Puncte als man will, durch Rechnung finden,

die alle in einerley Meridian, oder in einerley Parallelkreiſe liegen, wenn man etwa nöthig fände, die Projection aus freyer Hand durch dieſe Puncte durchzuführen. Vortheilhaft ſind indeſſen die Formuln allemahl alsdenn zu gebrauchen, wenn man die Projection eines Puncts genau haben will, deſſen Länge und Breite mit keiner von den Längen und Breiten der Stundenkreiſe und Parallelkreiſe völlig übereintrift, die man auf der Tafel etwa von 5 zu 5 Graden, oder wie man ſonſt will, nach Art eines Netzes, verzeichnen kann. Was übrigens die Art und Weiſe betrift, wie ich nach Anweiſung der Formuln vermittelſt der Logarithmen gerechnet habe; ſo kann dies Verfahren die Entfernungen TW und WK nur ſo genau geben, wie es der Einrichtung der gemeinen Logarithmen- und Trigonometriſchen Täfeln gemäß iſt, mithin nicht genauer, als höchſtens bis auf $\frac{1}{10000000}$ Theilchen des Halbmeſſers der Projection. Wäre etwa in einem beſondern Falle mehr Schärfe nöthig, ſo müſte man aus vollſtändigern Tafeln rechnen, oder in Ermangelung derſelben die nöthigen Trigonometriſchen Linien ſelbſt genauer ſuchen, als man ſie in den gemeinen Tafeln hat, da denn die Formuln

$$TW = \frac{\varrho \cos\varepsilon \sin\varphi}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi}$$

$$\text{und } WK = \frac{\varrho(\sin\varepsilon \cos\pi - \cos\varphi \cos\varepsilon \sin\pi)}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi}$$

ſelbſt dienen, welchen man zu dieſer Abſicht eine noch bequemere Form geben kann, wie ich ſogleich weiter zeigen werde.

349. §.

349. §.

Schon in dem beſondern Fall, wenn ein Ort demjenigen ſehr nahe liegt, deſſen Horizont die Tafel vorſtellt, wird die Rechnung ziemlich unſicher, wenn man ſie ſo führt wie im 347. §. gewieſen iſt. Alsdenn iſt nicht allein der Winkel φ ſehr klein, ſondern es iſt zugleich zwiſchen den beyden Bogen ε und π nur ein geringer Unterſcheid. Demnach wird auch $ZR = pZ - pR$ (120. Fig.) ſehr klein, und man findet den Bogen $\cos ZR$ aus den gemeinen Tafeln nicht ſcharf genug, um ZL oder δ ſcharf genug zu erhalten. Eben dieſer Bogen δ fällt ſehr klein aus und man findet ihn ſelbſt vermittelſt der Formul $\cos\delta = \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi$ nicht ſcharf genug, wenn man keine andre als die gemeinen Tafeln zur Hand hat. Hiernächſt tritt dieſelbe Schwierigkeit bey den Formuln $TW = \varrho \sin\alpha \tang \frac{1}{2}\delta$ und $WK = \varrho \cos\alpha \tang \frac{1}{2}\delta$ ein, wo man den Bogen $\tang \frac{1}{2}\delta$ aus den gemeinen Tafeln nicht ſcharf genug haben kann. Dieſerwegen wird es ſich der Mühe verlohnen, für die allgemeinen Formuln eine zum Rechnen noch bequemere Form zu ſuchen, die man ſo finden kann.

Es iſt $1 - \cos\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi^2$, alſo $\cos\varphi = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\varphi^2$; (425. §. Geom.) und wenn dieſer Werth gebraucht wird, ſo hat man

$$TW = \frac{\varrho \cos\varepsilon \sin\varphi}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varepsilon \cos\pi - 2\cos\varepsilon \cos\pi \sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

$$WK = \frac{\varrho(\sin\varepsilon \cos\pi - \cos\varepsilon \sin\pi + 2\cos\varepsilon \sin\pi \sin\frac{1}{2}\varphi^2)}{1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varepsilon \cos\pi - 2\cos\varepsilon \cos\pi \sin\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Ferner iſt $\sin\varepsilon \cos\pi - \cos\varepsilon \sin\pi = \sin(\varepsilon - \pi)$, (423. §. Geom.) $= 2\sin\frac{1}{2}(\varepsilon - \pi)\cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \pi)$, (424. §. Geom.)

Geom.) und $1 + \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varepsilon \cos\pi = 1 + \cos(\varepsilon - \pi)$ (423. §. Geom.) $= 2\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2$ (425. §. Geom.) Werden dieſe Werthe gebraucht, ſo

wird $TW = \dfrac{\frac{1}{2}\varrho\cos\varepsilon\sin\varphi}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2 - \cos\varepsilon\cos\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$,

$$WK = \frac{\varrho(\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi) + \cos\varepsilon\sin\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2 - \cos\varepsilon\cos\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

oder auch $TW = \dfrac{\frac{1}{2}\varrho\cos\varepsilon\sin\varphi\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2}{1 - \cos\varepsilon\cos\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2}$,

und $WK =$

$$\frac{\varrho(\tang\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi) + \cos\varepsilon\sin\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2}{1 - \cos\varepsilon\cos\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2}.$$

In dem beſondern Fall, wenn beyde Oerter Z und L einander ſehr nahe liegen, iſt nun zuerſt $\varepsilon - \pi$ ſehr klein, mithin $\sec(\varepsilon-\pi)$ ſehr wenig gröſſer, als 1. Ueberdem iſt φ ſehr klein, mithin auch $\sin\varphi$ und um ſo mehr $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$. Demnach iſt in dieſem beſondern Fall der gemeinſchaftliche Nenner beyder Brüche beynahe $= 1$, und man hat ſehr nahe $TW = \frac{1}{2}\varrho\cos\varepsilon \sin\varphi$, und $WK = \varrho\tang\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)$, weil auch der zweyte Theil des Zählers in Vergleichung des erſten ſehr klein iſt.

Es ſey z. E. $\pi = 51°31'$, $\varepsilon = 51°29'$, ſo iſt $\varepsilon - \pi = -2'$, $\varphi = 8'$. Weil nun $\sin\frac{1}{2}\varphi = 0{,}0011636$, ſo beträgt $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ wenig über $\dfrac{1}{1000000}$, und es iſt $\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)$ noch nicht um $\dfrac{1}{10000000}$ gröſſer als 1; mithin

fin-

finden die gewieſenen Näherungen ihre Anwendung. Man hat demnach ohne weitere Rechnung WK = $-\varrho . 0,0002909$, und TW giebt folgende leichte Rechnung

$$
\begin{aligned}
l\cos\varepsilon &= 9,7943083-10\\
l\sin\varphi &= 7,3668157-10\\
\hline
l\cos\varepsilon\sin\varphi &= 0,1611240-3\\
l2 &= 0,3010300\\
\hline
l\tfrac{1}{2}\cos\varepsilon\sin\varphi &= 0,8600940-4.
\end{aligned}
$$

Alſo wäre TW $= \varrho . 0,0007246$. daß der Factor $\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2$ weggelaſſen iſt, macht in dem gefundenen Reſultat keine Aenderung. Denn $\sec.\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2$ übertrift hier die Einheit noch nicht um $\frac{2}{10000000}$. Wenn alſo gleich damit noch multiplicirt würde, ſo könnte dies doch die letzte Ziffer der gefundenen Zahl noch nicht ändern. Was aber den Werth WK betrift, ſo iſt zu bemerken, daß derſelbe wegen des poſitiven Theils im Zähler noch um etwas weniges kleiner als $-\varrho\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)$ ſey, und die nöthige Berichtigung giebt folgende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
l\sin\tfrac{1}{2}\varphi &= 7,0657860-10\\
&2\\
\hline
l\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 &= 0,1315720-6\\
l\cos\varepsilon &= 9,7943083-10\\
l\sin\pi &= 9,8936448-10\\
\hline
\text{Summe}\ & 0,8195251-7
\end{aligned}
$$

Die zugehörige Zahl iſt $= 0,00000066$, und es kann auch hier die Multiplication mit $\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2$ nichts mehr ändern, mithin wird

$WK = \varrho(-0,0002909 + 0,00000066)$ oder
$WK = -\varrho . 00029024$.

Eigentlich hat man vermittelſt dieſer Rechnung nur die Zähler der Werthe von TW und WK bis auf $\frac{1}{10000000}$ Theilchen richtig gefunden: der gemeinſchaftliche Nenner iſt um etwas ſehr weniges kleiner als 1, und wenn man prüfen will, wie weit dieſer Umſtand noch Einfluß auf das Reſultat der Rechnung habe, ſo erwäge man folgendes. Der negative Theil des Nenners ſey um abzukürzen $= \omega$ geſetzt, ſo weis man, daß durch $1 - \omega$ dividiren eben ſo viel ſey, als durch $\frac{1}{1-\omega}$ multipliciren. Es iſt aber $\frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$ u. ſ. f. ohne Ende, wie die Diviſion des Zählers durch den Nenner ergiebt, und dieſe Reihe nähert ſich dem Werth $\frac{1}{1-\omega}$ ſehr ſchnell, wenn ω ein ſehr kleiner Bruch iſt. Man ſuche demnach ω durch folgende Rechnung

$$l \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2 = 0,1315720 - 6$$
$$l \cos \varepsilon = 9,7943083 - 10$$
$$l \cos \pi = 9,7939907 - 10$$
$$l \cos \varepsilon \cos \pi \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2 = 0,7198710 - 7$$

Die zugehörige Zahl iſt $= 0,000005246$, mithin $\omega = 0,000005246 . \sec(\varepsilon - \pi)^2$. Weil nun $\sec \frac{1}{2}(\varepsilon - \pi)^2$ in dem angenommenen Exempel, wo $\frac{1}{2}(\varepsilon - \pi)$ nur 1 Minute ausmacht, die Einheit noch

noch nicht um $\frac{2}{10000000}$ übertrift, ſo würde die Multiplication mit $\sec\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2$ noch nicht die letzte Ziffer des gefundenen Factors ändern, und man kann $\omega = 0,000005246$ annehmen. Demnach iſt

$TW = \varrho . 0007246 (1 + 0,000005246 + \&c.)$

$WK = -\varrho . 0,0002902 (1 + 0,000005246 + \&c.)$

Nun kann man ſogleich überſehen, daß die Multiplication mit dem eingeſchloſſenen Factor den Factor vor der Parentheſe auch in der ſiebten Decimalſtelle nicht mehr ändern werde, und daß die Werthe $TW = \varrho . 0007246$, $WK = -\varrho . 0002902$ bis auf die ſiebte Decimalſtelle richtig ſind. In den Novis Commentariis Societatis Regiæ Scientiarum Gœttingenſis Tom. I. pag. 138. ſq. befindet ſich ein Aufſatz vom Hn. Hofr. Käſtner Additio ad Theoriam ſuam projectionis ſtereographicæ horizontalis coordinatarum projectionis formulas calculo aptiores exhibens, worin der Herr Verfaſſer dieſelben Formuln für TW und WK, welche ich hier mitgetheilt habe, zur Rechnung bequemer einzurichten ſucht. Auf dem Wege, welchen er angefangen hat, bin ich hier noch weiter gegangen, und glaube, ſo wie ich dieſe Formuln verwandelt habe, laſſe ſich am leichteſten und kürzeſten mit Sicherheit beurtheilen, wie weit man nach Beſchaffenheit der gebrauchten Tafeln die Reſultate ſchon genau genug gefunden habe. Die gemeinen Tafeln reichen, wie bekannt iſt, nicht weiter, als bis auf die ſiebente Decimalſtelle, und ſo läſt ſich auch beym Gebrauch der Formuln, ſie mögen nach meiner oder der Käſtneriſchen Art ausgedrückt ſeyn, die Schärfe der Rechnung nicht

weiter treiben. Ich habe Hr. Käſtners Exempel hier gebraucht, und kürzer mit ihm einerley Zahlen gefunden, wobey ich jedoch für diejenigen, welche die Vergleichung anſtellen wollen, bemerke, daß bey ihm $x = \varrho . 0,0007246$, und $y = -\varrho . 0,0002903$ wie bey mir gefunden werde, wenn man bey ihm zwey Rechnungsfehler verbeſſert. Bey ihm iſt $\varrho = 1$, und

$$x = 0,0007246 + (1 + 0,0000006)$$

$$y = -0,0002903 + (1 + 0,0000006)$$

nicht aber, wie aus einem Verſehen gerechnet iſt,

$x = 0,0007246 + 0,0000006$ und

$y = -(0,0002903 + 0,0000006)$.

350. §.

121 F. Die Tafel ſtellt noch die ſtereographiſche Horizontal-Projection der Kugel vor, und auf derſelben iſt ein Punct K gegeben: man ſoll den Stundenwinkel finden, welcher dem dadurch abgebildeten Punct zugehört, nebſt dem Abſtand deſſelben vom Aequator.

Aufl. Weil die Projection des Pols P als bekannt angenommen wird, ſo ziehe man GP in p, ſo iſt Bp die Pollhöhe des Orts, deſſen Horizont die Tafel vorſtellt. Dieſe trage man auch aus b in q und ziehe Gq in Π, ſo iſt Π die Projection des entgegen geſetzten Pols. Durch P, K, und Π verzeichne man einen Kreis, oder ſuche nur den Mittelpunct f deſſelben, der allemahl in ch liegt, wenn T$g = \varrho$ tangπ genommen und ch durch g auf Tg ſenkrecht gezogen wird. Hiernächſt ziehe man Pf, und meſſe den Winkel gPf, ſo hat man das Comple-

plement des geſuchten Stundenwinkels zu 90°, mithin den Stundenwinkel ſelbſt.

Um den geſuchten Abſtand vom Aequator zu finden, dienen folgende Schlüſſe. Es ſey f' der Mittelpunct der Projection des Parallelkreiſes durch K, ſo iſt f'K der Halbmeſſer derſelben, und wenn TK $= a$, T$f' = x$, f'K $= r$, der Winkel KT$f' = \alpha$ geſetzt wird, ſo hat man

$$aa - 2ax\,\mathrm{coſ}\alpha + xx = rr.$$

Ferner iſt $x = \dfrac{\varrho\,\mathrm{coſ}\pi}{\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi}$, und

$r = \dfrac{\varrho\,\mathrm{coſ}\varepsilon}{\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi}$ (346. §.) und dieſe Werthe

gebraucht geben die Gleichung $aa - \dfrac{2a\varrho\,\mathrm{coſ}\pi\,\mathrm{coſ}\alpha}{\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi}$

$+ \dfrac{\varrho^2\,\mathrm{coſ}\pi^2}{(\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi)^2} = \dfrac{\varrho^2\,\mathrm{coſ}\varepsilon^2}{(\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi)^2}$. Ferner

hat man $\mathrm{coſ}\pi^2 - \mathrm{coſ}\varepsilon^2 = \mathrm{ſin}\varepsilon^2 - \mathrm{ſin}\pi^2$ mithin wird

$$aa - \frac{2a\varrho\,\mathrm{coſ}\pi\,\mathrm{coſ}\alpha}{\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi} + \frac{\varrho^2(\mathrm{ſin}\varepsilon - \mathrm{ſin}\pi)}{\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi} = 0,$$

und daraus folgt

$$(a^2 + \varrho^2)\,\mathrm{ſin}\varepsilon + (a^2 - \varrho^2)\,\mathrm{ſin}\pi = 2a\varrho\,\mathrm{coſ}\pi\,\mathrm{coſ}\alpha,$$

und $\mathrm{ſin}\varepsilon = \dfrac{2a\varrho\,\mathrm{coſ}\pi\,\mathrm{coſ}\alpha - (a^2 - \varrho^2)\,\mathrm{ſin}\pi}{a^2 + \varrho^2}$.

Das giebt ferner $\mathrm{ſin}\varepsilon + \mathrm{ſin}\pi =$

$\dfrac{2a\varrho\,\mathrm{coſ}\pi\,\mathrm{coſ}\alpha + 2\varrho^2\,\mathrm{ſin}\pi}{a^2 + \varrho^2}$, und wenn dieſer

Ausdruck in der Gleichung $x = \frac{\varrho \cos\pi}{\sin\varepsilon + \sin\pi}$ gebraucht wird, ſo wird $x = \frac{\frac{1}{2}(a^2 + \varrho^2)}{a\cos\alpha + \varrho \tang\pi}$ gefunden. Man ziehe alſo KX auf TP ſenkrecht, ſo hat man $TX = a\cos\alpha$, $Tg = \varrho \tang\pi$ (346. §.), und wenn man $XY = Tg$ nimmt, ſo iſt $TY = a\cos\alpha + \varrho \tang\pi$. Durch y ziehe man YN′ auf TB ſenkrecht, nehme $TM' = TK = a$, ſo iſt $BM' = \sqrt{(a^2 + \varrho^2)}$. Mit dieſem Halbmeſſer BM′ ſchlage man aus T einen Bogen, der YN in N′ ſchneidet, halbire TN′ mit einer ſenkrechten Linie in O, ſo geht dieſe durch f'. Denn in den rechtwinklichten Dreyecken TYN′ und TOf' hat man wegen der Aehnlichkeit $TY : TN' = TO : Tf'$, d. i. $a\cos\alpha + \varrho \tang\pi : \sqrt{(a^2 + \varrho^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \varrho^2)} : Tf'$, mithin $Tf' = \frac{\frac{1}{2}(a^2 + \varrho^2)}{a\cos\alpha + \varrho \tang\pi}$, wie erfordert wird.

Um den geſuchten Abſtand vom Aequator ſelbſt zu finden, trägt man nun $f'K$ aus f' in a' und ziehet Ga', welche den Umfang der Tafel in R ſchneidet; ſo geben die Grade des Bogens FR den geſuchten Abſtand vom Aequator.

Will man das geſuchte durch Rechnung finden, ſo dient die Gleichung $\sin\varepsilon = \frac{2a\varrho \cos\pi \cos\alpha - (a^2 - \varrho^2)\sin\pi}{a^2 + \varrho^2}$. Um den Stundenwinkel φ zu finden, erwäge man, daß PΠ und KΠ Sehnen des Stundenkreiſes ſind: wenn alſo ΠK durch Zf ſenkrecht halbirt wird, ſo iſt f der

Pro-

Projection des Stundenkreiſes Mittelpunct. Es iſt aber $\Pi K = b$ und der Winkel $T\Pi K = \zeta = gf\angle$ gegeben, alſo findet man $\frac{1}{2} b \sec\zeta + gf . \tang\zeta = g\Pi$. Weiter iſt $g\Pi = T\Pi - Tg = \varrho\,(\tang \frac{90° + \pi}{2} - \tang\pi)$ (346. §.) alſo wird $gf = \varrho\,(tg . \frac{90° + \pi}{2} - tg\,\pi)\cot\zeta - \frac{1}{2} b \operatorname{cosec}\zeta$. Weil nun $gf = \varrho \sec\pi \cot\varphi$, (346. §.) ſo findet man

$$\cot\varphi = (tg \frac{90° + \pi}{2} \cos\pi - \sin\pi)\cot\zeta - \frac{b}{2\varrho} \operatorname{cosec}\zeta \cos\pi.$$

351. §.

Die Regeln zur Zeichnung der orthographiſchen Horizontal-Projection der Kugel zu finden.

Aufl. Die orthographiſchen Projectionen der 120 F. Meridiane auf den Horizont des Orts Z ſind wiederum Ellipſen, die man aus dem 331. §. leicht findet. Es liegt nemlich der Mittelpunct f der Projection des Stundenkreiſes pLq, (120. Fig.) der die Tafel in Nu ſchneidet in ef, wenn ef auf Nn ſenkrecht ſteht, und der allgemeine Ausdruck für den Abſtand Tf von T iſt $= \varrho \sin\varepsilon \cos\lambda$. Ferner iſt die in ef liegende halbe Axe der Projection $p = \varrho \cos\varepsilon \sin\lambda$ und die darauf ſenkrechte $q = \varrho \cos\varepsilon$. (331. §.) Hier iſt nun $\varepsilon = 0$, und $\sin\lambda = \cos\pi \sin\varphi$, wie im 346. §.; demnach wird $Tf = 0$, das heiſt, der Mittelpunct der Projection fällt mit dem Mittelpunct der Tafel zuſammen. Weiter iſt $p = \varrho \cos\pi \sin\varphi$, und $q = \varrho$.

Im

Im 346. §. aber iſt ſchon $\text{tang}\, GTe = \cot BTe = \sin\pi \, \text{tang}\, \varphi$ gefunden, und hiedurch wird die Lage beyder Axen der Projection beſtimmt. Für $\varphi = 0$, wird $p = 0$, und $\cot BTe = 0$; für den Mittagskreis des Orts Z alſo wird die Projection eine grade Linie, die mit Bb zuſammen fällt, wie der Sache gemäß iſt.

122F. Um alſo für einen gegebenen Stundenwinkel die Projection des Stundenkreiſes zu zeichnen, nehme man $HD = \pi$, ziehe DE auf Bb ſenkrecht, ſo iſt $TE = \varrho \sin\pi$. Weiter nehme man $HL = \varphi$, ziehe TL, nehme $TI = TE = \varrho \sin\pi$, und ſetze IG, HM auf TH ſenkrecht: ſo iſt $IG = \varrho \sin\pi \, \text{tang}\, \varphi$. Noch nehme man $HM = IG = \varrho \sin\pi \, \text{tang}\, \varphi$, ſo iſt

$$\text{tang}\, HTM = \text{tang}\, GTe = \frac{HM}{TH} = \sin\pi \, \text{tang}\, \varphi .$$

Endlich ſey $D\alpha$ auf TH und $\alpha\beta$ auf TL ſenkrecht, ſo iſt $\alpha\beta = \varrho \cos\pi \cos\varphi$. Demnach mache man $Te = \alpha\beta = Ta$, und ziehe AC durch T auf Te ſenkrecht, ſo iſt AC die Zwergaxe und ae die zugeordnete Axe der Projection.

Die Projection P des Pols p liegt in Bb, und es iſt $TP = \varrho \cos\pi$. Wenn alſo $Bp = \pi$ genommen und pP auf Bb ſenkrecht gezogen wird; ſo iſt P die Projection des Pols. Weil die Stundenkreiſe einander alle in p (118. Fig.) ſchneiden, ſo müſſen ihre Projectionen einander alle in P ſchneiden. Nimmt man $T\Pi = TP$, ſo iſt Π die Projection des entgegengeſetzten Pols, und in dieſem Punct müſſen ſich die Projectionen der Stundenkreiſe ebenfalls insgeſammt ſchneiden.

Für

Für die Projectionen der Parallelkreiſe iſt nur zu bemerken, daß hier π das ſey, was im 329-331 §. λ war, und daß ε die dortige Bedeutung behalte. Ueberdem iſt jedes Parallelkreiſes Durchſchnittslinie gh mit der Tafel mit GH parallel, alſo auf TB ſenkrecht, und der Mittelpunct f' der Projection liegt in TB, ſein Abſtand $Tf' = \varrho \sin\varepsilon \cos\lambda$ (331. §.) wird hier $= \varrho \sin\varepsilon \cos\pi$, die in TB liegende halbe Axe iſt $p = \varrho \cos\varepsilon \sin\pi$, und die auf ihr ſenkrechte $q = \varrho \cos\varepsilon$. Noch hat man $Ta' = \varrho \sin(\varepsilon + \pi)$ und $Te' = \varrho \sin(\varepsilon - \pi)$, auenn a' und e' die Scheitelpuncte der in TB liegenden Axe ſind.

Nachdem alſo Dd unter dem Winkel $HTD = \pi$ gezogen worden, nehme man $DN = dn = \varepsilon$, ſo iſt $Gn = \varepsilon + \pi$, und $HN = \varepsilon - \pi$. Man ziehe na' und Ne' auf BT ſenkrecht, ſo iſt $Ta' = \varrho \sin(\pi + \varepsilon)$ und $Te' = \varrho \sin(\varepsilon - \pi)$, folglich $e'a'$ die zugeordnete Axe der Projection. Noch fälle man nQ auf Td ſenkrecht ſo iſt $TQ = \varrho \cos\varepsilon$; durch f' ziehe man RS auf TB ſenkrecht, und mache $fR = fS = TQ$, ſo iſt RS die Zwergaxe der Projection.

Die orthographiſchen Projectionen der Meridiane und Parallelkreiſe liegen ganz innerhalb der Gränze der Tafel, und berühren ihren Umfang in zweenen Puncten; die Projectionen der Stundenkreiſe nemlich in den Scheitelpuncten A und C ihrer groſſen Axe, die Projectionen der Parallelkreiſe aber in zweenen Puncten g und h, die man findet, wenn $TF = \varrho \sin\varepsilon \sec\pi$ genommen, und gh durch F auf TB ſenkrecht gezogen wird. Dieſe Linie gh iſt, wie aus Vergleichung mit der 120. Fig. erhellet, die Durchſchnittslinie der Ebene des Parallelkreiſes mit

der

der Tafel. Man nehme alſo $TV = nQ = \varrho \sin \varepsilon$, richte VX auf TG ſenkrecht auf, und trage $TX = \varrho \sin \varepsilon \sec \pi$ aus T in F, ſo kann man *gh* durch F auf TB ſenkrecht ziehen. Der Bogen *gRe'Sh* iſt alsdenn die Projection von demjenigen Theil des Parallelkreiſes, der hinter der Tafel liegt, *gah* aber die Projection des Theils der vor der Tafel auf der Seite liegt, wo das Auge angenommen iſt.

352. §.

Die Tafel ſtellt die orthographiſche Projection der Kugel auf dem Horizont eines Orts von bekannter Polhöhe vor: man ſoll das orthographiſche Bild eines Puncts finden, deſſen Stundenwinkel φ und Abſtand π vom Aequator gegeben ſind.

Aufl. Man zeichne die Projection eines Stundenkreiſes unter dem Winkel φ gegen den Meridian des Orts Z, und die Projection eines Parallelkreiſes, deſſen Abſtand vom Aequator $= \varepsilon$ iſt. Beyde Projectionen werden einander zwar in vier Puncten innerhalb der Gränzen der Tafel ſchneiden, und einer von dieſen Puncten wird das geſuchte Bild ſeyn: es kommen aber diejenigen Durchſchnittspuncte, welche in dem Bogen *gah* liegen, hiebey gewöhnlich nicht in Betrachtung, weil der Stundenwinkel nicht leicht gröſſer als 90° angenommen wird. Ueberlegt man nun überdem, ob der Stundenwinkel rechter Hand oder linker Hand des Haupt-Meridians angenommen ſey, ſo bleibt es nie zweifelhaft, welcher Punct das geſuchte Bild ſey. Daſſelbe liegt in dem Bogen *ge'h*, wenn $\varphi < 90°$ iſt, im Bogen *ga'h* aber, wenn $\varphi > 90°$ angenommen iſt.

Es

Es ſey K das ſtereographiſche Bild eben des Puncts L, wovon k das orthographiſche Bild iſt, und β ſey die Höhe des Puncts L über dem Horizont, α ſein Azimuth; ſo liegen K und k mit T in grader Linie (338. §.) und man hat hier $\sin\beta = \sin\varepsilon \sin\pi + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos\pi$, (347. §.) ſo wie $Tk = TK(1 + \sin\beta)$ iſt. (338. §.) Weil nun $TK = \frac{\varrho \cos\beta}{1 + \sin\beta}$ ſeyn muß, (335. §., wo ε das war, was hier β iſt,) ſo wird $Tk = \varrho \cos\beta$. Man ziehe kw auf TG ſenkrecht, ſo hat man $Tw = Tk \sin\alpha$, $wk = Tk.\cos\alpha$, weil $BTk = \alpha$ iſt: mithin $Tw = \varrho \cos\beta \sin\alpha$, und $wk = \varrho \cos\beta \cos\alpha$. Will man den Abſtand des Puncts L vom Zenith $= \delta$ ſetzen, ſo iſt $\beta = 90° - \delta$, und man hat $Tw = \varrho \sin\alpha \sin\delta$, und $wk = \varrho \cos\alpha \sin\delta$, da dann dieſe Formuln ähnliche Dienſte leiſten können, wie im 347. §. die dortigen für TW und WK.

Weil übrigens $TK : Tk = TW : Tw = WK : wk$,

$$\text{ſo iſt } Tw = \frac{Tk}{TK} . TW = TW(1 + \sin\beta),$$

und eben ſo $wk = WK(1 + \sin\beta)$. Demnach giebt die Vergleichung mit dem 347. §. $Tw = \varrho \cos\varepsilon \sin\varphi$, und $wk = \varrho(\sin\varepsilon \cos\pi - \cos\varphi \cos\varepsilon \sin\pi)$, oder $wk = \varrho(\sin(\varepsilon - \pi) + 2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \cos\varepsilon \sin\pi)$. Beyde Formuln dienen, wie die ähnlichen des 379. §. Tw und wk in jedem Fall am bequemſten, und ſo ſcharf als nöthig iſt, durch Rechnung zu finden.

353 §.

Eine Gleichung für die orthographiſche Projection des Mittagskreiſes $A e C a$ und des Parallelkreiſes $a R e S$ zu finden, die Abſciſſen vom Mittelpunct T auf Bb, und die Ordinaten darauf ſenkrecht, angenommen.

Aufl. Man ſetze $TY = wk = t$, und $Yk = Tw = u$, ſo kann man aus den Gleichungen

$$t = \varrho \sin\varepsilon \cos\pi - \varrho \cos\varphi \cos\varepsilon \sin\pi$$

und $u = \varrho \cos\varepsilon \sin\varphi$ (352. §.)

zuerſt ε wegſchaffen, und man erhält eine Gleichung zwiſchen t und u für den Mittagskreis, weil dieſelbe ergeben wird, wie t und u von einander abhängen, wenn man φ als gegeben betrachtet. Wird hiernächſt aus eben den beyden Gleichungen φ weggeſchaft; ſo ergiebt ſich um deswillen eine Gleichung für die Projection des Parallelkreiſes, weil ſelbige alsdenn ergeben muß, wie t und u von einander abhängen, wenn man ε als gegeben betrachtet. Um alſo zuerſt ε wegzuſchaffen, multiplicire man die Gleichung für t mit $\sin\varphi$, und ſubſtituire zugleich u ſtatt $\varrho \cos\varepsilon \sin\varphi$, ſo wird $t \sin\varphi = \varrho \sin\varepsilon \cos\pi \sin\varphi - u \cos\varphi \sin\pi$. Weil nun die zweyte Gleichung

$$\cos\varepsilon = \frac{u}{\varrho \sin\varphi}, \quad \text{mithin} \quad \sin\varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{uu}{\varrho\varrho \sin\varphi^2}\right)} = \frac{\sqrt{(\varrho^2 \sin\varphi^2 - u^2)}}{\varrho \sin\varphi}$$

giebt; ſo ſetze man auch dieſen Werth ſtatt $\sin\varepsilon$, und es wird $t \sin\varphi = \cos\pi \sqrt{(\varrho^2 \sin\varphi^2 - u^2)} - u \cos\varphi \sin\pi$. Schaft man das Wurzelzeichen

weg,

weg, ſo wird ferner $\varrho^2 \cos\pi^2 \sin\varphi^2 - u^2 \cos\pi^2 = t^2 \sin\varphi^2 + 2tu \sin\varphi \cos\varphi \sin\pi + u^2 \cos\varphi^2 \sin\pi^2$ gefunden, und das gehörig geordnet giebt $(\cos\varphi^2 \sin\pi^2 + \cos\pi^2) \,.\, u^2 + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\pi \,.\, tu + \sin\varphi^2 \,.\, t^2 = \varrho^2 \cos\pi \sin\varphi^2$. Man dividire die ganze Gleichung mit $\cos\varphi^2$ ſo erhält man $(\sin\pi^2 + \cos\pi^2 \sec\varphi^2) u^2 + 2 \tang\varphi \sin\pi \,.\, tu + \tang\varphi^2 \,.\, t^2 = \varrho^2 \cos\pi^2 \tang\varphi^2$ für die Projection des Mittagskreiſes.

Für den Parallelkreis hat man $\sin\varphi = \frac{u}{\varrho \cos\varepsilon}$,

also $\cos\varphi = \frac{\sqrt{(\varrho^2 \cos\varepsilon^2 - u^2)}}{\varrho \cos\varepsilon}$, mithin

$t = \varrho \sin\varepsilon \cos\pi - \sin\pi \sqrt{(\varrho^2 \cos\varepsilon^2 - u^2)}$, und $\varrho^2 \sin\pi^2 \cos\varepsilon^2 - u^2 \sin\pi^2 = \varrho^2 \sin\varepsilon^2 \cos\pi^2 - 2 t \varrho \sin\varepsilon \cos\pi + t^2$, oder gehörig geordnet $\sin\pi^2 \,.\, u^2 - 2 \varrho \sin\varepsilon \cos\pi \,.\, t + t^2 = \varrho^2 (\sin\pi^2 \cos\varepsilon^2 - \cos\pi^2 \sin\varepsilon^2)$, da dann $\sin\pi^2 \cos\varepsilon^2 - \cos\pi^2 \sin\varepsilon^2 = \sin\pi^2 \cos\varepsilon^2 - \cos\pi^2 + \cos\pi^2 \cos\varepsilon^2 = \cos\varepsilon^2 - \cos\pi^2 = \sin\pi^2 - \sin\varepsilon^2$ gefunden wird, und man erhält $\sin\pi^2 \,.\, u^2 - 2 \varrho \sin\varepsilon \cos\pi \,.\, t + t^2 = \varrho^2 (\sin\pi^2 - \sin\varepsilon^2)$.

354 §.

Auf der Tafel, welche die orthographiſche Horizontal-Projection der Kugel vorſtellt, iſt ein Punct k gegeben: man ſoll den Stundenwinkel und Abſtand vom Aequator des dadurch abgebildeten Puncts finden.

Aufl. Wenn man für angenommene Differenzen, etwa von 5 zu 5 Graden die Projectionen der Stundenkreiſe und Parallelkreiſe gezeichnet hat,

ſo giebt ſich beydes geſuchte für alle Durchſchnitts⸗puncte von ſelbſt, fällt aber k mit keinem dieſer Durchſchnittspuncte zuſammen; und man will beydes genauer als durch eine ohngefehre Schätzung finden; ſo laſſe man ky auf TB ſenkrecht fallen, und es ſind für den Punct k nunmehro $TY = t$, und $Yk = u$ gegeben. Aus der erſten Gleichung des 353. §. kann demnach φ gefunden werden, und aus der zweyten findet man ε.

In der erſten ſchreibe man $1 + \tang\varphi^2$ ſtatt $\sec\varphi^2$, und man erhält $u^2 + \cos\pi^2 \tang\varphi^2 . u + 2\tang\varphi \sin\pi . tu + \tang\varphi^2 . t^2 = \varrho^2 \cos\pi^2 \tang\varphi^2$. Dies nach $\tang\varphi$ geordnet giebt $((\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2) . \tang\varphi^2 - 2tu \sin\pi . \tang\varphi = u^2$, und

$$\tang\varphi^2 - \frac{2tu\sin\pi}{(\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2} .$$

$$\tang\varphi = \frac{u^2}{(\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2} .$$ Weil nun

$$\frac{u^2}{(\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2} + \frac{t^2 u^2 \sin\pi^2}{((\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2)^2}$$

$$= \frac{(\varrho^2 - u^2) u^2 \cos\pi^2 - t^2 u^2 + t^2 u^2 \sin\pi^2}{((\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2)^2}$$

$$= \frac{u^2 \cos\pi^2 (\varrho^2 - u^2 - t^2)}{\sqrt{(\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2)^2}}$$ gefunden wird,

ſo erhält man

$$\tang\varphi = \frac{-tu\sin\pi \pm u\cos\pi\sqrt{(\varrho^2 - u^2 - t^2)}}{(\varrho^2 - u^2)\cos\pi^2 - t^2};$$

Für $\pi = 0$, wird $\tang\varphi = \frac{u}{\sqrt{(\varrho^2 - u^2 - t^2)}}$,

alſo

alſo $\cot\varphi^2 = \frac{\varrho^2 - t^2}{u^2} - 1$, $\operatorname{coſec}\varphi^2 = \frac{\varrho^2 - t^2}{u^2}$,

und $\sin\varphi^2 = \frac{u^2}{\varrho^2 - t^2} = \operatorname{coſ}\gamma^2$, wenn wie im 344. §. $\gamma = 90° - \gamma$ iſt, woſelbſt dieſer beſondre Fall vorkommt.

Aus der zweyten Gleichung für den Parallelkreis hat man $\varrho^2 \sin\varepsilon^2 - 2\varrho t \operatorname{coſ}\pi . \sin\varepsilon = (\varrho^2 - u^2)\sin\pi^2 - t^2$, oder

$$\sin\varepsilon^2 - \frac{2t\operatorname{coſ}\pi}{\varrho} . \sin\varepsilon = \frac{(\varrho^2 - u^2)\sin\pi^2 - t^2}{\varrho^2},$$

woraus $\sin\varepsilon^2 = \frac{t\operatorname{coſ}\pi}{\varrho} \pm \frac{\sin\pi\sqrt{(\varrho^2 - u^2 - t^2)}}{\varrho}$

gefunden wird. Für $\pi = 0$ hat man $\sin\varepsilon = \frac{t}{\varrho}$, wie dem 344. §. gemäß iſt, weil daſelbſt die Projection des Parallelkreiſes eine in der Entfernung $\varrho \sin\varepsilon$ mit GH parallele grade Linie wird.

Aus φ hat man zugleich $\operatorname{tang} GTe = \sin\pi \operatorname{tang}\varphi$, ſo wie $Te = \varrho \operatorname{coſ}\pi \sin\varphi$, und kann nach Anleitung des vor. §. die Projection des Meridians zeichnen. Eben ſo hat man aus ε zugleich $Ta' = \varrho \sin(\varepsilon + \pi)$ $Te' = \varrho \sin(\varepsilon - \pi)$, $RS = \varrho \operatorname{coſ}\varepsilon$, und kann mithin die Projection des Parallelkreiſes zeichnen.

Der XXIV. Abſchnitt.

Beſondre
Regeln zur Eintheilung der Projection eines Kugelſchnitts in Grade.

355. §.

123 F. Es ſey GMRN ein Kugelſchnitt, OZ ſeine Axe, GORZ ein gröſter Kreis durch dieſe Axe, durch den Pol O laufe ein dritter Kreis OMp der Kugel, der den erſten GMRN in M ſchneidet und deſſen Lage gegen den gröſten Kreis GORZ gegeben iſt: man ſucht die Gröſſe des Bogen GM in Graden.

Aufl. Es ſey Op die Durchſchnittslinie der Ebenen des Kreiſes OMp und des gröſten Kreiſes, und ſie ſchneide GR, den Durchmeſſer des Kreiſes GMRN, deſſen Mittelpunct D iſt, in H: ferner ſey der Winkel DO$p = \eta$, und der Neigungswinkel der Ebene OMp gegen OGZR $= \vartheta$. Eben die Ebene OMp ſchneide des Kreiſes GMRN Ebene in MN, ſo iſt MN eine Sehne beyder Kreiſe, die von GR in H geſchnitten wird, und an der Spitze H giebt ſich ein körperliches Dreyeck, das an HG einen rechten Winkel hat, an Hp den Winkel ϑ, und zwiſchen dieſen Winkeln die Seitenfläche GH$p = 90° - \eta$. Demnach kann man die andre Perpendiculär-Seite GHM aus dem 538. §. Geom. n. 2. finden. Es iſt nem-

nemlich $\tang GHM = \sin GHp \,.\, \tang \vartheta$ oder $\tang GHM = \cos\eta \tang\vartheta$. Ferner ſetze man den Abſtand $ÆA = QE$ des Kreiſes $GMRN$ von dem zugehörigen Aequator, wie bisher $= \varepsilon$, ſo iſt der Halbmeſſer $DG = \varrho \cos\varepsilon = DM$, ſo wie $OD = \varrho (1 - \sin\varepsilon)$, mithin $DH = \varrho (1 - \sin\varepsilon) \tang\eta$. Alsdenn hat man im Dreyeck DHM wiederum $\sin HMD$

$$= \frac{\sin GHM \,.\, DH}{DM}:$$

und weil $\tang GHM = \cos\eta \tang\vartheta$, ſo iſt $\cot GHM = \sec\eta \cot\vartheta$, $\operatorname{cosec} GHM = \sqrt{(1 + \sec\eta^2 \cot d^2)}$, und $\sin GHM =$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \sec\eta^2 \cot\vartheta^2)}} = \frac{\cos\eta \tang\vartheta}{\sqrt{(1 + \cos\eta^2 \tang\vartheta^2)}}.$$

Ferner iſt $\frac{DH}{DM} = \frac{(1 - \sin\varepsilon) \tang\eta}{\cos\varepsilon} =$

$(\sec\varepsilon - \tang\varepsilon)\, tg\,.\,\eta = \tang \tfrac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon) \tang\eta$, mithin erhält man $\sin HMD = \frac{\tang \frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon) \sin\eta \tang\vartheta}{\sqrt{(1 + \cos\eta^2 \tang\vartheta^2)}}$,

oder auch $\sin HMD = \frac{\tang \frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon) \tang\eta}{\sqrt{(1 + \sec\eta^2 \cot\vartheta^2)}}$.

Endlich iſt $GDM = GHM - HMD$, alſo $\sin GDM = \sin GHM \cos HMD - \cos GHM \sin HMD$; und wenn die gefundenen Werthe gebraucht werden, ſo erhält man $\sin GDM =$

$$\frac{\sqrt{((1 + \sec\eta^2 \cot\vartheta^2 - tg\,\frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon)^2 \tang\eta^2)}}{1 + \sec\eta^2 \cot\vartheta^2}$$

$$- \frac{\tang \frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon)\, tg\,.\,\eta \sec\eta \cot\vartheta}{1 + \sec\eta^2 \cot\vartheta^2}.$$

 Weil

Weil dieſer Ausdrück zur würklichen Berechnung des Winkels GDM nicht der bequemſte iſt, ſo kann man vortheilhafter zuerſt $\tang GHM = \cos\eta \tang\vartheta$ ſuchen, und hiernächſt $\sin HMD = \tang \frac{1}{2} (90° - \varepsilon) \tang\eta \sin GHM$, ſo hat man unmittelbar $GDM = GHM - HMD$. Die Grade dieſes Winkels ſind zugleich die Grade des Bogens GM.

356 §.

Der Kreis OMp ſchneide den gröſten Kreis OGZQ zum zweyten mahl in p, und durch p ziehe man einen Durchmeſſer der Kugel pTq; ſo wird $TpO = TOp = \eta$. Der Kreis $AmEn$ gehöre zur Axe pq, und werde von OMp in L geſchnitten. Wenn nun des Kreiſes $AmEn$ Abſtand von dem zugehörigen Aequator gegeben iſt, ſo kann man den Bogen AL in Graden eben ſo finden, wie vorhin GM gefunden ward, und die gegebenen Winkel η, ϑ, ſind für beyde einerley. Wenn demnach auch ε für beyde einerley iſt; das heiſt, wenn der eine von ſeinem Aequator ſo weit, als der andre von dem ſeinigen entfernt iſt; ſo findet man die Winkel GHM und ACL gleich groß. Aber auch die Halbmeſſer beyder Kreiſe GMRN und $AmEn$ ſind bey der angenommenen Vorausſetzung gleich groß: mithin haben auch die Bogen GM und AL gleiche Länge.

357. §.

123 F. Der gröſte Kreis Bb ſtelle nun den Horizont des Orts Z, als die perſpectiviſche Tafel vor, das Auge ſtehe in O, und $AmEn$ ſey ein Kreis, deſſen ſtereographiſche Projection auf der Tafel ſchon verzeichnet iſt. Weiter ſey L ein Punct im Umfange

des

des abgebildeten Kreiſes $AmEn$, und OL durchbore die Tafel in K, die Ebene des Kreiſes GMQN in λ, Op aber durchbore die Tafel in P, ſo iſt P das Bild des Pols p und K das Bild des Puncts L. Die Ebene LOp giebt den Kugelſchnitt OMp, die alſo die Tafel in KP, den Kreis $AmEn$ in hL, den Kreis GMRN in MH ſchneidet, daß alſo λ in MH liegt. Wenn nun OG und OM verlängert, die Tafel in g und μ treffen; ſo liegen g und μ in der ſtereographiſchen Projection des Kreiſes QMRN, und die Ebene MOZ ſchneidet die Tafel in $T\mu$, den Kreis GMRN in DM: der Punct μ liegt in beyden Ebenen OMp und der Tafel, alſo in beyder Durchſchnittslinie PK, in der auch das Bild K des Puncts L liegt. Aus dem 335. §. iſt bekannt, daß die Bogen GM und $g\mu$ gleich viele Grade faſſen, mithin faſſet auch $g\mu$ ſo viele Grade, als AL. Aber der Bogen aK der Projection iſt das Bild des Bogens BL: mithin faſſet allemahl $g\mu$ ſo viele Grade, als der Bogen der Projection zwiſchen den Schenkeln des Winkels aKn abbildet.

358. §.

Dieſe Schlüſſe folgen auch umgekehrt. Wenn $g\mu$ das Bild des Bogens GM iſt, und man ziehet in der Tafel $P\mu$, welche das Bild des Kreiſes $AmEn$ in K ſchneidet, ſo iſt K das Bild eines Puncts L der in ſeinem Parallel von A ſo weit abſtehet, als M von G in dem ſeinigen, mithin um eben ſo viele Grade, als der Bogen $g\mu$ faſſet. Denn weil K vermöge der Vorausſetzung in der Projection des Kreiſes $AmEn$ liegt, ſo iſt K das Bild eines Puncts L, der mit O und K in grader Linie liegt, mithin in der

Ebene OMμP. Aber L liegt auch in der Oberfläche der Kugel, mithin im Umfang des Kreiſes OMp in der Ebene OμP, folglich da, wo dieſer Kreis und AmEn einander ſchneiden: demnach iſt der Bogen AL, den aK abbildet, dem Bogen GM gleich, und AL faſſet ſo viele Grade, als $g\mu$. Von dieſer Eigenſchaft führt der Kreis durch g und μ den Namen: der zur Projection des Kugelſchnitts AmEn gehörige theilende Kreis. Sein Halbmeſſer iſt vermöge des 335. §. $= \varrho \tang \frac{1}{2}(90° + \varepsilon)$, weil der Kreis GMRN, zu deſſen Projection dieſer Halbmeſſer gehört, mit dem Auge auf einer Seite der Tafel liegt, mithin das dortige ε hier negativ iſt. Sein Mittelpunct iſt mit dem Mittelpunct der Tafel einerley. Man ſchreibt übrigens dem Bogen aK der Projection eben ſo viele Grade zu, als der Bogen AL faſſet, den er abbildet, weil man in der Perſpectiv von dem Bilde einer Sache ſo redet, als wenn es die Sache ſelbſt wäre.

359. §.

Die ſtereographiſche Projection *mekn* eines Kugelſchnitts, deſſen Lage bekannt iſt, in Grade oder ſonſt verlangte gleiche Theile einzutheilen.

124F. Aufl. Es ſey BGbH die Tafel, T ihr Mittelpunct, ε der Abſtand des durch *me*K*n* abgebildeten Kreiſes von dem dazu gehörigen Aequator, und λ der Abſtand des Auges von demſelben Aequator. Man ſuche die Projection der Axe des abgebildeten Kreiſes, die vermöge des 328. §. allemahl auf der Durchſchnittslinie der Tafel mit der Ebene des abge-

gebildeten Kreiſes ſenkrecht iſt, und in der Linie des Auges liegt. Dieſe ſey Bb, und man nehme $TP = \varrho \operatorname{tang} \frac{90^\circ - \delta}{2}$, (329. §.) ſo iſt P die Projection des hinter der Tafel liegenden zum abgebildeten Kreiſe gehörigen Pols. Durch b ziehe man ferner eine Tangente der Tafel, nehme $b\varepsilon = \frac{1}{2}(90^\circ + \varepsilon)$ und ziehe $T\varepsilon\zeta$, ſo iſt $b\zeta$ der Halbmeſſer des theilenden Kreiſes, (358. §.) den man alſo aus dem Mittelpunct T verzeichnen kann. Dieſen Kreis theile man in ſeine Grade und fange die Abtheilungen in g oder auch in k an: in alle Theilungspuncte, wovon hieſelbſt μ einen vorſtellt, ziehe man die graden Linien $P\mu$, ſo theilen dieſe die gegebene Projection *men* in den Durchſchnittspuncten K ſo ein, wie verlangt wird.

So leicht dieſes Verfahren an ſich iſt, ſo hat es doch die Unbequemlichkeit, daß der Halbmeſſer des theilenden Kreiſes deſto gröſſer ausfällt, je gröſſer ε iſt. Für $\varepsilon = 0$, das heiſt, wenn die Projection einen gröſten Kreis abbildet, ſo iſt der Halbmeſſer des theilenden Kreiſes dem Halbmeſſer der Tafel gleich, mithin iſt für die Projectionen aller gröſter Kreiſe, dahin alle Stundenkreiſe, und der Aequator gehören, dies Verfahren bequem genug. Aber die Tangenten der Winkel über 60° wachſen ſehr ſchnell, wenn alſo ε über 30°, mithin $\frac{1}{2}(90 + \varepsilon)$ über 60° wächſt; ſo werden die Halbmeſſer der theilenden Kreiſe bald ſehr groß, und zu dem beſchriebenen Gebrauch deſto unbequemer, je näher der Kreis dem Pol liegt, deſſen Pro-

jection eingetheilet werden ſoll. Für Fällen dieſer Art wird die folgende Aufgabe dienen.

360 §.

124F. Es ſey T der Mittelpunct der Tafel, und zugleich des theilenden Kreiſes, P die Projection des dem Kreiſe zugehörigen Pols, zu deſſen Projection *meKn* der theilende Kreis *mKn* gehört: man ſoll aus einem von T verſchiedenen, jedoch aber in der graden Linie TP gegebenen Mittelpunct α einen Kreis verzeichnen, der ſtatt des aus dem Mittelpunct T beſchriebenen Kreiſes dienen kann, die Projection *meKn* gehörig einzutheilen.

Aufl. Man ziehe durch α mit $T\mu$ die Parallele $\alpha\gamma$, die $P\mu$ in γ ſchneidet, ſo iſt $\alpha\gamma$ der Halbmeſſer des verlangten Kreiſes; und wenn man denſelben bey γ, δ, und ſ. f. in Grade theilt, ſo theilen $P\gamma$, $P\delta$, die Projection *meKn* in K, L, u. ſ. f. ebenfalls in ihre Grade ein. Weil nemlich $\alpha\gamma$ mit $T\mu$ parallel iſt, ſo iſt der Winkel $\beta\alpha\gamma = kT\mu$ und der Bogen $\beta\gamma$ dem Bogen $k\mu$ ähnlich. Ueberdem hat man $P\alpha : PT = \alpha\gamma : T\mu$, und wenn man $P\delta$ bis ν verlängert, hiernächſt aber $T\nu$ und $\alpha\delta$ ziehet, ſo iſt $\alpha\delta = \alpha\gamma$, $T\nu = T\mu$, mithin auch $P\alpha : PT = \alpha\delta : T\nu$, folglich das Dreyeck $P\alpha\delta \backsim PT\nu$ (213. §. Geom.) und der Winkel $\beta\alpha\delta = kT\nu$, mithin der Bogen $\beta\delta$ dem Bogen $k\nu$ ähnlich. So viele Grade alſo von β nach δ genommen werden, ſo viele Grade ſchneidet auch $P\delta$ von k nach ν auf dem theilenden Kreiſe ab, mithin eben ſo viele Grade auf der Projection von e nach L.

Der Halbmeſſer $\alpha\gamma$ dieſes neuen theilenden Kreiſes kann alſo vermittelſt der Proportion $PT:P\alpha = T\mu:\alpha\gamma$ gefunden werden; und wenn $PT=a$, $P\alpha=b$, $T\mu=R$, $\alpha\gamma=r$ geſetzt wird, ſo hat man $r=\frac{b}{a}\cdot R$. Es iſt ganz willkührlich, wo man α zwiſchen P und T annehmen will, alſo wird dies ein Mittel, den Halbmeſſer des theilenden Kreiſes in jedem verlangten Verhältniß $a:b$ zu verkleinern. Wenn nun, wie im 328. §. $ÆTO = BTp = \lambda$, mithin $ZTp = 90° - \lambda$, und $ÆTA = QTE$, oder der Abſtand des Kreiſes $AmEn$ von ſeinem Aequator $=\varepsilon$ geſetzt wird; ſo hat man aus dem 359. §. den Halbmeſſer $R = \varrho \text{tang} \frac{1}{2}(90° + \varepsilon)$, und $TP = a = \varrho \text{tang} \frac{1}{2}(90° - \lambda)$. Demnach erhält man $r = \frac{tg \frac{1}{2}(90° + \varepsilon)}{tg \frac{1}{2}(90° - \lambda)}\cdot b$.

361. §.

Es iſt ein Punct β in der Projection der Axe Pb eines Kugelſchnitts auf der Tafel gegeben: man ſoll einen theilenden Kreis für die Projection des Kugelſchnitts durch dieſen Punct durchführen. 124F.

Aufl. Der Mittelpunct des geſuchten Kreiſes liegt gleichfalls in Pb, und wenn α dieſer Mittelpunct iſt, überdem aber $P\beta=c$, der geſuchte Halbmeſſer $\alpha\beta=r$ geſetzt wird, ſo hat man $P\alpha=c-r=b$; mithin aus dem vor. §. $r=\frac{c-r}{a}\cdot R$, und das giebt $(a+R).r=c.R$,

alſo

alſo $r = \frac{c.R}{a+R}$. Braucht man demnach wie im vor. §. die dort angezeigten Werthe von R und a, ſo findet man

$$r = \frac{c.\tang\frac{1}{2}(90°+\varepsilon)}{\tang\frac{1}{2}(90°-\lambda)+\tang\frac{1}{2}(90°+\varepsilon)}, \text{ oder}$$

auch $r = \frac{c}{1+\tang\frac{1}{2}(90°-\lambda)\cot\frac{1}{2}(90°+\varepsilon)}$.

Um dieſe Formuln für die würkliche Rechnung noch bequemer zu machen, ſetze man $90°-\lambda=\varkappa$ und $90°-\varepsilon=\eta$, ſo hat man $\varepsilon=90°-\eta$, und $\frac{1}{2}(90°+\varepsilon)=90°-\frac{1}{2}\eta$, mithin

$r = \frac{c}{1+\tang\frac{1}{2}\varkappa.\tang\frac{1}{2}\eta}$. Der Nenner dieſer Formul iſt $= 1 + \frac{\sin\frac{1}{2}\varkappa\sin\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}\varkappa\cos\frac{1}{2}\eta}$

$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\varkappa)}{\cos\frac{1}{2}\varkappa\cos\frac{1}{2}\eta}$, (423. §. Geom.) alſo wird

$$r = \frac{c.\cos\frac{1}{2}\varkappa.\cos\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}(\eta-\varkappa)}.$$

Soll der theilende Kreis durch den Mittelpunct T der Tafel geführt werden, ſo hat man $c=P\beta=PT=\varrho\tang\frac{1}{2}(90°-\lambda)=\varrho\tang\frac{1}{2}\varkappa$, und es wird $r = \frac{\varrho.\sin\frac{1}{2}\varkappa.\cos\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}(\eta-\varkappa)}$.

Will man aber den theilenden Kreis durch ε führen, als den einen Endpunct des Durchmeſſers der

der zugehörigen Projection, ſo iſt $c = Pe = PT - Te = \varrho(\text{tang}\,\frac{1}{2}(90° - \lambda) - \text{tang}\,\frac{1}{2}(\varepsilon - \lambda))$, oder $c = \varrho(\text{tang}\,\frac{1}{2}\varkappa - \text{tang}\,\frac{1}{2}(\varkappa - \eta)) = \varrho(\text{tang}\,\frac{1}{2}\varkappa + \text{tang}\,\frac{1}{2}(\eta - \varkappa))$. Es iſt aber $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varkappa + \text{tang}\,\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\varkappa}{\cos\frac{1}{2}\varkappa} + \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)}{\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\varkappa\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa) + \cos\frac{1}{2}\varkappa\sin\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)}{\cos\frac{1}{2}\varkappa\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}\varkappa\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)},$$ mithin

$$c = \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}\varkappa\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)};$$ und das giebt

$$r = \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}\eta\cos\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)^2},$$ oder

$$r = \frac{\frac{1}{2}\varrho\sin\eta}{\cos\frac{1}{2}(\eta - \varkappa)^2}.$$

362. §.

Wendet man dieſe Methode, die ſtereographiſche Projection eines Kugelſchnitts in Grade zu thei- 121 F. len, auf die Horizontal-Projection an; ſo hat man für alle Parallelkreiſe des Aequators einerley Punct P, worin die Theilungslinien zuſammen laufen. Es iſt nemlich derjenige Winkel, welcher in den allgemeinen Formuln des 328. 329. 359. 360. 361. §. mit λ bezeichnet war, im 346. §. für alle Parallelkreiſe des Aequators $= \pi$, und man hat $TP = \varrho\,\text{tang}\,\frac{90° - \pi}{2}$. Weil nun der Aequator

GEH

GEH ein gröſter Kreis iſt; ſo kann dem 359. §. gemäß die Tafel GBHb ſelbſt als der Theilende Kreis dienen. Theilt man nemlich den Quadranten bG von 15 zu 15 Graden ein, und zieht von P in die Theilungspuncte grade Linien; ſo theilen ſelbige auch den Quadranten EG des Aequators von 15 zu 15 Graden ein. Für jeden Parallelkreis hat man dem 359. §. gemäß den Halbmeſſer des theilenden Kreiſes $= \varrho \tan \frac{1}{2}(90° + \varepsilon)$, ſo lange man den Mittelpunct der Tafel für den Mittelpunct des theilenden Kreiſes beybehalten will, und der dazu gehörige Halbmeſſer nicht zu ſehr groß ausfällt: im letzten Fall aber kann man den Schlüſſen des 361. §. gemäß allemahl den Halbmeſſer eines theilenden Kreiſes finden, der durch einen gegebenen Punct β in Bb gehet, da dann, P$\beta = c$ geſetzt, dieſer Halbmeſſer

$$= \frac{c}{1 + \tan \frac{1}{2}(90° - \lambda) \cot \frac{1}{2}(90° + \varepsilon)} \text{ wird,}$$

$\lambda = \pi$ angenommen. Dieſer Ausdruck iſt allemahl kleiner als c, er wächſt mit ε, wenn alles übrige einerley bleibt, und wird $= c$, wenn $\varepsilon = 90°$ wird: er iſt demnach für ſolche Parallelkreiſe, die dem Pol ſehr nahe liegen, vorzüglich bequem. Für Parallelkreiſe auf der andern Seite des Aequators iſt ε negativ und der erwehnte Halbmeſſer nimmt nun ab, wenn ε auf der andern Seite des Aequators wächſt.

Für alle Stundenkreiſe iſt zwar die Tafel ſelbſt ein theilender Kreis, (359. §.) allein um die Theilung eines jeden einzelnen Stundenkreiſes, wie PKM zu bewerkſtelligen, muß man noch die Projection ϖ des ihm zugehörigen Pols ſuchen. Dieſe liegt in der dieſem Stundenkreiſe zugehörigen Linie des Auges

ges, und weil in derſelben nicht allein der Mittelpunct T der Tafel, ſondern auch der Mittelpunct f der Projection des Stundenkreiſes liegt, ſo kann man Tf ziehen, und das wird die Linie des Auges ſeyn. In derſelben nimmt man $T\pi = \varrho \tang \frac{90° - \lambda}{2}$, und aus dem 346. §. hat man

$\sin\lambda = \cos\pi \sin\varphi$, wenn φ den Stundenwinkel bezeichnet, mithin hat man λ durch eine leichte Rechnung, und kann $T\pi = \varrho . \tang \frac{90° - \lambda}{2}$ ebenfalls finden.

In der 121. Fig. iſt $\pi = 22° 30'$ angenommen, und zu dem Stundenkreiſe NPKMQ gehört der Winkel $\varphi = 75°$. Demnach hat man $\cos\pi = 0,92388$ und $\sin\varphi = 0,96592$; das Product iſt 0,89238 und zu dieſem Sinus gehört der Winkel $\lambda = 63° 10'$, mithin iſt $90° - \lambda = 26° 50'$. Es iſt aber NPKMQ das Bild eines Halbkreiſes, und NQ die Durchſchnittslinie der Ebene des abgebildeten Stundenkreiſes mit der Tafel: mithin iſt NQ auf Tf ſenkrecht. Man nehme alſo NR $= 90° - \lambda = 26° 50'$ und ziehe QR, welche Tf in π ſchneidet, ſo iſt π die Projection des zu dieſem Stundenkreiſe gehörigen Pols, und zugleich der Punct, worin die Theilungslinien für dieſen Stundenkreis zuſammen laufen. Eine kleine Probe von der Richtigkeit der Zeichnung kann man ſo anſtellen. Der Bogen MK muß 40° alſo PK 50° faſſen. Demnach ziehe man πP und πK bis an den Umfang der Tafel in μ

und

und ν, ſo müſſen zwiſchen μ und ν im Umfang der Tafel 50 Grade liegen.

363. §.

118F. Auf die ſtereographiſche, äquatoriſche Projection wird dieſe Methode die Projectionen der Meridiane und Parallelkreiſe einzutheilen eben ſo leicht angewandt. Weil nemlich das Auge im Aequator aller Parallelkreiſe ſteht, ſo hat man für alle Parallelkreiſe $\lambda = 0$, (340. §.) und $TP = \varrho \tang \frac{1}{2}.90^\circ = \varrho$, wie denn auch P in den Umfang der Tafel fallen muß. Für den Aequator, der ſich hier in die grade Linie GH projicirt, iſt die Tafel ſelbſt der theilende Kreis, wenn alſo der Quadrant HQ in ſeine Grade getheilt iſt, und man zieht durch alle Theilungspuncte Linien in P, ſo theilen ſie auch den Quadranten TH des Aequators in ſeine Grade; da dann TG vermittelſt des Quadranten GQ eben ſo getheilt wird. Uebrigens iſt es hier einerley, ob man P oder Q für den Punct brauchen will, worin die Theilungslinien zuſammen laufen. Für jeden andern Parallelkreis, deſſen Abſtand vom Aequator $= \varepsilon$ iſt, bleibt der Halbmeſſer des Theilenden Kreiſes, wie im 359. §., $= \varrho \tang \frac{1}{2}(90^\circ + \varepsilon)$ ſo lange er ohne Unbequemlichkeit mit der Tafel concentriſch bleiben kann. In andern Fällen, wenn der Parallelkreis dem Pol nahe iſt, kann man einen Punct β in PQ annehmen, durch welchen der theilende Kreis durchgehen ſoll, da dann $P\beta = c$ geſetzt ſein Halbmeſſer $= \dfrac{c}{1 + \cot \frac{1}{2}(90^\circ + \varepsilon)}$ gefunden wird.

Was die Meridiane betrift, ſo ſchneiden ſie insgeſammt die Tafel in PQ, und GH iſt für ſie die Linie des Auges, worin alſo auch die Projectionen ihrer Pole liegen. Iſt Π die Projection des Pols für einen Meridian, und der Abſtand des Auges von dieſem Meridian $= \lambda$; ſo hat man $T\Pi = \varrho \tan \frac{90° - \lambda}{2}$. Der im 340. §. gebrauchten Bezeichnung gemäß iſt alsdenn $\lambda = 90° - \gamma$, woſelbſt GPHQ für den erſten Meridian angenommen ward, und γ überhaupt den Winkel bezeichnete, unter welchem jeder andre Meridian wie P*e*Q oder PDQ den erſten ſchneidet, oder nach dem in der Geographie üblichen Sprachgebrauch, die Länge des Meridians P*e*Q oder PDQ. Will man alſo die Projection des Pols für einen Meridian haben, deſſen Länge $= \gamma$ iſt, ſo nimmt man $T\Pi = \varrho \tan \frac{1}{2}\gamma$. Dieſemnach kann man auf dem Quadranten QH einen Bogen QN von ſo vielen Graden nehmen, als die Länge γ faſſen ſoll, und PN ziehen, ſo iſt $T\Pi = \varrho \tan \frac{1}{2}\gamma$, und Π die Projection des Pols. Weil in der 118. Fig. der Bogen QN 40 Grade faſſet, ſo iſt Π die Projection eines Meridians, deſſen Länge $= 40°$ iſt. Für den Meridian PDQ müſte QN 50 Grade, für P*e*Q aber 10 Grade faſſen u. ſ. f. Für einen Meridian, deſſen Länge $= 90°$ iſt, wird $T\Pi = \varrho$, die grade Linie PQ iſt die Projection des Meridians, dem dieſe Länge $\gamma = 90°$ zugehört, und es iſt gleichviel, ob man G oder H für den Punct annimmt, worin die Theilungslinien zuſammen laufen. Für jeden andern Meridian iſt die dazu gehörige Projection des Pols Π dieſer Punct, worin die Thei-

lungslinien zuſammen laufen, und die Tafel ſelbſt für alle Meridiane der theilende Kreis.

364. §.

116 F. Noch iſt die Anwendung auf die ſtereographiſche Polar-Projection übrig. Um zuerſt die Projectionen der Parallelkreiſe einzutheilen, müſte man den Abſtand der Projection ihres Pols von

$T = \varrho \tang \frac{90^\circ - \lambda}{2}$ ſuchen, der hier $= 0$ wird,

weil $\lambda = 90^\circ$ iſt. (335. §.) Alle Theilungslinien müſſen alſo in T zuſammen laufen, und weil es allemahl einen mit der Tafel concertriſchen theilenden

Kreis giebt, deſſen Halbmeſſer $= \varrho \tang \frac{90^\circ + e}{2}$

iſt, T aber zugleich der Mittelpunct der Projectionen aller Parallelkreiſe iſt; ſo iſt der theilende Kreis mit der Projection ſelbſt concentriſch, wie der Natur dieſer Projectionsart gemäß iſt. Nimmt man einen Punct β willkührlich an, um durch denſelben den theilenden Kreis durchzuführen, ſo wird allemahl der Halbmeſſer deſſelben $= c$ gefunden, (361. §.) und hier iſt $c = T\beta$, weil P in T fällt, mithin fällt der Mittelpunct allemahl in T; das heiſt, für den Aequator und ſeine Parallelkreiſe iſt jeder mit der Tafel concentriſche Kreis ein theilender Kreis.

Für die Meridiane iſt bey dieſer Projectionsart

$\lambda = 0$, (335. §.) alſo $TP = \varrho \tang \frac{90^\circ - \lambda}{2} = \varrho$.

Die Projection eines jeden Meridians iſt eine grade Linie, wie AB, und weil dies zugleich die Durchſchnitts-

ſchnittslinie des Meridians mit der Tafel iſt, ſo ſetzt man GH auf AB ſenkrecht, die Tafel bleibt der theilende Kreis, und es kann G oder H für den Punct angenommen werden, worin die Theilungslinien zuſammen laufen.

365. §.

Aus der Abſciſſe EP$=t$, und halben Ordinate 102 F. PM$=u$ des Kreiſes hat man für die Abſciſſe $ep=x$, und der halben Ordinate $pm=y$ der Projection dem 56. 102. u. 252. §. gemäß

$$x=\frac{D\,coſec\,\psi\,.\,L\,.\,t}{(D\,coſec\,\psi+c)\,(D\,coſec\,\psi+c-t)},$$

$$y=\frac{D\,coſec\,\psi\,.\,u}{D\,coſec\,\psi+c-t}:$$

oder wenn $c=\delta+r$, und hiernächſt $D\,coſec\,\psi+\delta=b$ geſetzt wird,

$$x=\frac{(b-\delta)\,L\,.\,t}{(b+r)\,(b+r-t)},$$

$$y=\frac{(b-\delta)\,u}{b+r-t}$$

Wenn nun der Bogen EM$=\vartheta$ in Graden gegeben iſt, ſo iſt zugleich $t=r\,ſin\upsilon\,.\,\vartheta$ und $u=r\,ſin\,\vartheta$ gegeben, mithin hat man

$$x=\frac{(b-\delta)\,.\,L\,.\,r\,ſin\upsilon\,.\,\vartheta}{(b+r)\,(b+r\,coſ\,\vartheta)},$$

$$\text{und } y=\frac{(b-\delta)\,r\,ſin\,\vartheta}{b+r\,coſ\,\vartheta}.$$

Dieſe Formuln dienen jede Projection des Kreiſes in ihre Grade zu theilen, weil man für jede gegebene Zahl der Grade des Bogens ϑ auch x und y für die Projection finden kann. Iſt die Projection ſchon gezeichnet, ſo genügt es eine dieſer beyden Coordinaten für die Werthe $\vartheta = 1°$, $\vartheta = 2°$, u. ſ. f. zu berechnen, um die Eintheilung in Grade zu bewerkſtelligen. Iſt aber die Projection noch nicht gezeichnet, ſo kann man vermittelſt dieſer Formuln diejenigen Puncte der Projection ſuchen, die den Werthen $\vartheta = 1°$, $\vartheta = 2°$ u. ſ. f. zugehören, und auf ſolche Art die Zeichnung und Eintheilung der Projection zugleich bewerkſtelligen.

366. §.

Wenn die Projection des Kreiſes orthographiſch iſt, ſo ſind b und L unendlich groß, (265. §.) und man erhält $x = \frac{L.r.\text{ſinv}\,\vartheta}{b}$, $y = r\,\text{ſin}\,\vartheta$; wenn alſo aus dem 265. §. die Werthe von L und b gebraucht worden, ſo wird

$$x = \frac{\text{ſin}\beta\,\text{coſec}\psi\,\text{coſec}\zeta\,.\,r\,\text{ſinv}\,\vartheta}{\text{ſin}\beta\,\text{cot}\psi + \text{coſ}\beta\,\text{ſin}\eta}.$$ Aber den Vorausſetzungen des 331. §. gemäß hat man hier $\eta = 90°$, und $\zeta = 90°$, alſo wird

$$x = \frac{r\,\text{coſec}\psi\,\text{ſinv}\,.\,\vartheta}{\text{cot}\psi + \text{cot}\beta}.$$ Ueberdem iſt $\beta = \lambda = 90° - \psi$, alſo erhält man

$$x = \frac{r\,\text{ſec}\lambda\,\text{ſinv}\,.\,\vartheta}{\text{tang}\lambda + \text{cot}\lambda},$$ und es

iſt

iſt $\frac{\sec\lambda}{\tang\lambda + \cot\lambda} = \frac{\sec\lambda \tang\lambda}{\tang\lambda^2 + 1} = \frac{\tang\lambda}{\sec\lambda}$
$= \sin\lambda$, mithin $x = r \sin\upsilon . \vartheta \sin\lambda$.

Demnach iſt die mit der Grundlinie der Tafel parallele Ordinate der orthographiſchen Projection der dadurch abgebildeten Ordinate des Kreiſes gleich, wie der Natur dieſer Projection gemäß iſt, und die Abſciſſe des Kreiſes verhält ſich zu ihrem orthographiſchen Bilde, wie $1 : \sin\lambda$, oder wie $1 : \cos\psi$. Die Vorausſetzung $\vartheta = 90°$ giebt den mit der Grundlinie der Tafel parallelen halben Durchmeſſer der Projrction $q = r$, und den darauf ſenkrechten $p = r \sin\lambda$, wie dem 331. §. gemäß iſt. Der Mittelpunct der orthographiſchen Projection des Kreiſes fällt übrigens mit dem orthographiſchen Bilde des Mittelpuncts des Kreiſes zuſammen, (265. §.) und die mit der Grundlinie der Tafel parallele Axe der Projection iſt zugleich das Bild des mit eben der Grundlinie parallelen Durchmeſſers des abgebildeten Kreiſes.

367. §.

In der 113. Fig. ſtelle alſo die Ellipſe ADBE die orthographiſche Projection eines Kugelſchnitts vor, deſſen mit der Grundlinie der Tafel parallele Durchmeſſer $AB = 2r$ iſt, ſo iſt AB zugleich die Zwergaxe der Projection, und es muß die zugeordnete Axe $DE = 2r \sin\lambda = 2r \cos\psi$ ſeyn, mithin $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \sin\lambda$. Iſt nun ferner $Dp = r \sin\upsilon \vartheta \sin\lambda$, ſo hat man $pM = r \sin\vartheta = CP$,

 und

und weil CD $= r\sin\lambda$, ſo wird $Cp = r\sin\lambda\,(1 - \sin\upsilon\vartheta)$ $= r\cos\vartheta\,\sin\lambda =$ PM. Ueber AB ſey wie im 306. §. aus dem Mittelpunct C ein Kreis beſchrieben, ſo iſt der Bogen FN in Graden ausgedrückt $= \vartheta$, wenn CP $= r\sin\vartheta$ iſt, mithin PN $= r\cos\vartheta$, alſo

$$PM = PN\sin\lambda, \text{ oder } PM = \frac{CD}{AC}\,.\,PN,$$ wie im

306. §., und DM iſt das Bild des Bogens FN: oder der Bogen DM faſſet ſo viele perſpectiviſche Grade, als FN geometriſche Grade faſſet.

Dieſe Schlüſſe ergeben, daß eben die Methode, nach welcher dem 306. §. gemäß die Ellipſe ADBE gezeichnet werden kann, auch diene, wenn ſie als Projection eines Kegelſchnitts betrachtet in Grade eingetheilt werden ſoll. Hat man mit den Halbmeſſern CA, CD, die Kreiſe AFBG, *a*D*b*E verzeichnet, und ſelbige in einzelne Grade, oder von 5 zu 5 von 10 zu 10 Graden, wie man es nöthig findet, eingetheilt, durch die Theilungspuncte des kleinern Kreiſes aber mit AB, durch die Theilungspuncte des gröſſern mit DE Parallelen gezogen, ſo geben die Durchſchnittspuncte der zuſammen gehörigen Parallelen zugleich die Theilungspuncte der Projection für einzelne Grade, oder von 5 zu 5, von 10 zu 10 Graden.

Wäre die Projection ſchon gezeichnet, und ſollte man ſie nur eintheilen, ſo könnte man CA für den ganzen Sinus nehmen, und von C bis A in dem Verhältniß der Sinus von Grad zu Grad eintheilen; da dann die durch jeden Theilungspunct wie P auf CP ſenkrechten Ordinaten die Quadranten DA

und

und EA von D oder E bis A in ihre Grade theilen. Weil übrigens Ep = r coſϑ ſinλ = CD . coſϑ war; ſo kann auch CD für den Halbmeſſer genommen, und in dem Verhältniß der Sinus von Grad zu Grad eingetheilt werden: alsdenn theilen die durch jeden Theilungspunct wie p auf Cp ſenkrechten Ordinaten die Quadranten AD und BD von A oder B bis D in ihre Grade.

368 §.

Man wendet dieſe Methode leicht auf die orthographiſche Horizontal-Projection an, wenn es etwa verlangt würde, den Meridian AeCa, oder auch den Parallelkreis Re'Sa' in ſeine Grade einzutheilen: auch könnte man eben ſo verfahren, wenn es erfordert würde, die orthographiſch-äquatoriſche Projection des Meridians PYQ (119. Fig.) in Grade einzutheilen. In allen Fällen der orthographiſchen Projection iſt die halbe kleinere Axe = r ſinλ = r coſψ, mithin deſto kleiner, je näher das Auge der Ebene des Aequators des abgebildeten Kreiſes ſteht, oder je näher der Neigungswinkel ψ der Ebene des abgebildeten Kreiſes gegen die Tafel dem rechten Winkel kommt. In Fällen, wo $\lambda = 0$, oder $\psi = 90°$ iſt, verwandelt ſich die Ellipſe in eine grade Linie, die mit ihrer Zwergaxe zuſammen fällt. Stellt man ſich in der 113. Fig. vor, daß CD = CE abnehme, ſo bleibt doch DM allemahl das Bild des Bogens FN, und wenn CD = CE verſchwindet, ſo verwandelt ſich der Bogen DM in die grade Linie CP, die Puncte D und E fallen in C, ſo wie M und μ in P zuſammen, mithin iſt nun CP = r ſinϑ das Bild eines Bogens FN der in Graden ausgedrückt = ϑ iſt.

122 F. 119 F. 113 F.

Dieſemnach bleibt die am Ende des vor. §. feſtgeſetzte Regel für die Eintheilung der Projection in Grade auch alsdenn noch richtig, wenn ſich die Projection in eine grade Linie verwandelt, nur daß man die durch P rechtwinklicht zu ziehenden Ordinaten nicht nöthig hat, weil die Puncte P ſelbſt ſchon die Theilungspuncte ſind. Bey der orthographiſchen
122F. Horizontal-Projection würde man alſo die Projection *Bb* desjenigen Meridians, in deſſen Ebene das Auge ſtehet von T nach B und *b* in dem Verhältniß der Sinus eintheilen müſſen, den Halbmeſſer der Tafel für den ganzen Sinus genommen. Bey der ortho-
119F. graphiſch-äquatoriſchen Projection ſind die Projectionen aller Parallelkreiſe dergleichen in grade Linien, wie *gh* zuſammen gehende Ellipſen, weil das Auge in der Ebene ihres Aequators ſteht, mithin werden ſie von *p* nach *g* und *h* in dem Verhältniß der Sinus getheilt, $pg = ph$, für den ganzen Sinus genommen. Eben dergleichen grade Linien ſind bey
116F. der orthographiſchen Polar-Projection alle abgebildete Stundenkreiſe oder Meridiane, wie AB, die alſo von T gegen A oder B zu eben ſo eingetheilt werden, TA oder TB für den ganzen Sinus angenommen. In eben dieſem beſondern Fall der orthographiſchen Polar-Projection verwandeln ſich die abgebildeten Parallelkreiſe nicht in Ellipſen, ſondern ſie bleiben Kreiſe mit den abgebildeten von einerley Halbmeſſer. Ob nun gleich die Theilungsmethode des 367. §. alsdenn auch noch ihre Anwendung fände; ſo iſt es doch nun nicht nöthig ſich daran zu binden, weil hier gewöhnlich andre Methoden den Kreis zu theilen bequemer ſind.

Der XXV. Abſchnitt.

Allgemeine Betrachtung der Projection eines Kugelſchnitts, auch wenn die Tafel auf der Axe durchs Auge und der Kugel Mittelpunct nicht ſenkrecht iſt.

369. §.

Es iſt oben im 251. u. f. §. §. beym Vortrag der allgemeinen Theorie von den Kegelſchnitten angenommen worden, daß die Lage der ſchneidenden Ebene TVXY (102. Fig.) durch die drey Gröſſen $\epsilon = CW$, $\eta = CWF$, und den Neigungswinkel ψ der Ebene des Schnitts gegen die Grundfläche des Kegels beſtimmt ſey: aber die Lage der Ebene des Schnitts könnte auch wohl auf andre Art beſtimmt ſeyn, und ſo müſten ſich doch jene Beſtimmungen wieder daraus herleiten laſſen. Weil W und c in der Ebene des Schnitts und der Neigungsebene OCS der Axe des Kegels gegen die Grundfläche liegen, ſo iſt Wc beyder Ebenen Durchſchnittslinie. Es ſey der Winkel $CWc = \vartheta$, und der Neigungswinkel an $Wc = \varphi$, ſo könnten auſſer $CW = \epsilon$ die Winkel ϑ und φ ſtatt η und ψ gegeben ſeyn, da dann aus jenen beyden Winkeln dieſe leicht gefunden werden. 102 F.

Es iſt nemlich im körperlichen Dreyeck, deſſen Spitze W iſt, und deſſen Seitenflächen $CWF = \eta$, $CWc = \vartheta$, FWc, ſind, der Winkel an $CW = 90°$, mithin $\tang \eta = \sin \vartheta \tang \varphi$ (529. §. Geom.) und $\cos \psi = \cos \vartheta \sin \varphi$. Auſſerdem hat man zwiſchen den Winkeln η, ψ, ϑ, φ, noch die Gleichung

$$\frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} = \frac{\sin \varphi}{\sin \eta} \text{ (523. §. Geom.) oder}$$

$$\frac{\sin \eta}{\sin \vartheta} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \text{ oder auch}$$

$$\sin \eta \operatorname{coſec} \vartheta = \sin \varphi \operatorname{coſec} \psi.$$

Statt $CW = e$, und $CWc = \vartheta$, könnte nun auch der Abſtand Cc und der Winkel $CcW = \gamma$ gegeben ſeyn. Denn im Dreyeck CWc wäre auch der Winkel $WCc = \beta$ gegeben, mithin $CWc = \vartheta = 180° - (\beta + \gamma)$ und $CW = \frac{Cc}{\sin \vartheta} \sin \gamma$.

370 §.

Nun ſey T der Mittelpunct einer Kugel, und
115F. das Auge ſtehe in Ω, ſo iſt ΩTZ eine Axe der Kugel, die durchs Auge geht. Ferner ſey AMEN ein abzubildender Kugelſchnitt, C ſein Mittelpunct, *pq* ſeine Axe, die alſo durch C und T gehet; ſo iſt CΩ die Axe des optiſchen Kegels, die Ebene OC*q* iſt die Neigungsebene dieſer Axe gegen die Grundfläche, welche ſie in AE ſchneidet. Nun ſtellet ΩAE das auf der Grundfläche ſenkrechte Dreyeck durch die Axe des optiſchen Kegels vor, und den bisherigen Bezeichnungen gemäß iſt $\Omega CA = \beta$. Ferner ſey ÆGQH der zur Axe *pq* gehörige Aequator, ÆQ ſei-

ſeine Durchſchnittslinie mit der Ebene ΩAE, welche letztere die Kugel in dem gröſten Kreiſe ÆOQp ſchneidet; ſo iſt ÆA = QE = ε, und der Winkel ÆT$\Omega = \lambda$. Um nun die Lage der Tafel B'gb,h zu beſtimmen, ſetze man, ſie ſchneide die Axe der Kugel TΩ in t, die Neigungsebene OAE der Axe des optiſchen Kegels in Bb', die Axe dieſes Kegels ΩC in c, ſo liegen t und c' in B'b': wenn alſo Tt, der Winkel TtB', und der Neigungswinkel an tB' $= \varphi$ (369 §.) gegeben ſind, unter welchem die Ebene der Tafel gegen die Ebene OAE geneigt iſt, ſo iſt die Lage der Tafel beſtimmt. Ueberdem werden B'b' und AE in W zuſammen ſtoſſen, und durch W wird die Durchſchnittslinie X'Y' der Tafel mit der Grundfläche AMEN des optiſchen Kegels laufen, die ſie unter dem Winkel ψ ſchneidet, da dann ferner CW $= e$ und CWX' $= \eta$ iſt, welches die dem 251. §. gemäſſe Beſtimmung der Lage der Tafel war. (369. §.) Weiter werden B'b' und ÆQ einander in K ſchneiden, und durch K wird die Durchſchnittslinie gh der Tafel und des Aequators mit X'Y' parallel laufen. Man ſetze den Winkel TtB' $= \xi$, TK$t = \vartheta =$ CWt, ſo hat man im Dreyeck TKt, auch KT$t = \lambda$, folglich $\xi + \lambda + \vartheta = 180°$. Demnach ſind $\vartheta = 180° - (\xi + \lambda)$ und φ gegeben, und man hat auch η und ψ dem 369. §. gemäß.

Noch ſetze man T$t = k$, ſo hat man im Dreyeck tTV auſſer der Seitenlinie T$t = k$ noch die Winkel TtV $= 180° - \xi$, und TV$t = 90 - \vartheta$, mithin

$$\mathrm{TV} = \frac{k}{\cos\vartheta} \cdot \sin\xi, \quad \text{oder} \quad \mathrm{TV} = k \sin\xi \sec\vartheta.$$

Ferner iſt CT $= \varrho \sin\varepsilon$, alſo CW $=$ (CT + TV) $\cot\vartheta$,

oder

oder $e = (\varrho \sin \varepsilon + k \sin \xi \sec \vartheta) \cot \vartheta = (\varrho \sin \varepsilon \cos \vartheta + k \sin \xi) \operatorname{cosec} \vartheta$, $CW = e$ geſetzt, wie im 251. §.

371 §.

115 F. Der Abſtand des Auges vom Mittelpunct der Kugel iſt gegeben, und die Lage der gegen den Mittelpunct gerichteten Geſichtsaxe gegen einen abzubildenden Kugelſchnitt; überdem iſt die Lage der Tafel gegeben: man ſucht die Projection des Kugelſchnitts mit allen dazu gehörigen Abmeſſungen.

Aufl. 1.) Ich nehme an, daß die Winkel $ÆT\Omega = \lambda$, und $ÆTA = \varepsilon$ für die Lage des Auges bekannt ſind: für die Lage der Tafel aber der Abſtand $Tt = k$ mit den Winkeln $TtK = \xi$, und dem Neigungswinkel an $tK = \varphi$, unter welchem die Tafel die Ebene $OÆpQ$ ſchneidet; ſo hat man $TKt = CWt = \vartheta = 180^\circ - (\xi + \lambda)$, und daraus ferner $\tang \eta = \sin \vartheta \tang \varphi$, $\cos \psi = \cos \vartheta \sin \varphi$, $CWX' = \eta$, und den Neigungswinkel der Tafel, unter welchem ſie die Ebene der Grundfläche des optiſchen Kegels in $X'Y'$ ſchneidet, $= \psi$ geſetzt. Ueberdem hat man $CW = e = (\varrho \sin \varepsilon \cos \vartheta + k \sin \xi) \operatorname{cosec} \vartheta$, und wenn noch der Abſtand des Auges vom Mittelpunct der Kugel $T\Omega = h$ geſetzt wird, ſo findet man im Dreyeck $C\Omega T$ aus den Seitenlinien $T\Omega = h$, $TC = \varrho \sin \varepsilon$, und dem eingeſchloſſenen Winkel $CT\Omega = 90^\circ + \lambda$, den Winkel $TC\Omega = 90^\circ - \beta$; es wird nemlich

$$\tang TC\Omega = \frac{T\Omega \,.\, \sin CT\Omega}{CT - T\Omega \cos CT\Omega},$$

oder

oder $\cot\beta = \dfrac{h\cos\lambda}{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda}$; und nunmehro laſſen ſich die Formuln des 265. §. leicht anwenden.

2.) Weil nemlich $\Omega t = h - k$ iſt, ſo wird im 365. §. $D = (h-k)\sin\xi\sin\varphi$, alſo $D\operatorname{coſec}\psi = (h-k)\sin\xi\sin\varphi\operatorname{coſec}\psi$. Ferner iſt die Höhe des Auges Ω über dem Aequator $= h\sin\lambda$, und $CT = \varrho\sin\varepsilon$, mithin im 265. §. $a = \varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda$, ſo wie $\delta = e\sin\eta = (\varrho\sin\varepsilon\cos\vartheta + k\sin\xi)\sin\eta\operatorname{coſec}\vartheta$; oder auch $\delta = (\varrho\sin\varepsilon\cos\vartheta + k\sin\xi)\sin\varphi\operatorname{coſec}\psi$, weil $\sin\eta\operatorname{coſec}\vartheta = \sin\varphi\operatorname{coſec}\psi$. (369. §.) Das giebt ferner $D\operatorname{coſec}\psi + \delta = b = (h\sin\xi + \varrho\sin\varepsilon\cos\vartheta)\sin\varphi\operatorname{coſec}\psi$, und man hat den Formuln des 265. §. gemäß folgende Gleichungen

$$r = \varrho\cos\varepsilon,$$
$$a = \varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda,$$
$$\cot\beta = \frac{h\cos\lambda}{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda},$$
$$\tan\zeta = \tan\beta\sec\eta\operatorname{coſec}\psi,$$
$$L = (\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)\operatorname{coſec}\psi\operatorname{coſec}\zeta$$
$$\delta = (\varrho\sin\varepsilon\cos\vartheta + k\sin\xi)\sin\varphi\operatorname{coſec}\psi,$$
$$D = (h-k)\sin\xi\sin\varphi,$$
$$b = (h\sin\xi + \varrho\sin\varepsilon\cos\vartheta)\sin\varphi\operatorname{coſec}\psi,$$
$$f = L\cos\zeta = (\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)\operatorname{coſec}\psi\cot\zeta.$$

3.) Es iſt leicht, wenn man will, aus dieſen Formuln auch η und ψ völlig wegzuſchaffen, um alles durch die gegebenen Winkel ε, λ, ξ, φ auszudrücken. Denn die Gleichung $\cos\psi = \cos\vartheta\sin\varphi$ giebt

$\sin\psi =$

$\sin\psi = \sqrt{(1 - \cos\vartheta^2 \sin\varphi^2)}$, alſo $\operatorname{cosec}\psi = \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos\vartheta^2 \sin\varphi^2)}}$; und weil auch $\sin\psi = \frac{\sin\varphi \sin\vartheta}{\sin\eta}$, ſo hat man

$$\sin\eta = \frac{\sin\varphi \sin\vartheta}{\sqrt{(1 - \sin\varphi^2 \cos\vartheta^2)}},$$

$$\cos\eta = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varphi^2 \cos\vartheta^2)}}, \text{ und}$$

$$\sec\eta = \frac{\sqrt{(1 - \sin\varphi^2 \cos\vartheta^2)}}{\cos\varphi}, \text{ mithin}$$

$\sec\eta \operatorname{cosec}\psi = \sec\varphi$, und es wird $\operatorname{tang}\zeta = \frac{(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)\sec\varphi}{h\cos\lambda} = \frac{a\sec\varphi}{h\cos\lambda}$, mithin

$$\operatorname{cosec}\zeta = \frac{\sqrt{(a^2 \sec\varphi^2 + h^2 \cos\lambda^2)}}{a\sec\varphi}, \text{ und}$$

$$L = a \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta = \frac{\sqrt{((\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)^2 + h^2\cos\lambda^2\cos\varphi^2)}}{\sqrt{(1 - \cos\vartheta^2 \sin\varphi^2)}}.$$

Weil nun $\vartheta = 180° - (\xi + \lambda)$ war, ſo verwandeln ſich obige Gleichungen in folgende:

$$r = \varrho\cos\varepsilon,$$

$$a = \varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda,$$

$$L = \frac{\sqrt{((\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)^2 + h^2\cos\lambda^2\cos\varphi^2)}}{\sqrt{(1 - \cos(\xi + \lambda)^2 \sin\varphi^2}},$$

$\delta =$

$$\delta = \frac{k \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda) \sin\varphi}{\sqrt{(1 - \cos(\xi+\lambda)^2 \sin\varphi^2)}},$$

$$D = (h-k) \sin\xi \sin\varphi,$$

$$b = \frac{(h \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda)) \sin\varphi}{\sqrt{(1 - \cos(\xi+\lambda)^2 \sin\varphi^2)}},$$

$$\tang\zeta = \frac{(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda) \sec\varphi}{h \cos\lambda},$$

$$f = \frac{h \cos\lambda \cos\varphi}{\sqrt{(1 - \cos(\xi+\lambda)^2 \sin\varphi^2)}},$$

Die geſuchte Projection aber iſt ein Kegelſchnitt, ſein in den Augenpunct laufender halber Durchmeſſer iſt $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2}$, der mit der Grundlinie der Tafel parallele $q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2-r^2)}}$, und $\frac{qq}{pp} = \frac{b^2 - r^2}{L^2}$, der halbe zum Durchmeſſer p gehörige Parameter $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L}$.

4.) Um die Projection auf der Tafel TVXY, wie es ſonſt in der Perſpectiv gewöhnlich iſt, zu zeichnen, 102 müſte man den für die Ebene des abzubildenden Ku- 115 F. gelſchnitts gehörigen Augenpunct r mit der Linie des Auges rT als gegeben betrachten, oder willkührlich annehmen. Alsdenn kann man $r\mathrm{T} = a \operatorname{cosec}\psi$ nehmen und TV durch T auf rT ſenkrecht ziehen, ſo hat man die Grundlinie der Tafel. Will man den Haupt-

Hauptaugenpunct R als gegeben betrachten, ſo hat man in der Linie des Auges $RT = a\,\mathrm{coſec}\,\psi - D\cot\psi$, und $Rr = D\cot\psi$. Ferner wird $TF = f$ genommen, ſo hat man $Fr = L$, und $TFr = \zeta$. (Man verſtehe in der 115. Fig. das F, was in XY liegt, das c' der 115. Fig. iſt in der 102. Fig. die Stelle c.) Alsdenn liegen die Scheitelpuncte a und e des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers, nebſt dem Mittelpunct f der Projection, und dem Bilde c' des Mittelpudcts C des abgebildeten Kugelſchnitts in Fr, und man findet $Ff = \dfrac{b\vartheta - r^2}{b^2 - r^2} \cdot L$,

$$Fa = \frac{(\delta - r)L}{b - r},\quad Fe = \frac{(\delta + r)L}{b + r},$$

$$Fc' = \frac{\delta . L}{b}.$$

5.) Weil Wc' die Durchſchnittslinie der Tafel mit der Neigungsebene der Axe des optiſchen Kegels iſt, und in dieſer Neigungsebene die Pole p und q des abzubildenden Kugelſchnitts liegen, ſo liegen die Projectionen π und k dieſer Pole in Wc'. In eben dieſer Linie liegt auch die Projection t des Mittelpuncts T der Kugel. Dieſemnach nehme man $FW = e\,\mathrm{coſ}\,\eta$, und ziehe Wc', ſo liegt t (115. Fig.) in Wc', und man hat $ct = \dfrac{(h-k)}{\sin(\vartheta + \beta)} . \sin T\Omega C$;

weil aber $\sin T\Omega C = \dfrac{\mathrm{coſ}\,\beta}{h} . TC = \dfrac{\varrho \sin \varepsilon \,\mathrm{coſ}\,\beta}{h}$,

ſo wird $ct = \dfrac{\varrho (h-k) \sin \varepsilon \,\mathrm{coſ}\,\beta}{h \sin(\vartheta + \beta)}$

=

$$= \frac{\varrho(h-k)\sin\varepsilon}{h(\sin\vartheta + \cos\vartheta \tan\beta)}.$$ Ferner findet man

$$t\pi = \frac{(h-k)\sin T\Omega p}{\sin(180 - \xi + T\Omega p)} = \frac{(h-k)\sin T\Omega p}{\sin(\xi - T\Omega p)},$$

oder $$t\pi = \frac{(h-k)\tan T\Omega p}{\sin\xi - \cos\xi \tan T\Omega p},$$

und $$\tan T\Omega p = \frac{\varrho\cos\lambda}{h + \varrho\sin\lambda},$$ alſo

$$t\pi = \frac{(h-k)\varrho\cos\lambda}{h\sin\xi + \varrho(\sin\lambda\sin\xi - \cos\lambda\cos\xi)},$$

oder auch $$t\pi = \frac{(h-k)\varrho\cos\lambda}{h\sin\xi - \varrho\cos(\xi+\lambda)}.$$

Eben ſo wird $$tk = \frac{(h-k)\sin T\Omega q}{\sin(\xi + T\Omega q)}$$ oder

$$tk = \frac{(h-k)\tan T\Omega q}{\sin\xi + \cos\xi \tan T\Omega q}$$ gefunden,

und $$\tan T\Omega q = \frac{\varrho\cos\lambda}{h - \varrho\sin\lambda},$$ mithin

$$tk = \frac{(h-k)\varrho\cos\lambda}{h\sin\xi - \varrho(\sin\lambda\sin\xi - \cos\lambda\cos\xi)},$$

oder $$tk = \frac{(h-k)\varrho\cos\lambda}{h\sin\xi + \varrho\cos(\xi+\lambda)}.$$

6.) Wenn die Tafel dem Mittelpunct der Kugel ſo nahe liegt, daß ſie die Kugel ſchneiden kann, und man will dieſen Kugelſchnitt auf der Tafel ebenfalls

zeichnen, ſo muß man noch ſeinen Mittelpunct und Halbmeſſer ſuchen. Der Mittelpunct liegt da, wohin eine grade Linie aus der Kugel Mittelpunct auf die Tafel ſenkrecht gezogen die Tafel trift, und um ihn zu finden, muß man auf tW von t nach W eine Linie $= k \operatorname{coſ} \xi$ nehmen, durch ihren Endpunct aber auf tW eine Linie $= k \operatorname{ſin} \xi \operatorname{coſ} \varphi$ ſenkrecht ſetzen. Weil nun der Abſtand des Mittelpuncts der Kugel von der Tafel $= k \operatorname{ſin} \xi \operatorname{ſin} \varphi$ iſt, ſo wird der Halbmeſſer des Schnitts der Kugel mit der Tafel $= \sqrt{(\varrho^2 - k^2 \operatorname{ſin} \xi^2 \operatorname{ſin} \varphi^2)}$.

8.) Die Projection iſt eine Ellipſe, ſo lange $b^2 > r^2$ iſt, mithin erfordert dieſe Bedingung, daß $h \operatorname{ſin} \xi - \varrho \operatorname{ſin} \varepsilon \operatorname{coſ}(\xi + \lambda) > \varrho \operatorname{coſ} \varepsilon \sqrt{(\operatorname{coſec} \varphi^2 - \operatorname{coſ}(\xi + \lambda)^2)}$, oder $h > \varrho \operatorname{coſec} \xi (\operatorname{ſin} \varepsilon \operatorname{coſ}(\xi + \lambda) + \operatorname{coſ} \varepsilon \sqrt{(} \operatorname{coſec} \varphi^2 - \operatorname{coſ}(\xi + \lambda)^2)$. Wenn beyde Werthe gleich groß ſind, ſo iſt die Projection eine Parabel; iſt aber h kleiner als der gefundene Ausdruck, ſo wird die Projection eine Hyperbel. Von k hängt es nicht ab, ob die Projection eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel wird, welches auch daher erhellet, weil die Lage der Tafel ſich nicht ändert, wenn k allein Aenderungen leidet. Man vergleiche den 257. §.

8.) Im Dreyeck ΩCT hat man auch $\Omega C = c = \frac{h \operatorname{coſ} \lambda}{\operatorname{coſ} \beta}$, und wenn dieſer Werth in den Formuln des 265. §. gebraucht wird, ſo hat man

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\varrho \operatorname{ſin} \varepsilon + k \operatorname{ſin} \lambda}{h \operatorname{coſ} \lambda}$$

$c =$

$$c = \frac{h \operatorname{coſ}\lambda}{\operatorname{coſ}\beta}$$

$$\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\beta \operatorname{ſec}\eta \operatorname{coſec}\psi$$

$$L = h \operatorname{coſ}\lambda \operatorname{tang}\beta \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta$$

$$b = h \operatorname{coſ}\lambda (\operatorname{tang}\beta \cot\psi + \operatorname{ſin}\eta).$$

Uebrigens bleibt $r = \varrho \operatorname{coſ}\varepsilon$, und $\varepsilon = \varrho(\operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{coſ}\vartheta + k \operatorname{ſin}\xi) \operatorname{coſec}\vartheta$, ſo wie $\delta = e \operatorname{ſin}\eta$. Dieſe Formuln können in beſondern Fällen noch kürzer und bequemer als die vorhin angezeigten gebraucht werden: wie ſie denn vornemlich in dem Fall der orthographiſchen Projection ihre Dienſte leiſten, wenn h unendlich groß iſt. Die drey letzten verwandeln ſich in folgende

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{(\varrho \operatorname{ſin}\varepsilon + h \operatorname{ſin}\lambda) \operatorname{ſec}\varphi}{h \operatorname{coſ}\lambda},$$

$$L = \frac{h \operatorname{coſ}\lambda \operatorname{tang}\beta \operatorname{coſec}\zeta}{\sqrt{(1 - \operatorname{coſ}(\xi+\lambda)^2 \operatorname{ſin}\varphi^2)}}$$

$$b = \frac{h \operatorname{coſ}\lambda (\operatorname{ſin}\varphi \operatorname{ſin}(\xi+\lambda) - \operatorname{tang}\beta \operatorname{coſ}(\xi+\lambda) \operatorname{ſin}\varphi}{\sqrt{(1 - \operatorname{coſ}(\xi+\lambda)^2 \operatorname{ſin}\varphi^2)}};$$

und wenn der Werth von $\operatorname{tang}\beta$ in den beyden letzten Formuln gebraucht wird, ſo findet man eben diejenigen, welche im n. 3. für L und b ſchon ſind angezeigt worden.

372. §.

Die Umſtände zu finden, unter welchen die Projection des Kugelſchnitts ein Kreis wird.

Aufl. 1.) Hiezu wird zweyerley erfordert: einmahl daß $\zeta = 90°$, und fürs zweyte, daß $b^2 - r^2 = L^2$ ſey. Demnach wird erfordert, daß $\tang \zeta = \infty$, mithin $\sec \varphi = \infty$, und $\varphi = 90°$ ſey, es müſte denn $\lambda = 90°$ ſeyn, da dann auch $\beta = 90°$ und der optiſche Kegel ein grader Kegel wäre. Wird alſo dieſer letzte Fall noch beyſeit geſetzt, ſo muß $\varphi = 90°$ ſeyn, das heiſt, die Tafel muß die Ebene durchs Auge und die Axe des abzubildenden Kugelſchnitts, oder die Neigungsebene der Axe des optiſchen Kegels, ſenkrecht ſchneiden, welches dem 289. §. n. 3. gemäß iſt. Dieſe Bedingung giebt alſo $\sin \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$, und es wird

$$b = \frac{h \sin \xi - \varrho \sin \varepsilon \cos(\xi + \lambda)}{\sin(\xi + \lambda)},$$

$$L = \frac{\varrho \sin \varepsilon + h \sin \lambda}{\sin(\xi + \lambda)}.$$ Weil nun $\tang \eta = \sin \vartheta \tang \varphi$ und $\cos \psi = \cos \vartheta \sin \varphi$ iſt, ſo wird auch $\eta = 90°$, und $\psi = \vartheta$, wie der Natur der Sache gemäß iſt, die Linien Fc' und Wc' fallen nun zuſammen, und
115F. Wc' iſt mit der Linie des Auges einerley. Es war aber $\vartheta = 180° - (\xi + \lambda)$, alſo iſt auch nun $\psi = 180° - (\xi + \lambda)$, und man erhält $b =$

$$\frac{h \sin \xi + \varrho \sin \varepsilon \cos \psi}{\sin \psi} = h \sin \xi \operatorname{cosec} \psi + \varrho \sin \varepsilon \cot \psi,$$

$$L = \frac{\varrho \sin \varepsilon + h \sin \lambda}{\sin \psi}, \quad \text{oder}$$

$$L = \frac{\varrho \sin \varepsilon + h \sin(\xi + \psi)}{\sin \psi} = \varrho \sin \varepsilon \operatorname{cosec} \psi + h (\sin \xi$$

$\cot \psi + \cos \xi)$. Dieſemnach erfordert die zweyte

Be-

Bedingung, daß $(h\sin\xi\,\mathrm{cosec}\,\psi + \varrho\sin\varepsilon\cot\psi)^2 - \varrho^2\cos\varepsilon^2 = (h\sin\xi\cot\psi + \varrho\sin\varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\psi + h\cos\xi)^2$ ſey. Daraus folgt $h^2\sin\xi^2\,\mathrm{cosec}\,\psi^2 + \varrho^2\sin\varepsilon^2\cot\psi^2 - \varrho^2\cos\varepsilon^2 = h^2\sin\xi^2\cot\psi^2 + \varrho^2\sin\varepsilon^2\,\mathrm{cosec}\,\psi^2 + 2h\cos\xi(h\sin\xi\cot\psi + \varrho\sin\varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\psi) + h^2\cos\xi^2$; und wenn man bemerkt, daß $\mathrm{cosec}\,\psi^2 - \cot\psi^2 = 1 = \sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2$ wird, ſo findet man $h^2\sin\xi^2 = \varrho^2 + 2h\cos\xi(h\sin\xi\cot\psi + \varrho\sin\varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\psi) + h^2\cos\xi^2$, oder $\varrho^2 + h^2\cos 2\xi + h^2\cot\psi\sin 2\xi + 2h\varrho\cos\xi\sin\varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\psi = 0$.

2.) Wenn nun ε und λ für die Lage des Auges gegeben ſind, ſo iſt es einerley, ob man für die Lage der Tafel ξ oder ψ als gegeben annimmt, weil $\psi + \xi + \lambda = 180°$ iſt. Um alſo zu finden, wie ξ und h von einander abhängen müſſen, wenn ε und λ gegeben ſind, multiplicire man die gefundene Gleichung mit $\sin\psi$, und ſchreibe $\cos\xi^2 - \sin\xi^2 = 1 - 2\sin\xi^2$ ſtatt $\cos 2\xi$, $2\sin\xi\cos\xi$ ſtatt $\sin 2\xi$, ſo wird $(\varrho^2 + h^2)\sin\psi + 2h^2\sin\xi(\cos\psi\cos\xi - \sin\psi\sin\xi) + 2h\varrho\cos\xi\sin\varepsilon = 0$; und weil $\cos\psi\cos\xi - \sin\psi\sin\xi = \cos(\psi + \xi) = -\cos\lambda$, ſo wie $\psi = 180° - (\xi + \lambda)$, ſo findet man $(\varrho^2 + h^2)\sin(\xi + \lambda) - 2h^2\sin\xi\cos\lambda + 2h\varrho\cos\xi\sin\varepsilon = 0$. Dies durch $\cos\xi$ dividirt giebt $(\varrho^2 + h^2)(\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda + \sin\lambda) - 2h^2\,\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon = 0$, oder $\varrho^2\,\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda + (\varrho^2 + h^2)\sin\lambda - h^2\,\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon = 0$, mithin $(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda\,.\,\mathrm{tang}\,\xi = (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon$, und man findet

$$\mathrm{tang}\,\xi = \frac{(h^2 + \varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon}{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda}.$$

Umgekehrt hat man $(\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda - \sin\lambda)h^2 - 2\varrho\sin\varepsilon\,.\,h = \varrho^2(\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda + \sin\lambda)$, oder $h^2 - \dfrac{2\varrho\sin\varepsilon}{\mathrm{tang}\,\xi\cos\lambda - \sin\lambda}\,.\,h =$

$$= \frac{\varrho^2 (\mathrm{tang}\,\xi \cos\lambda + \sin\lambda)}{\mathrm{tang}\,\xi \cos\lambda - \sin\lambda},$$ oder auch

$$h^2 - \frac{2\varrho \sin\varepsilon \cos\xi}{\sin(\xi - \lambda)} \cdot h = \frac{\varrho^2 \sin(\xi + \lambda)}{\sin(\xi - \lambda)};$$

mithin $h =$

$$\frac{\varrho(\sin\varepsilon \cos\xi \pm \surd(\sin\varepsilon^2 \cos\xi^2 + \sin(\xi+\lambda)\sin(\xi-\lambda)))}{\sin(\xi-\lambda)}.$$

Demnach giebt es für jede Lage und Entfernnng des Auges nur eine Lage der Tafel, bey der die Projection ein Kreis werden kann. Wenn aber die Lage des Auges und der Tafel beſtimmt iſt, ſo giebt es in derjenigen Axe der Kugel, worin das Auge ſtehen ſoll, zwey Stellen, aus welchen der Kugelſchnitt kreisförmig erſcheint, wiewohl von dieſen beyden Stellen doch nur die eine vor, die andre hinter der Tafel liegt.

3.) Will man ſuchen, wie h und ψ von einander abhängen müſſen, ſo darf man nur erwägen, daß $\psi = 180° - (\xi + \lambda)$, mithin $\mathrm{tang}\,\psi = - \mathrm{tang}(\xi + \lambda)$ ſey. Dieſemnach wird $\mathrm{tang}\,\psi = \frac{\mathrm{tang}\,\xi + \mathrm{tang}\,\lambda}{\mathrm{tang}\,\xi\, \mathrm{tang}\,\lambda - 1}$, (455. §. Geom.) und man findet

$$\mathrm{tang}\,\xi + \mathrm{tang}\,\lambda = \frac{(h^2 + \varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon}{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda}$$

$$+ \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{2h^2 \sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon}{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda},$$ ſo wie

$$\mathrm{tang}\,\xi\, \mathrm{tang}\,\lambda - 1 = \frac{(h^2 + \varrho^2)\sin\lambda^2 + 2h\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda}{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda^2} - 1$$

=

$$= \frac{\varrho^2 - h^2 \operatorname{coſ} 2\lambda + 2h\varrho \operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{ſin}\lambda}{(h^2 - \varrho^2) \operatorname{coſ}\lambda^2}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{h^2 \operatorname{ſin} 2\lambda + 2h\varrho \operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{coſ}\lambda}{\varrho^2 - h^2 \operatorname{coſ} 2\lambda + 2h\varrho \operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{ſin}\lambda}.$$

4.) Eben das hätte man auch auf folgende Art gefunden. Man weis, daß kein andrer Schnitt des ſchiefen Kegels, als allein die ſectio ſubcontraria einen Kreis geben könne, wenn der mit der Grundfläche parallele Schnitt beyſeit geſetzt wird. (289. §. n. 3.) Alsdenn aber muß η oder $\varphi = 90°$ ſeyn, und überdem $\operatorname{tang}\psi = \frac{c^2 \operatorname{ſin} 2\beta}{r^2 - c^2 \operatorname{coſ} 2\beta}$.

Hier iſt nun $c = \frac{h \operatorname{coſ}\lambda}{\operatorname{coſ}\beta}$ und

$\operatorname{tang}\beta = \frac{\varrho \operatorname{ſin}\varepsilon + h \operatorname{ſin}\lambda}{h \operatorname{coſ}\lambda}$, woraus vorläufig erhellet, wenn $\varepsilon = 0$, mithin der abzubildende Kugelſchnitt ein gröſter Kreis iſt, daß $\beta = \lambda$, und folglich $c = h$ werde, wie der Natur der Sache gemäß iſt. Alsdenn aber verwandelt ſich die n. 3. gefundene Gleichung in $\operatorname{tang}\psi = \frac{h^2 \operatorname{ſin} 2\lambda}{\varrho^2 - h^2 \operatorname{coſ} 2\lambda}$, wie der Natur der ſectionis ſubcontrariæ gemäß iſt. Ueberhaupt aber hat man $\operatorname{tang}\psi =$

$\frac{2c^2 \operatorname{ſin}\beta \operatorname{coſ}\beta}{\varrho^2 \operatorname{coſ}\varepsilon^2 - c^2 . \operatorname{coſ}\beta^2 + c^2 \operatorname{ſin}\beta^2}$, und

$c . \operatorname{coſ}\beta = h \operatorname{coſ}\lambda$, ſo wie $c . \operatorname{coſ}\beta \operatorname{tang}\beta = c \operatorname{ſin}\beta = \varrho \operatorname{ſin}\varepsilon + h \operatorname{ſin}\lambda$; mithin wird

 tangψ=

$$\text{tang}\,\psi = \frac{2h\cos\lambda\,(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)}{\varrho^2 - h^2\cos\lambda^2 + h^2\sin\lambda^2 + 2h\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda},$$

$$\text{oder tang}\,\psi = \frac{h^2\sin 2\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon\cos\lambda}{\varrho^2 - h^2\cos 2\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda},$$

wie vorhin.

5.) Der gleich anfangs erwehnte Fall, wenn $\lambda = 90°$ wäre, mithin das Auge in der Axe des abzubildenden Kugelſchnitts ſtünde, giebt tang $\psi = 0$, und tang $\xi = \infty$, mithin $\psi = 0$, und $\xi = 90°$, das heiſt, die Projection wird kein Kreis, wofern nicht die Tafel mit dem Kugelſchnitt parallel iſt. In dieſem Fall verwandelt ſich nemlich der optiſche Kegel in einem graden Kegel, und aus dem 289. §. n. 1. weis man ſchon, daß kein Schnitt des graden Kegels ein Kreis werden könne, wofern derſelbe nicht mit der Grundfläche parallel iſt.

6.) In allen Fällen muß nun der Halbmeſſer der Projection, wenn ſie ein Kreis wird, $= \frac{r(b-\delta)}{L}$ ſeyn (371. §. n. 3.) weil $b^2 - r^2 = L^2$ iſt: und weil $\varphi = 90°$, ſo hat man

$$b = \frac{h\sin\xi - \varrho\sin\varepsilon\cos(\xi+\lambda)}{\sin(\xi+\lambda)}$$

$$\delta = \frac{k\sin\xi - \varrho\sin\varepsilon\cos(\xi+\lambda)}{\sin(\xi+\lambda)}, \quad \text{alſo}$$

$$b - \delta\,\frac{(h-k)\sin\xi}{\sin(\xi+\lambda)}, \quad \text{und } L = \frac{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda}{\sin(\xi+\lambda)},$$

mit-

mithin der Halbmeſſer der Projection $\frac{r(b-\delta)}{L}$

$$= \frac{\varrho(h-k)\operatorname{coſ}\varepsilon \operatorname{ſin}\xi}{\varrho \operatorname{ſin}\varepsilon + h \operatorname{ſin}\lambda}.$$

373. §.

Diejenige Lage der Tafel gegen die durch den Mittelpunct der Kugel laufende Geſichtsaxe, und die Entfernung des Auges zu finden, welche erfordert werden, wenn die Projectionen aller Schnitte derſelben Kugel auf der Tafel kreisförmig werden ſollen.

Aufl. 1.) Die erſtè hiezu erforderliche Bedingung iſt, daß die Tafel auf jeder von allen den 115 F.
Ebenen ſenkrecht ſey, die man durch die Geſichtsaxe TΩ und die Axe eines jeden Kugelſchnitts legen kann, der letzte habe eine Lage, welche er wolle. Wenn nemlich unter den zur Axe pq gehörigen Kugelſchnitten nur einer ſeyn ſoll, deſſen Projection kreisförmig iſt, ſo muß die Tafel auf der Ebene Ω Tq ſenkrecht ſeyn. Zu einem andern Kugelſchnitt gehöre die Axe Tr, die nicht mit pq in einerley Ebene liegt, ſo muß auch die Ebene ΩTr, mithin beyder Ebenen ΩTq, ΩFr, Durchſchnittslinie TΩ auf der Tafel ſenkrecht, und B′tT = 90° ſeyn. Demnach frägt es ſich, wenn B′tT = ξ = 90° angenommen wird, ob es alsdenn eine Stelle für das Auge in TΩ gebe, welche die Eigenſchaft hat, daß alle Kugelſchnitte, deren Axen mit TΩ in einerley Ebene liegen, aus dieſer Stelle geſehen auf der Tafel ein kreisförmiges Bild haben? Im 372. §. n. 2.

 wird

wird gefunden, daß $h = \frac{\varrho(\sin\varepsilon \cos\xi \pm \sqrt{(\sin\varepsilon^2 \cos\xi^2 + \sin(\xi+\lambda)\sin(\xi-\lambda)}}{\sin\xi(-\lambda)}$ ſeyn müſſe, wenn ein Kugelſchnitt, deſſen Abſtand vom Aequator $= \varepsilon$, und deſſen Neigung gegen die Tafel $= \psi = 180° - (\xi + \lambda)$ iſt, ein kreisförmiges Bild haben ſoll: und deswegen giebt es auf jeder Seite der Tafel nur eine Stelle für das Auge, aus welcher das Bild des Kugelſchnitts kreisförmig erſcheint. Wenn aber $\xi = 90°$ angenommen wird, ſo giebt dieſe Gleichung $h = \pm \varrho$, und dieſer Werth der Entfernung h hängt von ε und λ nun gar nicht ab. Wenn alſo das Auge in O ſteht, und OT von der Tafel ſenkrecht geſchnitten wird, ſo mag die Axe pq in der Ebene Opq eine Lage haben, welche man will, und der Kugelſchnitt AMEN vom Aequator ſo weit man will entfernt ſeyn, er wird doch allemahl ein kreisförmiges Bild haben. Aber eben darum, weil $\xi = 90°$, mithin OT auf der Tafel ſenkrecht angenommen iſt, wird auch jede andre Ebene, wie OTr auf der Tafel ſenkrecht ſeyn; (315. §. G.) deswegen werden alle Kugelſchnitte, deren Axen in jeder andern Ebene wie OTr liegen, ebenfalls ein kreisförmiges Bild haben, und die gefundenen Werthe $\xi = 90°$ und $h = \varrho$ leiſten der Bedingung der Aufgabe in ihrem ganzen Umfang genüge.

2.) Es giebt auch keine andre Werthe von ξ und h, welche die Bedingung der Aufgabe im ganzen Umfang erfüllen können. Denn nur alsdenn, wenn

$$\text{tang}\,\xi = \frac{(h^2 + \varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon}{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda}, \text{ oder } (h^2 - \varrho^2)$$

$\cos\lambda \sin\xi = (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda\cos\xi + 2h\varrho\sin\varepsilon\cos\xi$ iſt, wird

wird das Bild des Kugelſchnitts, deſſen Lage ε und λ beſtimmen, ein Kreis: und die Bedingung der Aufgabe iſt, man ſoll für h und ξ ſolche Werthe finden, die nicht allein dieſer Gleichung ein Genüge leiſten, ſondern überdem auch unverändert bleiben, man mag ſtatt ε und λ was man will annehmen. Dieſemnach ſetze man ſtatt ε und λ ein Paar willkührliche Werthe, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen h, ξ, und bekannten Gröſſen. Man ſetze nochmahl ſtatt ε und λ ein Paar andre Werthe, ſo findet man noch eine Gleichung zwiſchen h, ξ, und bekannten Gröſſen. Weil nun h und ξ immer einerley Werth behalten ſollen, ſo müſſen h und ξ in beyden gefundenen Gleichungen einerley Werthe haben, und man kann dieſe aus beyden erwehnten Gleichungen finden.

3.) Es ſey alſo zuerſt $\varepsilon = 0$, $\lambda = 45°$; ſo iſt $\sin\varepsilon = 0$, und $\sin\lambda = \cos\lambda$, mithin $(h^2 - \varrho^2)\sin\xi = (h^2 + \varrho^2)\cos\xi$. Ferner ſey $\lambda = 0$, $\varepsilon = 30°$, ſo erhält man $(h^2 - \varrho^2)\sin\xi = h\varrho\cos\xi$. Die letzte Gleichung von der erſten abgezogen giebt $(h^2 + \varrho^2)\cos\xi - h\varrho\cos\xi = 0$, mithin entweder $\cos\xi = 0$, oder $h^2 + \varrho^2 - h\varrho = 0$. Die letzte Vorausſetzung giebt $h^2 - \varrho . h = -\varrho^2$, alſo $h = \frac{1}{2}\varrho \pm \varrho\sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\varrho (1 \pm \sqrt{-3})$, und die erſte Gleichung würde

$$\tang\xi = \frac{h\varrho}{h^2 - \varrho^2}$$ geben: weil aber beyde Werthe von h unmöglich ſind, ſo wäre auch $\tang\xi$ unmöglich; mithin kann mit den angenommenen Bedingungen keine andre, als die Vorausſetzung $\cos\xi = 0$ beſtehen, dieſe giebt $\xi = 90°$, und $h = \pm\varrho$.

4.) Aus dem 325 §. weis man, daß dies die beyden Beſtimmungen der ſtereographiſchen Projection ſind, und im 328. §. iſt ſchon bewieſen, daß bey der ſtereographiſchen Projectionsart die Bilder aller Kugelſchnitte kreisförmig werden. Hiemit iſt nun auch umgekehrt bewieſen: jede Projectionsart, wobey die Bilder aller Schnitte von einerley Kugel kreisförmig werden ſollen, muß ſtereographiſch ſeyn. Mithin hat die ſtereographiſche Projectionsart allein, mit Ausſchlieſſung aller übrigen Arten, die Eigenſchaft, daß die Bilder aller Schnitte der Kugel Kreiſe werden.

5.) Soll es aber ſowohl mit dem Satz des 328. §. als auch mit dem umgekehrten eben erwehnten Satz ſeine allgemeine Richtigkeit haben; ſo iſt es nicht genug, wenn von der ſtereographiſchen Projection die Erklärung gegeben wird, es ſey diejenige, wobey man annimmt, das Auge ſtehe in der Oberfläche der Kugel: es gehört vielmehr mit in die Erklärung, daß die Tafel auf derjenigen Axe der Kugel, die durchs Auge geht, ſenkrecht ſey. Alle mir bekannte ältere oben im 325. §. ſchon genannte Schriftſteller nehmen auch nicht allein jene, ſondern zugleich dieſe Bedingung zum Grunde. Wenn demnach Hr. Hofr. Käſtner in der Abhandlung: Theoria projectionis ſtereographicæ horizontalis §. 166. beſonders num. II. III. VII. (Diſſertatt. Mathem. & Phyſ. Altenb. 1771. pag. 141. 142.) ſo allgemein redet, als wenn die Projection eines Kugelſchnitts, wenn das Auge in der Kugel Oberfläche ſteht, bey jeder angenommenen Lage der Tafel ein Kreis werde; ſo bedürfen dieſe Sätze der erwehn-

wehnten Einſchränkung, die auch würklich a. a. O. Prop. XI. bey Auflöſung der dortigen Aufgabe zum Grunde liegt. M. ſ. daſelbſt den 132. und 141. §.

Der XXVI. Abſchnitt.

Vergleichung dieſer Lehren mit des Hn. Haſe Theorie der Kugelprojectionen.

374. §.

Herr Haſe in ſeiner oben (326. §.) angeführten Abhandlung: Sciagraphia methodi &c. giebt daſelbſt im 10. bis 23. §. eine Methode an, beyde im vor. §. erwehnte Sätze zu beweiſen, die zwar weit umſtändlicher iſt, als die hier gelehrte, aber doch ſo ſinnreich, daß ich nicht umhin kann, zur Erläuterung des Haſiſchen Vortrags hier einiges beyzufügen. So viel ich weis, iſt der Tractat, wovon Hr. Haſe in der angeführten Abhandlung einen Abriß liefert, nie gedruckt worden: indeſſen würde es nicht ſchwer ſeyn, die Beweiſe aller Sätze, mit den Auflöſungen aller Aufgaben, die Herr Haſe anführt, aus den hier gelehrten Gründen herzuleiten, und ſo den ganzen Tractat herzuſtellen: wiewohl ſich der gan-

ganze Vortrag weit mehr ins kurze würde ziehen laſſen. Folgende Betrachtungen ſind es, womit Herr Haſe ſeine Abhandlung anfängt.

125F. In der 125ſten F. ſey OAE die Neigungsebene der Axe des Geſichtskegels gegen die Grundfläche, als den abzubildenden Kugelſchnitt, T der Mittelpunct der Kugel, DABE ein gröſter Kreis von ihr in der Ebene OAE, C der Mittelpunct, pq die Axe und AE der in der Ebene OAE liegende Durchmeſſer des abzubildenden Kugelſchnitts. Weil nun keine andre, als die ſectio coni ſubcontraria einen Kreis giebt, und dieſem zu Folge die Tafel auf der Ebene OAE oder OCq ſenkrecht ſeyn muß, ſo ſey Bb die Durchſchnittslinie entweder der auf der Ebene OAE ſenkrechten Tafel ſelbſt, oder doch einer durch den Mittelpunct der Kugel mit ihr parallel gelegten Ebene, mit der Ebene OAE; alsdenn iſt nach den bisherigen Bezeichnungen EFb = AFB = ψ, ACO = β. Damit nun der Schnitt des Kegels mit der Ebene Bb, oder einer ihr parallelen, ein Kreis werde, wird überdem erfordert, daß CO = c, von ACO = β ſo abhänge, wie CO von ACO abhängt, wenn O in einer gleichſeitigen Hyperbel liegt, der die Gleichung

$$cc = \frac{r^2 \sin 2\omega}{\sin 2(\omega + \beta)} \text{ zugehört,}$$

$\omega = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}EFb$ = $\frac{1}{2}$AFB angenommen. (289. §. n. 4.) Wenn man $\beta = -$ACH $= -\frac{1}{2}\psi = -\omega$ ſetzt, ſo giebt die Gleichung c unendlich groß, mithin iſt CH die eine Aſymtote der Hyperbel, und die andre CG ſteht auf ihr ſenkrecht, wie auch dieſelbe Gleichung ergiebt, wenn man β = ACG = $90° - \omega$ ſetzt. Wird β = ACK = $45° - \omega$ angenommen, ſo

wird

wird $e = CK = r\sqrt{\sin 2\omega} = r\sqrt{\sin\psi}$, und CK iſt die halbe Hauptaxe der Hyperbel.

Weil dieſe Hyperbel mit dem Kreiſe DABE in einerley Ebene liegt, ſo können beyde krummen Linien einander ſchneiden, und wenn die Lage der Mittelpuncte beyder krummer Linien gegen einander bekannt iſt, ſo wie die einer jeden zugehörige Gleichung, ſo kann man alle Durchſchnittspuncte beyder Linien finden, welches alſo folgende Aufgabe veranlaſſet.

375. §.

Es ſind C und T die Mittelpuncte einer gleichſeitigen Hyperbel und eines Kreiſes, die (125 F.) beyde in einerley Ebene liegen, und für jede dieſer Linien hat man eine Gleichung; die Frage iſt: ob und in wie vielen Puncten beyde krumme Linien einander ſchneiden.

Aufl. Man ziehe die Mittelpuncte mit der graden Linie CT zuſammen, und durch C einen halben Durchmeſſer CA der Hyperbel auf CT ſenkrecht. Hat man nun eine Gleichung zwiſchen einen unbeſtimmten halben Durchmeſſer der Hyperbel, wie CO, und dem veränderlichen Winkel KCO, ſo kann man dieſe Gleichung allemahl ſo verändern, daß die veränderlichen Winkel von dem halben Durchmeſſer CA anfangen, (288. §.) damit man eine Gleichung zwiſchen $OC = c$, und den Winkel $ACO = \beta$ erhalte. Weil nun CT ein Durchmeſſer des Kreiſes iſt, ſo kann man leicht auch für den Kreis eine Gleichung ſuchen zwiſchen dem veränderlichen Winkel ACD, und dem unbeſtimmten Abſtand $CD = z$ eines jeden

Puncts

Puncts der Peripherie von C. Da wo nun die Durchſchnittspuncte, wie z. E. D, hinfallen wird für einerley veränderlichen Winkel = ACD aus beyden Gleichungen $z = c$ folgen müſſen. Hat man alſo beyde erwehnte Gleichungen, ſo nehme man $c = z$ an, und ſchaffe aus ihnen die veränderliche Entfernung c oder z weg, ſo giebt ſich eine beſtimmte Gleichung, woraus diejenigen Werthe des Winkels β gefunden werden können, den die Durchſchnittspuncte zugehören.

Um dieſe Auflöſung gleich auf den Fall des vor. §. anzuwenden, ſetze man, aus einem unbeſtimmten Punct D der Peripherie des Kreiſes ſey DR auf CT oder pq ſenkrecht gezogen, und TR $= x$, RD $= \varphi$, der Kugel Halbmeſſer Tp = T$q = \varrho$, ſo iſt für den Kreis $yy = \varrho\varrho - xx$. Ferner ſey der Abſtand des Kugelſchnitts AE von dem dazu gehörigen Aequator $= \varepsilon$, ſo iſt TC $= \varrho \sin\varepsilon$, und wenn CR $= t$ geſetzt wird, ſo iſt TR $= x = t - \varrho \sin\varepsilon$, mithin $yy = \varrho\varrho - tt + 2t\varrho \sin\varepsilon - \varrho^2 \sin\varepsilon^2$, oder $yy = \varrho^2 \cos\varepsilon^2 + 2t\varrho \sin\varepsilon - t^2$. Ueberdem bleibe der unbeſtimmte Winkel ACD $= \beta$, und für den Kreis ſey CD $= z$, ſo iſt $y = z\cos\beta$, $t = z\sin\beta$, mithin $zz\cos\beta^2 = \varrho^2 \cos\varepsilon^2 + 2\varrho z \sin\varepsilon \sin\beta - zz \sin\beta^2$, oder $zz = \varrho^2 \cos\varepsilon^2 + 2\varrho z \sin\varepsilon \sin\beta$. Für die Hyperbel war $cc . \sin 2(\omega + \beta) = r^2 \sin 2\omega$; alſo nehme man hier $c = z$ an, und ſubſtituire den Werth von zz aus der Gleichung des Kreiſes, ſo giebt ſich $r^2 \sin 2\omega = \varrho \cos\varepsilon^2 \sin 2 (\omega + \beta) + 2\varrho z \sin\varepsilon \sin\beta \sin 2 (\omega + \beta)$,

$$\text{mithin } z = \frac{r^2 \sin 2\omega - \varrho^2 \cos\varepsilon^2 \sin 2 (\omega + \beta)}{2\varrho \sin\varepsilon \sin\beta \sin 2 (\omega + \beta)},$$

und das Quadrat hievon wiederum $= cc$ geſetzt giebt

$$\varrho^2 \sin 2\omega = \frac{(r^2 \sin 2\omega - \varrho^2 \cos\varepsilon^2 \sin 2(\omega+\beta))^2}{4\varrho^2 \sin\varepsilon^2 \sin\beta^2 \sin 2(\omega+\beta)}.$$

Weil nun $\varrho \cos\varepsilon = r$ iſt, ſo giebt dieſe Gleichung $4 \sin\varepsilon^2 \sin\beta^2 \sin 2(\omega+\beta) \sin 2\omega = (\sin 2\omega - \sin 2(\omega+\beta))^2 \cos\varepsilon^2$. Es iſt aber $2\sin\beta^2 = 1 - \cos 2\beta$, (425. §.) und dies ſtatt $2 \sin\beta^2$ geſetzt giebt $2 \sin\varepsilon^2 \sin 2(\omega+\beta) \sin 2\omega - 2 \sin\varepsilon^2 \cos 2\beta \sin 2(\omega+\beta) \sin 2\omega = (\sin 2\omega - \sin 2(\omega+\beta))^2 \cos\varepsilon^2$, und daraus folgt $2 \sin 2(\omega+\beta) \sin 2\omega - 2 \sin\varepsilon^2 \cos 2\beta \sin 2(\omega+\beta) \sin 2\omega = (\sin 2\omega^2 + \sin 2(\omega+\beta)^2) \cos\varepsilon^2$. Um aus dieſer Gleichung β zu finden, ſetze man $2\omega = \psi$, $2\beta = \gamma$, ſo hat man $\sin 2(\omega+\beta) = \sin(\psi+\gamma) = \sin\psi \cos\gamma + \cos\psi \sin\gamma$, und die Gleichung verwandelt ſich in folgende: $2 \sin\psi^2 \cos\gamma + 2 \cos\psi \sin\psi \sin\gamma - 2 \sin\varepsilon^2 \sin\psi^2 \cos\gamma^2 - 2 \sin\varepsilon^2 \cos\psi \sin\psi \cos\gamma \sin\gamma = \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 + \sin\psi^2 \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2 + 2 \sin\psi \cos\gamma \cos\psi \sin\gamma \cos\varepsilon^2 + \cos\psi^2 \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2$, oder $2 \sin\psi^2 \cos\gamma + 2 \cos\psi \sin\psi \sin\gamma - 2 \sin\varepsilon^2 \sin\psi^2 \cos\gamma^2 = 2 \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 - \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 \sin\gamma^2 + \cos\psi^2 \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2 + 2 \sin\psi \cos\psi \sin\gamma \cos\gamma$. Wird im zweyten Gliede hinter dem Gleichheitszeichen noch $1 - \sin\psi^2$ ſtatt $\cos\psi^2$ geſetzt, ſo verwandelt ſich der Ausdruck hinter dem Gleichheitszeichen in $2 \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 - 2 \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 \sin\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2 + 2 \sin\psi \cos\psi \sin\gamma \cos\gamma$, und es iſt $2 \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 - 2 \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 \sin\gamma^2 = 2 \sin\psi^2 \cos\varepsilon^2 \cos\gamma^2$, mithin erhält man $2 \sin\psi^2 \cos\gamma + 2 \cos\psi \sin\psi \sin\gamma = 2 \sin\psi^2 \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\varepsilon^2 + 2 \sin\psi \cos\psi \sin\gamma \cos\gamma$. Es iſt aber $\gamma = 2\beta$ angenommen, alſo $\sin\gamma = 2 \sin\beta \cos\beta$ und $\cos\gamma = \cos\beta^2 - \sin\beta^2 = 1 - 2 \sin\beta^2$, $\cos\gamma^2 = 1 - 4 \sin\beta^2 + 4 \sin\beta^4$, und $\sin\gamma \cos\gamma = 2 \sin\beta \cos\beta - 4 \sin\beta^3 \cos\beta$. Dieſe Werthe in der

Gleichung gebraucht geben $2\sin\psi^2 - 4\sin\psi^2\sin\beta^2 + 4\cos\psi\sin\psi\sin\beta\cos\beta = 2\sin\psi^2 - 8\sin\psi^2\sin\beta^2 + 8\sin\psi^2\sin\beta^4 + 4\sin\beta^2\cos\beta^2\cos\varepsilon^2 + 4\sin\psi\cos\psi\sin\beta\cos\beta - 8\sin\psi\cos\psi\sin\beta^3\cos\beta$. Was ſich auf beyden Seiten aufhebt, laſſe man weg, und dividire hiernächſt durch 4, ſo wird $\sin\psi^2\sin\beta^2 = 2\sin\psi^2\sin\beta^4 + \cos\varepsilon^2\sin\beta^2\cos\beta^2 - 2\sin\psi\cos\psi\sin\beta^3\cos\beta$ gefunden. Noch ſetze man $\sin\psi^2\sin\beta^2 - 2\sin\psi^2\sin\beta^4 = \sin\psi^2\sin\beta^2\cos\beta^2 - \sin\psi^2\sin\beta^4$, und ordne alsdenn alles nach den Potenzen von $\sin\beta$, ſo erhält man $\sin\psi^2 . \sin\beta^4 - 2\sin\psi\cos\psi\cos\beta . \sin\beta^3 + (\cos\varepsilon^2 - \sin\psi^2)\cos\beta^2 . \sin\beta^2 = 0$. Demnach iſt entweder $\sin\beta^2 = 0$, oder $\sin\psi^2 . \sin\beta^2 - 2\sin\psi\cos\psi\cos\beta . \sin\beta + (\cos\varepsilon^2 - \sin\psi^2)\cos\beta^2 = 0$; und der erſten Gleichung thun die Werthe $\beta = 0$, $\beta = 180°$ ein Genüge. Die letzte durch $\sin\psi^2\cos\beta^2$ dividirt giebt $\tang\beta^2 - 2\cot\psi . \tang\beta = \frac{\sin\psi^2 - \cos\varepsilon^2}{\sin\psi^2}$, alſo $\tang\beta = \cot\psi \pm \sqrt{\frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2 - \cos\varepsilon^2}{\sin\psi^2}}$, oder

$$\tang\beta = \frac{\cos\psi \pm \sin\varepsilon}{\sin\psi}.$$

Alle vier gefundene Werthe von β thun der Aufgabe ein Genüge, weil die Hyperbel den Kreis in vier Puncten ſchneidet. Die Gleichung $zz = \varrho^2\cos\varepsilon^2 + 2\varrho z\sin\varepsilon\sin\beta$ giebt $z = \pm\varrho\cos\varepsilon = \pm r$, ſowohl wenn $\beta = 0$, als auch wenn $\beta = 180°$ iſt, und eben das giebt die Gleichung $cc = \frac{r^2\sin 2\omega}{\sin 2(\omega+\beta)}$, weil

weil $\sin(360 + 2\omega) = \sin 2\omega$ iſt: mithin ſind A und E ein Paar Durchſchnittspuncte.

Es ſey auch D ein Durchſchnittspunct, ſo iſt

$$\tan ACD = \frac{\cos\psi + \sin\varepsilon}{\sin\psi} = \cot TCD, \text{ mithin}$$

$$\operatorname{cosec} TCD = \sqrt{\frac{1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2}{\sin\psi^2}},$$

$$\text{und } \sin TCD = \frac{\sin\psi}{\sqrt{(1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}},$$

$$\cos TCD = \frac{\cos\psi + \sin\varepsilon}{\sqrt{(1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}}.$$

Im Dreyeck CTD aber hat man

$$\sin TDC = \frac{CT \sin TCD}{TD} = \sin TCD \sin\varepsilon$$

$$= \frac{\sin\varepsilon\sin\psi}{\sqrt{(1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}}, \quad \text{alſo}$$

$$\cos TDC = \frac{1 + \sin\varepsilon\cos\psi}{\sqrt{(1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}};$$

und weil $\sin CTD = \sin(TCD + TDC) = \sin TCD \cos TDC + \cos TCD \sin TDC$, ſo erhält man $\sin CTD =$

$$\frac{\sin\psi + \sin\varepsilon\sin\psi\cos\psi + (\cos\psi + \sin\varepsilon)\sin\varepsilon\sin\psi}{1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2},$$

das iſt $\sin CTD = \sin\psi$. Eben ſo findet man $\cos CTD = -\cos(TCD + TDC) = \sin TCD \sin TDC - \cos TCD \cos TDC$

$$= \frac{\sin\psi^2 \sin\varepsilon - (\cos\psi + \sin\varepsilon)(1 + \sin\varepsilon\cos\psi)}{1 + 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2},$$

das iſt $\cos CTD = -\cos\psi$; (im Zähler ſetzt man $\sin\psi^2 \sin\varepsilon = (1 - \cos\psi^2)\sin\varepsilon$) mithin iſt $CTD = 180° - \psi$. Aber $BTC = 90° - \psi$, und $BTD = CTD - BTC$, alſo $BTD = 180° - \psi - (90° - \psi)$ das iſt $BTD = 90°$.

Der vierte Durchſchnittspunct der Hyperbel und des Kreiſes ſey Z, ſo iſt die Tangente des erhabenen Winkels $ACZ = \frac{\cos\psi - \sin\varepsilon}{\sin\psi}$, und weil $ECZ = ACZ - 180°$, ſo wird $\tan ECZ = \tan ACZ$

$$= \frac{\cos\psi - \sin\varepsilon}{\sin\psi} = \cot ZCp, \text{ weil } ECp = 90° \text{ iſt.}$$

Das giebt $\sin ZCp = \frac{\sin\psi}{\sqrt{(1 - 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}}$

und $\cos ZCp = \frac{\cos\psi - \sin\varepsilon}{\sqrt{(1 - 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}}$.

Im Dreyeck CTZ aber hat man $\sin TZC = \frac{CT.\sin ZCp}{TZ} = \sin ZCp \sin\varepsilon$

$$= \frac{\sin\psi\sin\varepsilon}{\sqrt{(1 - 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}}, \quad \text{alſo}$$

$$\cos TZC = \frac{1 - \sin\varepsilon\cos\psi}{\sqrt{(1 - 2\sin\varepsilon\cos\psi + \sin\varepsilon^2)}}:$$

weil nun ferner $CTZ = ZCp - TZC$ iſt, ſo findet man $\sin CTZ = \sin ZCp.\cos TZC - \cos ZCp \sin TZC$,

d. i.

d. i. $\sin CTZ =$

$$\frac{\sin\psi(1 - \sin\varepsilon \cos\psi) - (\cos\psi - \sin\varepsilon)\sin\psi \sin\varepsilon}{1 - 2\sin\varepsilon \cos\psi + \sin\varepsilon^2}.$$

Der Zähler wird $= \sin\psi - 2\sin\varepsilon \cos\psi \sin\psi + \sin\varepsilon^2 \sin\psi$, alſo $\sin CTZ = \sin\psi$. Eben ſo wird $\cos CTZ = \cos ZCp \cos TZC + \sin ZCp \sin TZC$ gefunden, oder $\cos CTZ =$

$$\frac{(\cos\psi - \sin\varepsilon)(1 - \sin\varepsilon \cos\psi) + \sin\psi^2 \sin\varepsilon}{1 - 2\sin\varepsilon \cos\psi + \sin\varepsilon^2},$$

und der Zähler iſt $= \cos\psi - 2\sin\varepsilon \cos\psi^2 - \sin\varepsilon^2 \cos\psi$, alſo $\cos CTZ = \cos\psi$, und $CTZ = \psi$. Aber $BTC = 90° - \psi$, folglich $BTZ = BTC + CTZ = 90°$.

So wie demnach zwey Durchſchnittspuncte der Hyperbel und des Kreiſes mit den Endpuncten des Durchmeſſers AE der Grundfläche des Kegels zuſammen fallen, ſo ſind die übrigen beyden mit den Endpuncten derjenigen Axe der Kugel einerley, die auf der Tafel B*b* ſenkrecht ſteht.

367 §.

Wenn bey unveränderter Lage der Tafel die Lage des Kugelſchnitts AE geändert wird, jedoch ſo, daß ſeine Axe *pq* in der Ebene O*pq* bleibt; ſo ändert ſich zwar die Stelle der Puncte A und E, und die dem neuen Kugelſchnitt zugehörige Hyperbel geht ſtatt derſelben durch ein Paar andre Puncte A und E im Umfange des Kreiſes: dagegen bleiben die Durchſchnittspuncte D und Z dieſelben, wie ſich auch die Lage des Kugelſchnitts AE ändert. Wenn man ſich alſo mehrere dergleichen Kugelſchnitte wie AE in

verſchiedenen Lagen gegen die Tafel vorſtellt, ſo ſchneiden alle dazu gehörige Hyperbeln einander in D und Z, und daraus folgt: wenn das Auge in D ſtehet, daß ſich alle Kugelſchnitte, deren Axen in der Ebene Dpq liegen, auf der Tafel kreisförmig abbilden, welches der Satz des 328. §. iſt, und zwar auf die Art bewieſen, wie Herr Haſe in ſeiner Abhandlung verfährt: wiewohl derſelbe viel umſtändlicher iſt, und die verſchiedenen Fälle insgeſammt beſonders betrachtet, wenn der abzubildende Kugelſchnitt ein gröſter oder kleinerer Kreis iſt, und der kleinere Kreis entweder ganz hinter der Tafel liegt, oder von der Tafel berührt, oder von der Tafel geſchnitten wird.

377. §.

125 F. Die Stelle des Auges O iſt zwar noch in der Ebene Dpq gegeben, aber in einem willkührlichen Punct O derſelben, vermittelſt des Winkels bTO $=\xi$, und der Entfernung TO $=h$: man frägt, ob und wie viele von den Kugelſchnitten, deren Axen in der Ebene bTO liegen, kreisförmige Bilder haben können?

Aufl. 1.) Es ſey AE einer von den geſuchten Kugelſchnitten, ſein Abſtand vom Aequator $=\varepsilon$, und die Geſichtsaxe OT ſey gegen dieſen Aequator unter dem Winkel λ geneigt: ſo kann die Projection deſſelben nur alsdenn ein Kreis ſeyn, wenn $\tan g\,\xi = \frac{(h^2+\varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon}{(h^2-\varrho^2)\cos\lambda}$ iſt. (372. §. n. 2.)

Weil nun ξ und h gegeben ſind, ſo kann man λ finden, wenn auch ε als gegeben betrachtet wird, und

man

man erhält $(h^2 - \varrho^2)\tan\zeta\sqrt{(1-\sin\lambda^2)} = (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon$. Daraus folgt $(h^2-\varrho^2)^2 \tan\zeta^2 - (h^2-\varrho^2)^2\tan\zeta^2 . \sin\lambda^2 = (h^2+\varrho^2)^2 \sin\lambda^2 + 4h\varrho(h^2+\varrho^2)\sin\varepsilon . \sin\lambda + 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2$, oder

$$\left.\begin{matrix}(h^2+\varrho^2)^2\\ +(h^2-\varrho^2)^2\tan\zeta^2\end{matrix}\right) . \sin\lambda^2 + 4h\varrho(h^2+\varrho^2)\sin\varepsilon . \sin\lambda = (h^2-\varrho^2)^2\tan\zeta^2 - 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2,$$

und das giebt ferner

$$\sin\lambda^2 + \frac{4h\varrho(h^2+\varrho^2)\sin\varepsilon}{(h^2+\varrho^2)^2 + (h^2-\varrho^2)^2\tan\zeta^2} .$$

$$\sin\lambda = \frac{(h^2-\varrho^2)^2 tg\,\zeta^2 - 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2}{(h^2+\varrho^2)^2 + (h^2-\varrho^2)^2 tg\,\zeta^2} .$$

2.) Frägt man nun, was ein gröſter Kreis für eine Lage haben müſte, wenn derſelbe aus der gegebenen Stelle O geſehen ein kreisförmiges Bild haben ſollte; ſo hat man $\varepsilon = 0$, und die Gleichung giebt

$$\sin\lambda = \pm \frac{(h^2-\varrho^2)\tan\zeta}{\sqrt{((h^2+\varrho^2)^2 + (h^2-\varrho^2)^2\tan\zeta^2)}} :$$

Wenn man nun durch λ den ſpitzen Winkel verſteht, welcher dem poſitiven Sinus zugehört, ſo gehört der gleiche und entgegen geſetzte Sinus zu dem Winkel $\lambda = 180°$. Ob nun gleich der negative Sinus auch zu dem Winkel $-\lambda$ gehören könnte, ſo thut derſelbe doch der Aufgabe kein Genüge, weil man aus der Gleichung für $\tan\zeta$, wenn $\sin\varepsilon = 0$ geſetzt wird, $\tan\lambda = \frac{(h^2-\varrho^2)\tan\zeta}{h^2+\varrho^2}$ durch eine einfache Gleichung findet, und dieſe poſitive Tangente gehört nur zu den Winkeln λ und $\lambda + 180°$, mithin kann eigentlich nur ein einziger gröſter Kreis der Auf-

Aufgabe ein Genüge leiſten, weil beyde in einander fallen.

3.) Wofern aber ein kleinerer Kreis in einem beſtimmten Abſtande vom Aequator gegeben iſt; ſo kann man um abzukürzen $h^2 + \varrho^2 = A$, $h^2 - \varrho^2 = B$ annehmen, und man findet $\sin\lambda =$

$$\frac{-2h\varrho A \sin\varepsilon \pm B \tan\xi \sqrt{(A^2 + B^2 \tan\xi^2 - 4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon^2)}}{A^2 + B^2 \tan\xi^2}.$$

Damit alſo beyde gefundene Werthe von $\sin\lambda$ möglich bleiben, wird erfordert, daß

$\sin\varepsilon < \frac{\sqrt{(A^2 + B^2 \tan\xi^2)}}{2h\varrho}$ ſey; und dies

vorausgeſetzt, giebt es allemahl zwey kleinere Kreiſe von gleichem Durchmeſſer in verſchiedener Lage gegen die Tafel, welche aus der angenommenen Stelle des Auges geſehen ein kreisförmiges Bild haben.

Man kann die allgemeine Gleichung für $\tan\xi$ auch ſo ausdrücken: $(h^2 - \varrho^2)\tan\xi = (h^2 + \varrho^2) \tan\lambda + 2h\varrho \sin\varepsilon \sec\lambda$, und wenn $A = h^2 + \varrho^2$, $B = h^2 - \varrho^2$ bleibt, ſo verwandelt ſie ſich in folgende $(B \tan\xi - A \tan\lambda)^2 = 4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon^2 (1 + \tan\lambda^2)$, woraus man $(A^2 - 4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon)\tan\lambda^2 - 2A.B.\tan\xi.\tan\lambda = 4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon^2 - B^2 tg\xi^2$ erhält, mithin $\tan\lambda =$

$$\frac{A.B.\tan\xi \pm 2h\varrho \sin\varepsilon \sqrt{(A^2 + B^2 \tan\xi^2 - 4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon^2)}}{A^2 - 4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon^2}.$$

Dieſe Gleichung giebt $\tan\lambda = \frac{B \tan\xi}{A}$ für

$\sin\varepsilon = 0$, wie erfordert wird, und beyde Wurzeln blei-

bleiben nur möglich, ſo lange nicht $4h^2\varrho^2 \sin\varepsilon^2 >$ $A^2 + B^2 \tan\xi^2$ iſt, wie auch die Gleichung für $\sin\lambda$ anzeigte.

4.) Noch könnte man fragen, wenn auſſer ξ und h auch die Lage der Axe pq durch λ beſtimmt wäre, wie viele von den zur Axe pq gehörigen Parallelkreiſen der Kugel kreisförmige Bilder haben können? Die Antwort hierauf giebt die Gleichung $\sin\varepsilon = ((h^2 - \varrho^2)\cos\lambda \tan\xi - (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda) : 2h\varrho$, die ſich auch ſo ausdrücken läßt:

$$\sin\varepsilon = \frac{(h^2 - \varrho^2)\sin\xi\cos\lambda - (h^2 + \varrho^2)\cos\xi\sin\lambda}{2h\varrho\cos\xi}$$

$$= \frac{h^2\sin(\xi - \lambda) - \varrho^2\sin(\xi + \lambda)}{2h\varrho\cos\xi}.$$ Demnach

giebt es unter allen zur Axe pq gehörigen Parallelkreiſen nur einen einzigen, deſſen Bild auf der Tafel kreisförmig wird, wenn das Auge in der angenommenen Stelle ſtehet: auch wird hiezu noch erfordert, daß $\frac{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda\tan\xi - (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda}{2h\varrho} < 1$ ſey, weil $\sin\varepsilon$ nicht gröſſer als 1 werden kann. Demnach muß $\tan\xi < \frac{2h\varrho + (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda}{(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda}$ ſeyn, widrigenfalls giebt es unter den zur Axe pq gehörigen Parallelkreiſen gar keinen, deſſen Bild kreisförmig iſt.

378. §.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe leitet ebenfalls auf den Beweis des Satzes im 373. §. n. 4. ſo wie

 ihn

ihn Hr. Haſe a. a. O. im 19=23. §. geführt hat.
125F. Auf eben der Seite der Tafel, wo D liegt, giebt es auſſer D keinen andern Punct, der die Eigenſchaft hätte, daß alle auf der Ebene O*pq* ſenkrechte Kugelſchnitte, die das Auge aus demſelben betrachtet, kreisförmige Bilder haben. Ein ſolcher Punct müſte in allen den Hyperbeln zugleich liegen, welche den Kugelſchnitten zugehören: und alle dieſe Hyperbeln ſchneiden einander in den Puncten D und Z. Gäbe es nun noch einen dritten Durchſchnittspunct für alle dieſe Hyperbeln, ſo könnte derſelbe wenigſtens nicht in der graden Linie DZ liegen, weil ſonſt die grade Linie DZ jede dieſer Hyperbeln in dreyen Puncten ſchnitte, gegen den 64. §. Aber auch auſſer der Linie DZ kann kein ſolcher Punct liegen. Denn man mag die Stelle des Auges wo man will annehmen, ſo lehrt die Auflöſung der Aufgabe des vorigen §., daß nur zwey der Lage nach verſchiedene Kugelſchnitte von einerley Durchmeſſer alsdenn ein kreisförmiges Bild haben können, und daß unter allen zu einerley Axe *pq* gehörigen Kugelſchnitten nur einer ein kreisförmiges Bild habe: mithin hat der Punct D, und auf der andern Seite der Tafel Z, allein die erwehnte Eigenſchaft.

379 §.

Mit der Aufgabe des 377. §. hat ſich Hr. Haſe umſtändlich beſchäftiget, er geht alle hieher gehörige Fälle beſonders durch, deren er überhaupt 32 angiebt, wovon jedoch nur 12 als mögliche Fälle übrig bleiben. Ich werde die vornehmſten davon herſetzen.

1.)

1.) Wenn $h^2 = \varrho^2$ iſt, ſo hat man $B = 0$, mithin $\sin\lambda = - \frac{2h\varrho\sin\varepsilon}{A}$, oder $\sin\lambda = \pm \sin\varepsilon$, weil $h = \pm \varrho$. Eben ſo auch

$$\tang\lambda = \pm \frac{2h\varrho\sin\varepsilon\sqrt{(A^2 - 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2)}}{A^2 - 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2}$$

$= \pm \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \pm \tang\varepsilon$. So wie dies aus den Gleichungen n. 3. im 377. §. fließt, ſo findet man eben daſelbſt n. 4. ebenfalls $\sin\varepsilon = -\sin\lambda$. Und weil der Halbmeſſer der kreisförmigen Projection allemahl $= \frac{\varrho(h-k)\cos\varepsilon\sin\xi}{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda}$ ſeyn muß, (372. §. n. 6.) ſo wird derſelbe in dem Fall $h = \pm \varrho$, und $\sin\lambda = \mp \sin\varepsilon$, unendlich groß. Eigentlich wird alſo die Projection gar kein Kreis, ſondern eine grade Linie, und das iſt der Natur der Sache vollkommen gemäß. Denn zur Vorausſetzung $h = +\varrho$ gehört der Werth $\sin\lambda = -\sin\varepsilon$, das heiſt der Kugelſchnitt AMEN muß durch O gehen: zur Vorausſetzung $h = -\varrho$, wenn das Auge in ε ſtünde, gehört der Werth $\sin\lambda = +\sin\varepsilon$, und das heiſt der Kugelſchnitt muß durch E gehen. In beyden Fällen ſteht das Auge in der Ebene des abzubildenden Kreiſes, mithin iſt die Projection eine grade Linie. Es ergiebt ſich hieraus abermahl die Nothwendigkeit der Erinnerung im 373. §. n. 5. Wenn das Auge in der Oberfläche der Kugel ſteht, und es iſt auch die Tafel auf der Ebene durchs Auge und die Axe eines Kugelſchnitts ſenkrecht, welches die eine nothwendige

Eigenſchaft der ſectionis coni optici ſubcontrariæ iſt; ſo fehlt doch noch die zweyte Eigenſchaft der ſectionis ſubcontrariæ allemahl, wofern nicht zugleich $\xi = 90°$, oder die Tafel auf der Geſichtsaxe durch den Mittelpunct der Kugel ſenkrecht iſt. Werden beyde Vorausſetzungen $h^2 = \varrho^2$ und $\xi = 90°$ angenommen, ſo bleiben im 378. §. n. 3 und 4. $\sin\lambda$, $\tan\!g\lambda$, $\sin\varepsilon$, unbeſtimmt, wie dem 373. §. gemäß iſt, da dann die Projection allemahl kreisförmig, und ihr Halbmeſſer $= \frac{(\varrho - k)\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon + \sin\lambda}$ iſt, oder auch

$$= \frac{(\varrho + k)\cos\varepsilon}{\sin\lambda - \sin\varepsilon},$$ wenn $h = -\varrho$ wäre.

2.) Es ſey nun $A^2 + B^2 \tan\!g\xi^2 = 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2$, ſo hat man im 377. §. n. 2. $\sin\lambda = -\frac{2h\varrho A\sin\varepsilon}{4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2}$

$$= -\frac{h^2 + \varrho^2}{2h\varrho\sin\varepsilon},$$ und $\tan\!g\lambda = \frac{A.B.\tan\!g\xi}{A^2 - 4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2}$

$$= \frac{A\sqrt{(4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2 - A^2)}}{-(4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2 - A^2)},$$ oder

$$\tan\!g\lambda = \frac{-A}{\sqrt{(4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2 - A^2)}}$$

$$= -\frac{h^2 + \varrho^2}{\sqrt{(4h^2\varrho^2\sin\varepsilon^2 - (h^2 + \varrho^2)^2)}},$$ welches

mit dem vorigen Werth überein kommt. Statt zweyer der Lage nach verſchiedener Kugelſchnitte giebt es alſo in dieſem Fall nur einen, welcher der Bedingung der Aufgabe ein Genüge leiſtet. Mit der ange-

genommenen Gleichung iſt eigentlich für ε die willkührliche Beſtimmung $\sin\varepsilon =$
$$\frac{\surd((h^2+\varrho^2)^2+(h^2-\varrho^2)^2 \tang\xi^2)}{2h\varrho}$$ angenommen, dieſe giebt alſo $\sin\lambda' =$
$$-\frac{h^2+\varrho^2}{\surd((h^2+\varrho^2)^2+(h^2-\varrho^2)\tang\xi^2)},$$ und eben dieſe Vorausſetzung erfordert, daß $(h^2+\varrho^2)^2 + (h^2-\varrho^2)^2 \tang\xi^2 < 4h^2\varrho^2$ ſey, oder
$$\tang\xi < \frac{\surd(4h^2\varrho^2-(h^2+\varrho^2)^2)}{h^2-\varrho^2},$$ weil $\sin\varepsilon$ nicht gröſſer, als 1 ſeyn kann. Für $h=\varrho$ hieſſe das $\sin\varepsilon = 1$, oder $\varepsilon = 90°$ annehmen, und das würde keinen Kugelſchnitt mehr geben, ſondern derſelbe würde ſich in einen Punct verwandeln, und daher würde auch die Projection ein Punct, oder ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= 0$, weil $\cos\varepsilon = 0$ wäre. Weil übrigens $\sin\lambda$ negativ gefunden iſt, ſo wie auch ein Werth von $\tang\lambda$, ſo erfordert dieſe Beſtimmung, daß das Auge mit dem abzubildenden Kugelſchnitt auf einerley Seite des Aequators befindlich ſey.

3.) Es ſey $(h^2-\varrho^2)\sin\xi\cos\lambda = (h^2+\varrho^2)\cos\xi \sin\lambda$, oder $(h^2-\varrho^2)\tang\xi = (h^2+\varrho^2)\tang\lambda$, ſo iſt im 377. §. n. 4. $\sin\varepsilon = 0$. Hiemit iſt für λ die willkührliche Beſtimmung $\tang\lambda = \frac{(h^2-\varrho^2)\tang\xi}{h^2+\varrho^2}$ angenommen, und unter allen zu derjenigen Axe *pq* gehörigen Parallelkreiſen, die nun gegen die Geſichtsaxe OT unter dem ſo beſtimmten Winkel λ geneigt iſt,

iſt, kann kein andrer als der Aequator kreisförmig erſcheinen.

4.) Wenn $\xi = 90°$ wäre, ſo hätte man allemahl auch $\lambda = 90°$, weil tangλ mit tangξ unendlich groß, und ſin$\lambda \pm 1$ wird, wofern nicht zugleich $h^2 = \varrho^2$ wäre, welcher Fall vorhin (n. 1.) ſchon betrachtet iſt. Mithin mag ε und h wie man will angenommen werden, ſo muß das Auge allemahl in der Axe des abzubildenden Kugelſchnitts ſtehen, wenn derſelbe ein kreisförmiges Bild haben ſoll. Wird aber für λ ein willkührlicher Werth angenommen, ſo giebt die Gleichung ſinε =

$$\frac{(h^2 - \varrho^2)\,\text{tang}\,\xi\,\text{coſ}\,\lambda - (h^2 + \varrho^2)\,\text{ſin}\,\lambda}{2h\varrho}$$ etwas

unmögliches, weil ſinε nicht unendlich groß werden kann. Wenn demnach $\xi = 90°$ iſt, und die Axe des abzubildenden Kreiſes nicht durchs Auge geht, ſo giebt es unter allen zu dieſer Axe gehörigen Parallelkreiſen keinen einzigen, deſſen Bild kreisförmig wäre: jedoch mit Ausnahme des beſondern Falles $h^2 = \varrho^2$.

Mehrere von den hieher gehörigen beſondern Fällen ſo umſtändlich zu betrachten, wie Hr. Haſe gethan hat, iſt um deswillen nicht nöthig, weil er ſie nur gebraucht hat, durch eine Induction die Richtigkeit des Satzes im 373. §. n. 4. u. 378. zu beweiſen, der hier weit kürzer und dabey doch in gehöriger Schärfe und Allgemeinheit iſt bewieſen worden.

380 §.

Wenn bey der Vorausſetzung $\varphi = 90^\circ$ die Gröſſen h, ϱ, λ, ε, ξ, ſo nicht von einander abhängen, wie es der Gleichung $(h^2 - \varrho^2)\cos\lambda \tang\xi = (h^2 + \varrho^2)\sin\lambda + 2h\varrho\sin\varepsilon$ gemäß iſt, das heiſt nach des Hn. Haſe Vortrag, wenn das Auge nicht in der zum abzubildenden Kugelſchnitt gehörigen gleichſeitigen Hyperbel ſteht; ſo iſt die Projection kein Kreis, ſondern eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem dem n. 7. des 371. §. gemäß $h >$ = oder $< \varrho \operatorname{cosec}\xi(\sin\varepsilon\cos(\xi+\lambda) + \cos\varepsilon\sin(\xi+\lambda))$ oder nachdem $h > = < \varrho\operatorname{cosec}\xi\sin(\varepsilon + \xi + \lambda)$ iſt. Um demnach die Abmeſſungen der Projection zu finden, ſetze man $\varphi = 90^\circ$ in den Formuln des 371. §. n. 3. u. 8. ſo erhält man

$$r = \varrho\cos\varepsilon,$$

$$a = \varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda,$$

$$\tang\beta = \frac{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda}{h\cos\lambda},$$

$$c = \frac{h\cos\lambda}{\cos\beta},$$

$\tang\xi$ unendlich groß,

$$L = \frac{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda}{\sin(\xi+\lambda)} = \frac{h\cos\lambda\tang\beta}{\sin(\xi+\lambda}$$,

$$\delta = \frac{k\sin\xi - \varrho\sin\varepsilon\cos(\xi+\lambda)}{\sin(\xi+\lambda)},$$

$$D = (h-k)\sin\xi,$$

$b =$

$$b = \frac{h\sin\xi - \varrho\sin\varepsilon\cos(\xi+\lambda)}{\sin(\xi+\lambda)} = h\cos\lambda$$

$$(1 - \tan\beta\cot(\xi+\lambda),$$

$$f = 0.$$

115F. Uebrigens hat man $\psi + \xi + \lambda = 180°$, und die Linien Wc', Fc' fallen in der Linie des Auges zuſammen, weil auch $\eta = 90°$, und $\vartheta = \psi$ wird. Nunmehro liegen beyde Augenpuncte, ſowohl der zur Ebene AMEN gehörige, als auch der Hauptaugenpunct, in Fc', und in eben dieſer Linie liegt die Projection t des Mittelpuncts der Kugel, und die Projectionen π und k der Pole p und q des abzubildenden Kugelſchnitts. Die Formuln des n. 5. im 371. §. verwandeln ſich demnach in folgende:

$$ct = \frac{\varrho(h-k)\sin\varepsilon\cos\beta}{h\sin(\psi+\beta)} = \frac{\varrho(h-k)\sin\varepsilon}{h(\sin\psi + \cos\psi(\tan\beta)}$$

oder $ct = \dfrac{\varrho(h-k)\sin\varepsilon}{h(\sin(\xi+\lambda) - \cos(\xi+\lambda)\tan\beta)}$:

für die Projectionen der Pole bleibt

$$t\pi = \frac{(h-k)\varrho\cos\lambda}{h\sin\xi - \varrho\cos(\xi+\lambda)},$$ und

$$tk = \frac{(h-k)\varrho\cos\lambda}{h\sin\xi + \varrho\cos(\xi+\lambda)}.$$ Wenn überdem

nunmehro R der Hauptaugenpunct iſt, ſo hat man $tR = (h-k)\cos\xi$, und man findet ferner

$$k - \delta = \frac{(h-k)\sin\xi}{\sin(\xi+\lambda)};$$

$$b^2 - r^2 = \frac{(h \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \operatorname{cos}(\xi+\lambda))^2 - \varrho^2 \operatorname{cos}\varepsilon^2 \sin(\xi+\lambda)^2}{\sin(\xi+\lambda)^2},$$

und $L(b-\delta) = \frac{(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)(h-k)\sin\xi}{\sin(\xi+\lambda)^2}$:

mithin wird $p = \frac{r(b-\delta)L}{b^2 - r^2} =$

$$\frac{\varrho(h-k)\operatorname{cos}\varepsilon \sin\xi(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}{(h \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \operatorname{cos}(\xi+\lambda))^2 - \varrho^2 \operatorname{cos}\varepsilon^2 \sin(\xi+\lambda)^2},$$

$q = \frac{r(b-\delta)}{\sqrt{(b^2 - r^2)}} =$

$$\frac{\varrho \operatorname{cos}\varepsilon (h-k)\sin\xi}{\sqrt{((h \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \operatorname{cos}(\xi+\lambda))^2 - \varrho^2 \operatorname{cos}\varepsilon^2 \sin(\xi+\lambda)^2)}},$$

$\frac{qq}{pp} = \frac{b^2 - r^2}{L^2} =$

$$\frac{(h \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \operatorname{cos}(\xi+\lambda))^2 - \varrho^2 \operatorname{cos}\varepsilon^2 \sin(\xi+\lambda)^2}{(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)^2},$$

und der halbe zum Durchmeſſer $2p$ gehörige Parameter $\frac{qq}{p} = \frac{r(b-\delta)}{L} =$

$\frac{\varrho(h-k)\operatorname{cos}\varepsilon \sin\xi}{\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}$. Für die Stelle des Mittelpuncts f' der Projection, der Scheitelpuncte α und ε des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers, und die Stelle C' der Projection des Mittelpuncts C aber hat man

$$F'f' = \frac{b\delta - r^2}{b^2 - r^2} \cdot L, \quad F'\alpha = \frac{(\delta - r)L}{b - r},$$

$$F'\varepsilon = \frac{(\delta + r)L}{b + r}, \quad F'c' = \frac{\delta . L}{b};$$

und man findet $\frac{\delta - r}{b - r}$

$$= \frac{k \sin\xi - \varrho(\sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda) + \cos\varepsilon \sin(\xi+\lambda))}{h \sin\xi - \varrho(\sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda) + \cos\varepsilon \sin(\xi+\lambda))}$$

$$= \frac{k \sin\xi - \varrho \sin(\xi+\lambda+\varepsilon)}{h \sin\xi - \varrho \sin(\xi+\lambda+\varepsilon)},$$ ſo wie $\frac{\delta + r}{b + r}$

$$= \frac{k \sin\xi - \varrho(\sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda) - \cos\varepsilon \sin(\xi+\lambda))}{h \sin\xi - \varrho(\sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda) - \cos\varepsilon \sin(\xi+\lambda))}$$

$$= \frac{k \sin\xi + \varrho \sin(\xi+\lambda-\varepsilon)}{h \sin\xi + \varrho \sin(\xi+\lambda-\varepsilon)}:$$ mithin

$$F'\alpha = \frac{(k \sin\xi - \varrho \sin(\xi+\lambda+\varepsilon)(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}{(h \sin\xi - \varrho \sin(\xi+\lambda+\varepsilon)) \sin(\xi+\lambda)},$$

$$F'\varepsilon = \frac{(k \sin\xi + \varrho \sin(\xi+\lambda-\varepsilon))(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}{(h \sin\xi + \varrho \sin(\xi+\lambda-\varepsilon)) \sin(\xi+\lambda)},$$

und daraus hat man auch $F'f' = \frac{1}{2}(F'\alpha + F'\varepsilon)$. Uebrigens wird

$$F'c' = \frac{(k \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda))(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}{(h \sin\xi - \varrho \sin\varepsilon \cos(\xi+\lambda)) \sin(\xi+\lambda)}$$

gefunden.

381. §.

Am gewöhnlichſten wird die Tafel auf der Geſichtsaxe durch den Mittelpunct der Kugel ſenkrecht, mithin auſſer $\varphi = 90°$ auch $\xi = 90°$ angenommen. Nun verwandeln ſich die Formuln des 380. §. in folgende:

$$L = \frac{\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda}{\cos\lambda}, = h \tang\beta,$$

$$\delta = \frac{k + \varrho \sin\varepsilon \sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$D = h - k,$$

$$b = \frac{h + \varrho \sin\varepsilon \sin\lambda}{\cos\lambda} = h \cos\lambda (1 + \tang\beta \tang\lambda),$$

Uebrigens bleibt $r = \varrho \cos\varepsilon$, $a = \varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda$,

$$\tang\beta = \frac{\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda}{h \cos\lambda}, \quad c = \frac{h \cos\lambda}{\cos\beta},$$

und überdem iſt nun $\psi + \lambda = 90°$; der Hauptaugenpunct R fällt mit t zuſammen, und man hat

$Rt = 0$. Ferner iſt $tc' = \dfrac{\varrho (h-k) \sin\varepsilon}{h(\cos\lambda + \sin\lambda \tang\beta)}$

$= \dfrac{\varrho (h-k) \sin\varepsilon \cos\lambda}{h + \varrho \sin\varepsilon \sin\lambda}$; und für die Projectionen

der Pole hat man $t\pi = \dfrac{(h-k) \varrho \cos\lambda}{h + \varrho \sin\lambda}$,

$tk = \dfrac{(h-k) \varrho \cos\lambda}{h - \varrho \sin\lambda}$. Wie ſich die Ausdrücke

 für

für p, q, und den halben Parameter $\frac{qq}{p}$ ändern, wenn $\xi = 90°$ geſetzt wird, überſieht man am leichteſten, wenn man vorläufig bemerkt, daß nun $\sin\xi = 1$, $\sin(\xi+\lambda) = \cos\lambda$, $\cos(\xi+\lambda) = -\sin\lambda$ ſey. Dies vorausgeſetzt erhält man im Nenner von p den Ausdruck $(h+\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda)^2 - \varrho^2\cos\varepsilon^2\cos\lambda^2 = h^2 + 2h\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda + \varrho^2(\sin\varepsilon^2\sin\lambda^2 - \cos\varepsilon^2\cos\lambda^2)$ ſo wie $\sin\varepsilon^2\sin\lambda^2 - \cos\varepsilon^2\cos\lambda^2 = \sin\varepsilon^2 - (\sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2)\cos\lambda^2 = \sin\varepsilon^2 - \cos\lambda^2$; wenn alsdenn weiter $h^2(\sin\lambda^2 + \cos\lambda^2)$ ſtatt h^2 geſchrieben wird, ſo findet man eben den Ausdruck $(h+\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda)^2 - \varrho^2\cos\varepsilon^2\cos\lambda^2 = (h\sin\lambda + \varrho\sin\varepsilon)^2 + (h^2-\varrho^2)\cos\lambda^2$.

Das giebt $p = \frac{\varrho(h-k)(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)\cos\varepsilon}{(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)^2 + (h^2-\varrho^2)\cos\lambda^2}$,

$$q = \frac{\varrho(h-k)\cos\varepsilon}{\sqrt{(\varrho\sin\varepsilon^2 + h\sin\lambda)^2 + (h^2-\varrho^2)\cos\lambda^2}},$$

115F. $\frac{qq}{p} = \frac{\varrho(h-k)\cos\varepsilon}{\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda}$, und eben ſo findet man

$$F'\alpha = \frac{(k-\varrho\cos(\lambda+\varepsilon))(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)}{(h-\varrho\cos(\lambda+\varepsilon))\cos\lambda},$$

$$F'\varepsilon = \frac{(k+\varrho\cos(\lambda-\varepsilon))(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)}{(h+\varrho\cos(\lambda-\varepsilon))\cos\lambda},$$

$$F'c' = \frac{(k+\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda)(\varrho\sin\varepsilon + h\sin\lambda)}{(h+\varrho\sin\varepsilon\sin\lambda)\cos\lambda}.$$

Weil nunmehro der Hauptaugenpunct in t fällt, ſo iſt es am bequemſten den Abſtand der Puncte α, ε, f, c, von t zu ſuchen, und in ſolcher Abſicht

ſicht muß zuerſt $F't$ bekannt ſeyn. Es iſt aber $F't = F'c + ct$, und wenn die ſchon gefundenen Werthe von $F'c$ und ct gebraucht werden, ſo erhält man $F't =$

$$\frac{(k + \varrho \sin\varepsilon \sin\lambda)(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda) + \varrho(h-k)\sin\varepsilon \cos\lambda^2}{(h + \varrho \sin\varepsilon \sin\lambda)\cos\lambda}.$$

Der Zähler wird $= (k + \varrho \sin\varepsilon \sin\lambda)\varrho \sin\varepsilon + kh \sin\lambda + \varrho h \sin\varepsilon - \varrho k \sin\varepsilon \cos\lambda^2 = \varrho k \sin\varepsilon \cos\lambda^2 + \varrho^2 \sin\varepsilon^2 \sin\lambda + h(k \sin\lambda + \varrho \sin\varepsilon) = (k \sin\lambda + \varrho \sin\varepsilon)(\varrho \sin\varepsilon \sin\lambda + h)$, mithin $F't = \dfrac{k \sin\lambda + \varrho \sin\varepsilon}{\cos\lambda}$ $= k \tang\lambda + \varrho \sin\varepsilon \sec\lambda$. Eben das giebt die Betrachtung der Figur, weil auch $F't = F'K + Kt = FT + Kt$, und man erhält weiter

$$t\alpha = tF' - F\alpha' = \frac{(k \sin\lambda + \varrho \sin\varepsilon)h - \varrho \cos(\lambda+\varepsilon)}{(h - \varrho \cos(\lambda+\varepsilon))\cos\lambda}$$

$$- \frac{(k - \varrho \cos(\lambda+\varepsilon))(\varrho \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}{(h - \varrho \cos(\lambda+\varepsilon))\cos\lambda}.$$ Die Differenz der Zähler findet man $= \varrho(h-k)(\sin\varepsilon + \sin\lambda \cos(\lambda+\varepsilon))$, alſo

$$t\alpha = \frac{\varrho(h-k)(\sin\varepsilon + \sin\lambda \cos(\lambda+\varepsilon))}{(k - \varrho \cos(\lambda+\varepsilon)\cos\lambda}.$$ Es iſt aber $\sin\varepsilon + \sin\lambda \cos(\lambda+\varepsilon) = \sin\varepsilon + \sin\lambda \cos\lambda \cos\varepsilon - \sin\lambda^2 \sin\varepsilon = \cos\lambda^2 \sin\varepsilon + \sin\lambda \cos\lambda \cos\varepsilon = \cos\lambda \sin(\lambda+\varepsilon)$, mithin $t\alpha = \dfrac{\varrho(h-k)\sin(\lambda+\varepsilon)}{h - \varrho \cos(\lambda+\varepsilon)}$.

Eben ſo findet man $t\varepsilon = tF' - F'\varepsilon =$

$$\frac{(k \sin\lambda + \varrho \sin\varepsilon)(h + \varrho \cos(\lambda-\varepsilon)) - (k + \varrho \cos(\lambda-\varepsilon))(\varrho + \sin\varepsilon + h \sin\lambda)}{(h + \varrho \cos(\lambda-\varepsilon))\cos\lambda}$$

 =

$$= \frac{\sin\varepsilon - \varrho(h-k)\sin\lambda\cos(\lambda-\varepsilon)}{(h+\varrho\cos(\lambda-\varepsilon))\cos\lambda}$$: weil ferner

$\sin\varepsilon - \sin\lambda\cos(\lambda-\varepsilon) = \sin\varepsilon - \sin\lambda\cos\lambda\cos\varepsilon - \sin\lambda^2$
$\sin\varepsilon = \sin\varepsilon\cos\lambda^2 - \sin\lambda\cos\lambda\cos\varepsilon = \cos\lambda\sin(\varepsilon-\lambda)$,
und $\cos(\lambda-\varepsilon) = \cos(\varepsilon-\lambda)$, ſo wird

$$t\varepsilon = \frac{\varrho(h-k)\sin(\varepsilon-\lambda}{h+\varrho\cos(\varepsilon-\lambda)}.$$

382. §.

Aus dieſen Formuln flieſſen nun zuförderſt alle diejenigen, welche oben im 329. §. für die ſtereographiſche Projection ſind feſtgeſetzt worden, wenn man $h=\varrho$ ſetzt, wobey zu bemerken iſt, daß daſelbſt im 329. §. auch $k=0$ war, weil ein gröſter auf der Geſichtsaxe durch den Mittelpunct der Kugel ſenkrechter Kreis für die Tafel angenommen ward. Man ſetze in den Formuln des vor. §. $h=\varrho$, ſo findet man $tc'' = \frac{(\varrho-k)\sin\varepsilon\cos\lambda}{1+\sin\varepsilon\sin\lambda}$; für die Projectionen der Pole $t\pi = \frac{(\varrho-k)\cos\lambda}{1+\sin\lambda}$,

$tk = \frac{(\varrho-k)\cos\lambda}{1-\sin\lambda}$, oder $t\pi = (\varrho-k)\tang\frac{90°-\lambda}{2}$,

$tk = (\varrho-k)\cot\frac{90°-\lambda}{2}$; (459. §. Geom.) den halben in den Augenpunct laufenden Durchmeſſer $p = \frac{(\varrho-k)\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon+\sin\lambda}$; den halben zugeordneten

Durch-

Durchmeſſer q, und den halben Parameter $\frac{qq}{p}$ eben ſo groß, weil die Projection ein Kreis wird; für die Scheitelpuncte des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers $t\alpha = \frac{(\varrho - k)\,\text{ſin}\,(\varepsilon + \lambda)}{1 - \text{coſ}\,(\varepsilon + \lambda)}$,

$t\varepsilon = \frac{(\varrho - k)\,\text{ſin}\,(\varepsilon - \lambda)}{1 + \text{coſ}\,(\varepsilon - \lambda)}$, oder $t\alpha = (\varrho - k)\,\text{cot}\,\frac{1}{2}$ $(\varepsilon + \lambda)$, $t\varepsilon = (\varrho - k)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon - \lambda)$; mithin $tf = t\alpha$ $- p = (\varrho - k)\,(\text{cot}\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon + \lambda) - \frac{\text{coſ}\,\varepsilon}{\text{ſin}\,\varepsilon + \text{ſin}\,\lambda} =$ $\frac{(\varrho - k)\,\text{coſ}\,\lambda}{\text{ſin}\,\varepsilon + \text{ſin}\,\lambda}$, weil $\text{cot}\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon + \lambda) = \frac{\text{coſ}\,\varepsilon + \text{coſ}\,\lambda}{\text{ſin}\,\varepsilon + \text{ſin}\,\lambda}$ (451. §. G.)

Nimmt man im 381. §. h unendlich groß an, ſo geben ſich die Formuln für die orthographiſche Projection, ſo wie ſie im 331. §. ſind gefunden worden, und man erhält $tc' = \varrho\,\text{ſin}\,\varepsilon\,\text{coſ}\,\lambda$, für die Projectionen der Pole $t\pi = \varrho\,\text{coſ}\,\lambda = tk$; ferner findet man den halben Durchmeſſer $p = \varrho\,\text{ſin}\,\lambda\,\text{coſ}\,\varepsilon$; und $q = \varrho\,\text{coſ}\,\varepsilon$, den halben Parameter $\frac{qq}{p} = \frac{\varrho\,\text{coſ}\,\varepsilon}{\text{ſin}\,\lambda}$; überdem $t\alpha = \varrho\,\text{ſin}\,(\varepsilon + \lambda)$, $t\varepsilon = \varrho\,\text{ſin}\,(\varepsilon - \lambda)$, alſo $tf = t\alpha - p = \varrho\,(\text{ſin}\,(\varepsilon + \lambda) - \text{ſin}\,\lambda\,\text{coſ}\,\varepsilon) = \varrho\,\text{coſ}\,\lambda\,\text{ſin}\,\varepsilon = tc'$, wie erfordert wird.

Der XXVII. Abſchnitt.

Von der Central-Projection der Kugelſchnitte.

383. §.

Den Mittelpunct und die beyden Axen der Central-Projection eines Kugelſchnitts, und die Projectionen ſeiner Pole zu finden, wenn ſowohl der Abſtand des abzubildenden Kugelſchnitts vom Aequator des letztern, als auch die Neigung der Geſichtsaxe gegen dieſen Aequator gegeben ſind.

127F. Aufl. Die Bedingungen der Central-Projection erfordern, daß das Auge O im Mittelpunct der Kugel ſtehe, und die Tafel B*b* die Kugel in Z berühre, damit der Hauptaugenpunct in den Berührungspunct falle. Weil bey dieſer Vorausſetzung die Tafel auf OZ ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auch auf der Ebene Z*pq* ſenkrecht, und den bisherigen Bezeichnungen gemäß iſt nun ÆT☊ = QTZ = QOZ = λ, ÆOA = QOE = ε, CFZ = ψ. Die Vergleichung mit dem 381. §. ergiebt, daß dieſe Centralprojection als ein beſondrer Fall unter dem daſelbſt betrachteten enthalten ſey, weil auch hier φ = 90° = ζ iſt. Wenn in der 115. Fig. die Tafel B*b* auf ☊T ſenkrecht angenommen, und ohne ihre

Lage

Lage zu ändern von t bis Z, das Auge aber nach T fortgerückt wird; ſo hat man den Fall der Central-Projection. Dieſerwegen ſetzt man nur in den Formuln des 381. §., $k = -\varrho$, und $h = 0$, ſo ſind die dortigen Formuln auf den Fall der Centralprojection angewandt, und man findet $tc = \varrho \cot\lambda = t\pi$, ſo wie $tk = -\varrho \cot\lambda$; das heiſt die Projectionen des Mittelpuncts C, und der Pole p, q, fallen in c zuſammen, welches die Betrachtung der Figur ebenfalls von ſelbſt ergiebt. Weiter findet man

$$p = \frac{\varrho \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon^2 - \cos\lambda^2}, \quad q = \frac{\varrho \cos\varepsilon}{\sqrt{(\sin\varepsilon^2 - \cos\lambda^2)}},$$

und $\frac{qq}{p} = \frac{\varrho \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \varrho \cot\varepsilon$, ſo wie für die Stelle der Scheitelpuncte des in den Augenpunct laufenden Durchmeſſers $t\alpha' = -\frac{\varrho \sin(\lambda + \varepsilon)}{\cos(\lambda + \varepsilon)}$ $= -\varrho \tan(\varepsilon + \lambda)$, und $t\varepsilon = \varrho \tan(\varepsilon - \lambda)$. Die Richtigkeit aller dieſer Formuln beſtätiget die Betrachtung der Figur ſelbſt, und man erhält übrigens noch $tf = t\alpha - p = -\varrho \tan(\varepsilon + \lambda) - \frac{\varrho \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon^2 - \cos\lambda^2}$

$$= \varrho \left(\frac{\sin\varepsilon \cos\varepsilon}{\cos\lambda^2 - \sin\varepsilon^2} - \tan(\varepsilon + \lambda) \right).$$

384. §.

1.) Die Centralprojection eines Kugelſchnitts kann nur alsdenn ein Kreis werden, wenn $\sin\varepsilon = \sqrt{(\sin\varepsilon^2 - \cos\lambda^2)}$, oder $\cos\lambda = 0$ iſt, da dann

$p = q = \varrho \cot \varepsilon = \frac{qq}{p}$ wird: das heiſt die Geſichtsaxe OZ oder Tt muß mit der Axe des abzubildenden Kugelſchnitts zuſammen fallen, oder die Tafel mit dem abzubildenden Kugelſchnitt parallel ſeyn. Es iſt nemlich der optiſche Kegel hier allemahl ein grader Kegel, wie auch die Gleichung $\tan g \beta = \frac{\varrho \sin \varepsilon + h \sin \lambda}{h \cos \lambda}$ anzeigt, h = o geſetzt, und der Schnitt des graden Kegels kann nur alsdenn ein Kreis werden, wenn die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche parallel iſt. (289. §. n. 1.)

2.) Die Centralprojection des Kugelſchnitts AMEN iſt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem $\sin \varepsilon^2 \gtreqless \cos \lambda^2$ iſt, oder $\varepsilon \gtreqless 90° - \lambda$, das iſt nachdem $\varepsilon + \lambda \gtreqless 90°$.

3.) Die Central-Projection eines jeden gröſten Kreiſes der Kugel iſt eine grade Linie: denn das Auge ſteht allemahl in der Ebene eines gröſten Kreiſes. Eben das ergeben die Formuln, wenn man $\varepsilon = 0$ ſetzt. Denn nun ſollte die Projection eine Hyperbel ſeyn, ſo lange $\lambda < 90°$ iſt, weil aber die optiſche Kegelfläche ſich in eine ebene Fläche verwandelt, ſo verſchwindet die Zwergaxe der Hyperbel, die zugeordnete Axe bleibt unmöglich, und der Parameter wird unendlich groß: das heiſt, die Hyperbel verwandelt ſich in eine grade Linie, die auf der Linie des Auges Zc oder tc ſenkrecht iſt, und durch K gehet, wenn man tK $= t\alpha = t\varepsilon = -\varrho \tan g \lambda$ annimmt.

385 §.

Man könnte die centrale Projections-Art der Kugelſchnitte auf ähnliche Art wie die ſtereographiſche und orthographiſche, in die Polar-Aequatoriſche- und Horizontal-Projection eintheilen. Wenn die Kugel von der Tafel im Pol des Aequators berührt wird, und man ſoll alle Meridiane und Parallelkreiſe des Aequators abbilden, ſo iſt das die Centrale Polar-Projection: berührt aber die Tafel die Kugel in einem gegebenen Punct des Aequators, und man bildet wiederum alle Meridiane und Parallelkreiſe ab, ſo iſt das die Centrale Aequatoriſche Projection. Wenn endlich die Kugel und die Tafel einander in einem Punct berühren, deſſen Stelle auf der Kugel durch ſeinen Abſtand vom Aequator und vom erſten Meridian gegeben iſt, den man alſo als das Zenith betrachten kann; ſo giebt die Abbildung der Meridiane und Parallelkreiſe des Aequators die Centrale Horizontalprojection. In allen dreyen Fällen wird das Auge im Mittelpunct der Kugel angenommen.

386. §.

Die Regeln zur Verzeichnung der centralen Polar-Projection zu finden.

Aufl. Es iſt ſogleich für ſich klar, daß die Projectionen der Meridiane grade Linien ſind, die einander im Augenpunct Z unter eben ſo groſſen Winkeln, wie die Meridiane einander ſelbſt ſchneiden. Die Projectionen der Parallelkreiſe des Aequators aber ſind concentriſche Kreiſe, ihre Mittelpuncte, ſo wie die Projectionen der Pole fallen in Z

zu-

zuſammen, und die Halbmeſſer der Projectionen verhalten ſich wie die Cotangenten der Diſtanzen vom Aequator. So wie dies alles aus Betrachtung der Sache ſelbſt ſchon erhellet, ſo ergeben es auch die allgemeinen Formuln, wenn man $\lambda = 90^\circ$ ſetzt. Dieſe geben nemlich $tc = t\pi = tk = 0$,

$$p = \varrho \cot\varepsilon = q = \frac{qq}{p},\ tf = 0.$$

Vergleicht man alſo hiemit den 335. §. ſo wird man leicht die dortigen Regeln für die Verzeichnung der ſtereographiſchen Polar-Projection ſo verändern, wie es der Natur der Central-Projection gemäß iſt: denn dort verhielten ſich die Halbmeſſer der Parallelkreiſe, wie die Tangenten der halben Complemente, hier aber wie die Tangenten der ganzen Complemente ihrer Entfernungen vom Aequator.

387. §.

Die Regeln zur Verzeichnung der äquatoriſchen Central-Projection zu finden.

Aufl. Weil die Axe eines jeden Meridians im Aequator liegt, ſo iſt die Ebene des Aequators zugleich die Ebene des Auges für alle Meridiane, und die Durchſchnittslinie des Aequators mit der Tafel, oder die Projection des Aequators, zugleich die Linie des Auges. Demnach ſind die Projectionen aller Meridiane grade Linien, welche dieſe Linie des Auges ſenkrecht ſchneiden: und wenn man den auf der Tafel ſenkrechten Meridian, welcher durch den Hauptaugenpunct geht, für den erſten annimmt, von welchem die Stundenwinkel φ ihren Anfang nehmen, ſo iſt die Projection eines jeden andern Me-

ridians vom Augenpunct um den Abſtand $\varrho \tan g \varphi$ entfernt. Für alle Parallelkreiſe des Aequators iſt $\lambda = 0$; weil nun eigentlich allemahl $\varepsilon < 90°$ bleibt, ſo iſt die Projection eines jeden Parallelkreiſes eine Hyperbel, ihre halbe Zwergaxe $= \frac{\varrho \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon^2 - 1}$ $= -\varrho \tan g \varepsilon$, ihre halbe zugeordnete Axe $= \pm \varrho \sqrt{=1}$, der halbe Parameter $\frac{qq}{p} = \varrho \cot \varepsilon$. Für die Stellen der Scheitelpuncte hat man $t\alpha = -\varrho \tan g \varepsilon$ und $t\varepsilon = \varrho \tan g \varepsilon$; für die Stelle des Mittelpuncts $tf = 0$, der alſo in den Augenpunct fällt. Die Tangente des halben Aſymtotenwinkels iſt $= \cot \varepsilon$, (280. §.) alſo der halbe Aſymtotenwinkel $= 90° - \varepsilon$.

388. §.

Die Regeln zur Verzeichnung der centralen Horizontal-Projection der Kugel zu finden.

Aufl. Es ſey GBH*b* der Horizont eines Puncts Z, ſo iſt die Tafel, welche die Kugel in Z berührt, mit dem Horizont GBH*b* parallel. Ferner ſey *pq* die Axe des Aequators ÆGQH, und Æ*p*ZQ*q* der Meridian des Orts Z, der alſo beydes auf dem Horizont und Aequator ſenkrecht iſt. Ueberdem ſey GZHz ein Verticalkreis, der den Meridian rechtwinklicht ſchneidet, oder der in der Aſtronomie ſo genannte erſte Verticalkreis, ſo iſt GH, die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie des Horizonts, des Aequators, und erſten Verticalkreiſes, auf dem Meridian ſenkrecht, weil die genannten drey Ebenen 128F.

auf

auf dem Meridian ſenkrecht ſind. Das Auge O ſteht im Mittelpunct der Kugel, und OZ iſt die Geſichtsaxe, Z der Augenpunct.

Nun ſey ZX die Projection des Meridians, VY die Projection des erſten Verticalkreiſes; ſo ſchneiden beyde einander in Z ſenkrecht. Ferner ſey pWq ein Stundenkreis, der den Meridian des Orts Z unter dem Winkel $ZpW = \varphi$, und den erſten Verticalkreis in der graden Linie OW ſchneidet: ſo iſt die Projection deſſelben eine grade Linie, die man auf der Tafel ziehen kann, wenn zweene Puncte gefunden ſind, durch welche ſie durchläuft. Einer von dieſen Puncten iſt die Projection π des Pols p, der in der Projection ZX des Meridians liegt, und gefunden wird, wenn man $Z\pi = \varrho \cot\lambda$ ſetzt: oder wenn man die Polhöhe Bp des Orts Z, die allemahl ſeinem Abſtand QZ vom Aequator gleich iſt, wie im 346. §., $= \pi$ ſetzen will, ſo hat man $Z\pi = \varrho \cot\pi$, und $\pi = \lambda$. Wenn ferner w die Projection des Puncts W iſt, ſo muß w in VY liegen, und zugleich in der Projection des Stundenkreiſes pWq, die man alſo durch π und w ziehen kann. Um aber w zu finden erwäge man, daß in dem bey Z rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck ZpW die eine Perpendiculärſeite $Zp = 90° - \pi$ und der Winkel an $p = \varphi$ ſey: demnach kann man die andre Perpendiculärſeite ZW finden, und es iſt $\tang ZW = \sin Zp \tang\varphi$ (538. §. Geom. num. II.) oder $\tang ZW = \cos\pi \tang\varphi$, mithin wird $Zw = \varrho \cos\pi \tang\varphi$ gefunden.

Um auch die Projection eines Parallelkreiſes, wie AME zu finden, deſſen Abſtand vom Aequator $= \varepsilon$ iſt, erwäge man, daß für alle Parallelkreiſe ZX

die Linie des Auges ſey. In derſelben liegen alſo ihre Scheitelpuncte α und ε, und man hat $Z\alpha = -\varrho \tan(\varepsilon + \pi)$, $Z\varepsilon = \varrho \tan(\varepsilon - \pi)$, ſo wie die halbe Zwergaxe $p = \frac{\varrho \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon^2 - \cos\pi^2}$, die halbe zugeordnete Axe $q = \frac{\varrho \cos\varepsilon}{\sqrt{(\sin\varepsilon^2 - \cos\pi^2)}}$, den halben Parameter $= \varrho \cot\varepsilon$. Für den Aequator iſt $\varepsilon = 0$, und es fallen α und ε in $\ae$ zuſammen, wenn man $Z\ae = -\varrho \tan\pi$ nimmt, die Projection des Aequators aber iſt eine grade Linie, welche ZX in $\ae$ ſenkrecht ſchneidet. Die Projectionen der übrigen Parallelkreiſe ſind ſo lange Hyperbeln, als $\varepsilon < 90° - \pi$ iſt; desjenigen Parallelkreiſes Projection wird eine Parabel, deſſen Abſtand vom Aequator die Polhöhe des Orts Z zu 90° ergänzt: der übrigen Parallelkreiſe, die weiter vom Aequator abſtehen, Projectionen ſind Ellipſen.

Der

Der XXVIII. Abſchnitt.

Von den Projectionen der Kegelſchnitte beſonders der Ellipſe.

389. §.

130u. 135F. Es ſey ANEM ein Kegelſchnitt, $\alpha\beta$ deſſen Zwergaxe, *bd* die zugeordnete Axe, und $\alpha\beta$ ſchneide verlängert die Grundlinie TF der Tafel in der Entfernung TK = h von der Ebene des Auges, unter dem Winkel TK$\alpha = \delta$. Beyde Axen $\alpha\beta$ und *bd* ſind gegeben, nebſt der Entfernung Kα des Scheitels α von dem Punct K, und die Tafel iſt gegen die Ebene des Kegelſchnitts unter dem Winkel ψ geneigt: man ſoll eine Gleichung für die Projection des Kegelſchnitts finden, wenn auch der Abſtand D des Auges von der Tafel, und die Höhe OS des Auges unter der Ebene ANEM gegeben ſind.

Aufl. Man ziehe eine Sehne MN mit der Grundlinie der Tafel parallel, halbire ſie in P, und ziehe durch P und den Mittelpunct C einen Durchmeſſer AE des Kegelſchnitts, der die Grundlinie der Tafel in F unter dem Winkel TFE = ε ſchneidet, ſo iſt zugleich ε = EPM der Conjugationswinkel für den

Durch-

Durchmeſſer AE. Wird alsdenn die halbe Zwergaxe $C\alpha = C\beta = a$, die halbe zugeordnete Axe $Cb = Cd = b$, der halbe Durchmeſſer $AC = p$, der Winkel $TK\alpha = \delta$, $KCF = \gamma$ geſetzt, ſo hat man

$$\tang\gamma = \frac{bb}{aa} \cot\delta, \quad \text{und}$$

$$p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2)}} \quad (277. \text{ §.})$$

Weil aber $\tang\gamma = \frac{b^2}{a^2}\cot\delta$, ſo wird

$$\sec\gamma = \sqrt{\frac{a^4 + b^4 \cot\delta^2}{a^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}}{a^2 \sin\delta},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 \sin\delta}{\sqrt{({}^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}},$$

$$\sin\gamma = \frac{b^2 \cos\delta}{\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}},$$ und man erhält $a^2 \sin\gamma^2 + b^2 \cos\gamma^2 =$

$$\frac{a^2 b^4 \cos\delta^2 + a^4 b^2 \sin\delta^2}{a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2};$$ mithin auch

$$p = \frac{\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}}{\sqrt{(a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2)}},$$ und der halbe zugeordnete Durchmeſſer $CH = q =$

$$\frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2)}},$$ ſo wie auch $\frac{qq}{pp}$

 =

$= \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\delta}$. (270. §.) Ferner iſt $\varepsilon = \delta + \gamma$,

alſo $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\operatorname{tang}\delta + \operatorname{tang}\gamma}{1 - \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\gamma} =$

$\frac{a^2 \operatorname{tang}\delta + b^2 \cot\delta}{a^2} : \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, das iſt

$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{a^2 \operatorname{tang}\delta + b^2 \cot\delta}{a^2 - b^2}$, und ε iſt hier der Winkel, welcher im 277. §. hies. Noch hat man im Dreyeck TCK die Seite $FC = \frac{KC \sin\delta}{\sin\varepsilon}$,

die Seite $KF = \frac{KC \sin\gamma}{\sin\varepsilon}$, und

$\sin\varepsilon = \sin\delta \cos\gamma + \cos\delta \sin\gamma = \frac{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}{\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}}$:

Wenn alſo $KC = K\alpha + \alpha C = k + a$ geſetzt wird, ſo erhält man $FC = \frac{(k+a)\sin\delta \sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}$,

und $KF = \frac{(k+a) b^2 \cos\delta}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}$; mithin

$TF = f = FK - KF = h - \frac{(k+a) b^2 \cos\delta}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}$,

und $FA = FC - CA = FC - p$, oder

$$FA = \frac{(k+a)\sin\delta \sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}$$

$$-\frac{\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2}}{\sqrt{(a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2)}} =$$

$$\frac{((k+a)\sin\delta - \sqrt{(a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2)})\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + a^4 \cos\delta^2)}}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}.$$

Die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt, $AP = t$, $PM = u$ geſetzt, iſt $uu = \frac{2qq}{p}\, t - \frac{qq}{pp}\, tt$, (256. §.) oder $pp.uu = qq(2p - t)t$.

In derſelben ſetze man aus dem 102. §. 2te Aufl.

$$t = \frac{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + c)^2 x}{L.D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + c)x},$$

$$u = \frac{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + c)L.y}{L.D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + c)x};$$

ſo wird für die Projection eine Gleichung zwiſchen x und y gefunden. Vorausgeſetzt, daß die Höhe des Auges $OS = A$ der Abſtand $TF = f$, der Coordinatenwinkel für die Projection $= \zeta$ geſetzt ſey, hat man zugleich $\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{A.\mathrm{coſec}\,\psi}{f + D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\cot\varepsilon}$, und

$L = (f + D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\cot\varepsilon)\sec\zeta = A.\,\mathrm{coſec}\,\psi\,\mathrm{coſec}\,\zeta$. Ferner iſt $FA = c$, und wenn man den ſenkrechten Abſtand CL des Mittelpuncts C von der Grundlinie der Tafel $= \delta$ annimmt, ſo hat man $FC = \delta\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon$, $FA = c = \delta\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p$. Um die Formuln abzukürzen, ſetze man $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta = B$, ſo hat man

$$t = \frac{(B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)^2 x}{L(B - \delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)x},$$

 $u =$

$$u = \frac{(B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)\,L\,.\,y}{L(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)\,x}.$$

(Weil kurz vorher die Buchſtaben a und b die halbe Zwergaxe und halbe zugeordnete Axe des Kegelſchnitts wie im 277. §. bedeutet haben; ſo ſollen ſie in der ganzen folgenden Ausführung dieſe Bedeutung behalten. Hingegen ſoll die lothrechte Höhe des Auges über der Ebene des abzubildenden Kegelſchnitts hier $=A$ und $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta = B$ geſetzt werden, daß alſo hier nunmehro A und B diejenigen Linien bedeuten, welche in den allgemeinen Formuln des 102. und 103. §. a und b bezeichneten.) Das giebt $2p - t =$

$$\frac{2pL(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - 2p(B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)\,x - (B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)^2\,x}{L(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)\,.\,x},$$

und $2p(B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)\,x + (B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)^2\,x = (B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp)\,x$, alſo $2p - t =$

$$\frac{2pL(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp)\,x}{L(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)\,x}.$$

Dieſer Werth nebſt den Werthen von t und u in die Gleichung für den Kegelſchnitt geſetzt, giebt $pp\,(B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)^2\,L^2\,y^2 = qq\,(B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p)^2\,x\,(2pL(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - (B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp)x)$ oder

$$\frac{L^2 y^2}{B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp} = \frac{qq}{pp}\,.\left(\frac{2pL(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon}{B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp} - x\right)x,$$

oder auch $yy = \dfrac{(B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp)\,qq}{L^2\,pp}$.

$$\cdot\left(\frac{2pL(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{B^2\operatorname{coſec}\varepsilon^2-pp}-x\right)x,$$ und das iſt

die geſuchte Gleichung für die Projection. Der Anfangspunct der Abſciſſen wird gefunden, wenn man $Fa=\frac{c.L}{D\operatorname{coſec}\psi\operatorname{coſec}\varepsilon+c}$ (102 §. 2te Aufl.)

$$=\frac{(\delta\operatorname{coſec}\varepsilon-p)L}{(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon+\delta\operatorname{coſec}\varepsilon-p}$$ nimmt, oder

$$F\alpha=\frac{(\delta\operatorname{coſec}\varepsilon-p)L}{B\operatorname{coſec}\varepsilon-p}.$$

390. §.

Die Projection eines Kegelſchnitts iſt allemahl auch ein Kegelſchnitt.

Beweis. Das Bild *ae* des Durchmeſſers 135F. AE, worauf die Abſciſſen des Kegelſchnitts genommen ſind, iſt zugleich ein Durchmeſſer der Projection, wie die gefundene Gleichung unmittelbar anzeigt, weil gleichen Werthen von x gleiche und entgegen geſetzte Werthe von y zugehören: auch iſt dies aus der Natur der Sache klar. (102. §. 2te Aufl.) Man ſetze $\frac{pL.(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{B^2\operatorname{coſec}\varepsilon^2-pp}=P$, ſo hat man

$$yy=\frac{(B^2\operatorname{coſec}\varepsilon^2-pp)qq}{L^2.pp}(2P-x)x,$$

und weil die Summe der Factoren des Products $(2P-x)x$ unveränderlich iſt, ſo iſt daſſelbe am größten, wenn $x=2P-x$, oder $x=P$ iſt. (483 §. G.) Die Vorausſetzung $y=0$ giebt $x=0$ und $x=2P$, mit-

mithin iſt $ae = 2P$, und wenn $x = P$ geſetzt wird, ſo wird $y = \frac{q\sqrt{(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)}}{p \cdot L} \cdot P$ gefunden, welches alsdenn die Ordinate durch die Mitte des Durchmeſſers ae iſt. Dieſe ſey $= Q$, ſo erhält man $\frac{(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)qq}{pp \cdot L^2} = \frac{QQ}{PP}$, und man findet

$yy = \frac{QQ}{PP}(2P - x)x$, welches eine Gleichung

iſt, die allemahl die Natur einer Linie ausdrückt, die aus dem Kegel geſchnitten werden kann. (293. §.) Die Gleichung läſt ſich nemlich auch ſo ausdrücken $yy = \frac{2QQ}{P}x - \frac{2QQ}{P} \cdot \frac{xx}{2P}$, da dann

$\frac{2QQ}{P}$ der Parameter für denjenigen Durchmeſſer

des Kegelſchnitts iſt, dem die mit der Grundlinie des Schnitts parallelen Ordinaten zugeordnet ſind.

Weil $QQ = \frac{(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)qq}{pp \cdot L^2} \cdot PP$

war, und $P = \frac{pL(B - \delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp}$, ſo erhält

man $QQ = \frac{qq \cdot (B - \delta)^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2}{B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp}$, und

$Q = \frac{q(B - \delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{\sqrt{(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)}}$. Setzt man

übri-

übrigens $\frac{2QQ}{P} = G$, ſo iſt dies der Parameter der Projection, und man findet

$$G = \frac{2qq(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)}{pp \cdot L^2} \cdot P, \quad \text{oder}$$

$$G = \frac{2qq(B - \delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{p \cdot L}.$$ Weiter war

$$Fa = \frac{(\delta \operatorname{coſec}\varepsilon - p)L}{B\operatorname{coſec}\varepsilon - p},$$ (389. §. am Ende) und

wenn f der Mittelpunct der Projection iſt, ſo hat man $Ff = Fa + af = Fa + P$, alſo

$$Ff = \frac{(\delta \operatorname{coſec}\varepsilon - p)L}{B\operatorname{coſec}\varepsilon - p} + \frac{pL(B - \delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp}$$

$$= \frac{(B\delta \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - p^2)L}{B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - p^2}.$$

391. §.

Der abzubildende Kegelſchnitt iſt eine Ellipſe, man ſoll finden, unter welchen Umſtänden die Projection eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel wird.

Aufl. Wenn der abzubildende Kegelſchnitt eine Ellipſe iſt, ſo finden die herausgebrachten allgemeinen Formuln ohne weitere Aenderung ihre Anwendung, und beyde halbe Durchmeſſer p und q ſind allemahl möglich, was auch δ im 389. §. für einen Winkel bezeichnet. Mithin iſt die Projection eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem

$B^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2 > = < pp$ iſt. Wenn alſo die Werthe von B und p aus dem 389. §. gebraucht werden, ſo erhellet, daß die Projection eine Ellipſe ſey, wenn

$$(D \operatorname{cosec} \psi + \delta)^2 > \frac{a^4 \sin \delta^2 + b^4 \cos \delta^2}{a^2 \sin \delta^2 + b^2 \cos \delta^2} \cdot \sin \varepsilon^2$$

iſt; (a und b bezeichnen in dieſer Formul die Hauptaxen des abzubildenden Kegelſchnitts) und weil

$$\sin \varepsilon = \frac{a^2 \sin \delta^2 + b^2 \cos \delta^2}{\sqrt{(a^4 \sin \delta^2 + b^4 \cos \delta^2)}} \text{ war, (389. §.)}$$

ſo muß $(D \operatorname{cosec} \psi + \delta)^2 > a^2 \sin \delta^2 + b^2 \cos \delta^2$ ſeyn, wenn die Projection eine Ellipſe iſt. Im Fall alſo $(D \operatorname{cosec} \psi + \delta)^2 = a^2 \sin \delta^2 + b^2 \cos \delta^2$ iſt, ſo wird die Projection eine Parabel; und wenn der erſte Ausdruck kleiner als der zweyte iſt, eine Hyperbel.

392 §.

Man kann im 365. §. Geom. den daſelbſt erklärten Begrif des geometriſchen Kegels ſo erweitern, daß ſtatt des Kreiſes eine Ellipſe für ſeine Grundfläche angenommen wird, und er kann alsdenn ein elliptiſcher Kegel heiſſen, ſo wie derjenige, deſſen Grundfläche ein Kreis iſt, auch ein Apollonianiſcher Kegel genannt wird, weil Apollonius nur ſolche Kegel betrachtet hat, die kreisförmige Grundflächen haben. Die elliptiſche Kegelfläche hat alsdenn die Eigenſchaft, daß alle grade Linien, die durch ihre Spitze und einen Punct der elliptiſchen Grundflächen laufen, ganz in dieſer Fläche liegen, und jedem elliptiſchen Kegel iſt wie dem Apollonianiſchen ein andrer an der Spitze grade entgegengeſetzt, ſo daß beyde entgegen geſetzte krumme Flächen eigentlich nur eine einzige elliptiſche Kegel-

gelfläche ausmachen. Die grade Linie durch die Spitze des elliptiſchen Kegels und den Mittelpunct der Grundfläche iſt ſeine Axe, und nachdem dieſe auf der Grundfläche grade oder ſchief ſtehet, iſt der Kegel ſelbſt ein grader oder ſchiefer Kegel. Wird die Axe des elliptiſchen Kegels unendlich groß angenommen, ſo verwandelt er ſich in einen elliptiſchen Cylinder, der ſich von dem eigentlich ſo genannten Cylinder (361. §. Geom.) ebenfalls nur darin unterſcheidet, daß des letztern Grundfläche kreisförmig iſt.

393 §.

Es ſey die Ellipſe ANEM die Grundfläche eines elliptiſchen Kegels, deſſen Axe durch den Mittelpunct C der Grundfläche geht: die Neigungsebene dieſer Axe gegen die Grundfläche ſchneide letztere in der graden Linie CB. Wenn nun beyde Hauptaxen $\alpha\beta$, bd, der Ellipſe gegeben ſind, ſo wird, um die Geſtalt und Gröſſe des elliptiſchen Kegels zu beſtimmen, noch erfordert, daß der Winkel $\alpha CB = \vartheta$, der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche $OCB = \beta$, und die Länge der Axe $OC = c$ gegeben ſey. Wird dieſer elliptiſche Kegel von einer Ebene geſchnitten, ſo läßt ſich die Lage dieſer ſchneidenden Ebene ſo beſtimmen. Ihre Durchſchnittslinie mit der Grundfläche ſey TK, und CB verlängert ſchneide TK in W. Wenn alsdenn $CW = e$, der Winkel $CWK = \eta$, und der Neigungswinkel ψ der ſchneidenden Ebene gegen die Grundfläche bekannt ſind, ſo iſt die Lage der ſchneidenden Ebene beſtimmt. Hat man CL anf TK ſenkrecht geſetzt, ſo kann auch 135 F.

der Winkel WCL $=\alpha$, und die Entfernung CL $=\delta$ ſtatt ε und η gebraucht werden.

Die Projection der Ellipſe iſt zugleich ein Schnitt eines elliptiſchen Kegels, ſo wie die Projection des Kreiſes ein Schnitt des Apollonianiſchen Kegels iſt: Demnach wird es nützlich ſeyn, auch dieſe Projection als einen elliptiſchen Kegelſchnitt zu betrachten.

394. §.

Die allgemeine Gleichung für den Schnitt des elliptiſchen Kegels oder Cylinders zu finden, wenn ſeine Abmeſſungen und die Lage der Ebene des Schnitts gegeben ſind.

Aufl. Aus Vergleichung der 102. 130. und 135. Fig. und in Rückſicht auf die im 251. und 254. §. ſchon angeſtellten Unterſuchungen leitet man leicht folgende Sätze her. Es iſt die Höhe des Kegels, oder des Auges OS $= A = c \sin\beta$, und CS $= c . \cos\beta$. In der 135. Fig. ſey SG mit TK parallel, und ſtoſſe mit CF in G zuſammen, FV aber ſey auf SG, ſo wie CL $=\delta$ auf TK ſenkrecht; ſo hat man TF $= f =$ SX + XV $=$ TL + LF $=$ OS $\cos\eta +$ CL $\cot\varepsilon$, oder $f = c \cos\beta \cos\eta + \delta \cot\varepsilon$. Ferner hat man wie im 251. §. $D \operatorname{cosec}\psi = A \cot\psi + c . \cos\beta \sin\eta - \delta$, alſo $D \operatorname{cosec}\psi + \delta = c(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$, und dieſe Werthe von f und $D \operatorname{cosec}\psi + \delta$ in

dem Ausdruck $\operatorname{tang}\zeta = \dfrac{A . \operatorname{cosec}\psi}{f + D \operatorname{cosec}\psi \cot\varepsilon}$

(389. §.) gebraucht geben

$\operatorname{tang}\zeta =$

$$\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{c \sin\beta \,\mathrm{cosec}\,\psi}{c \,.\, \cos\beta \cos\eta + (D\,\mathrm{cosec}\,\psi + \delta)\cot\varepsilon}$$

$$= \frac{\sin\beta \,\mathrm{cosec}\,\psi}{\cos\beta \cos\eta + (\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)\cot\varepsilon},$$

oder auch

$$\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{\mathrm{tang}\,\beta \sec\eta \,\mathrm{cosec}\,\psi}{1 + (\mathrm{taug}\,\beta \sec\eta \cot\psi + \mathrm{tang}\,\eta)\cot\varepsilon}.$$

Der Winkel ε iſt durch δ und beyde Axen des Kegelſchnitts gegeben, (389. §.) und hier iſt $\delta = 180^\circ - (\eta + \vartheta)$: demnach iſt ζ gegeben, ſo wie auch $L = c \sin\beta \,\mathrm{cosec}\,\psi \,\mathrm{cosec}\,\zeta$, oder $L = c.(\cos\beta \cos\eta + (\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)\cot\varepsilon)\sec\zeta$. In der allgemeinen Gleichung $yy = \frac{Q^2}{P^2}(2P - x)x$

für den Schnitt des elliptiſchen Kegels aber hat man $P = \frac{p.L(B-\delta)\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon}{B^2 \,\mathrm{cosec}\,\varepsilon^2 - pp}$,

$$Q = \frac{q(B-\delta)\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon}{\sqrt{(B^2 \,\mathrm{cosec}\,\varepsilon^2 - pp)}}, \quad \frac{Q^2}{P^2} =$$

$$\frac{(B^2 \,\mathrm{cosec}\,\varepsilon^2 - pp)qq}{pp.L^2}, \text{ und } \frac{2QQ}{P}$$

$$= \frac{2qq(B-\delta)\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon}{p.L}.$$ Aus dem Winkel δ und

beyden Axen der Ellipſe hat man p und q, (389. §.) ferner iſt $B = c(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$, und $\delta = e \sin\eta$, oder auch $\delta = \Delta(\sin\eta \cos\beta + \sin\beta \cot\psi)$, $Cc = \Delta$ geſetzt; (265. §.) da dann

$B - \delta = (c - \Delta)(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$ gefunden wird. Mithin hat man P, Q, und den Conjugationswinkel ζ, wenn beyde Axen der Ellipſe, nebſt ϑ, β, c, als die Abmeſſungen des Kegels, und überdem ε, η, ψ, für die Lage des Schnitts gegeben ſind. Uebrigens wird der Anfangspunct der Abſciſſen vermittelſt der Gleichung

$$Fa = \frac{\delta \operatorname{cosec}\varepsilon - p}{B \operatorname{cosec}\varepsilon - p} \cdot L \text{ gefunden.}$$

Wenn die Axe c des Kegels unendlich groß wird, ſo verwandelt ſich derſelbe in einen elliptiſchen Cylinder, und man findet aus den vorgetragenen Formuln leicht die Gleichung für den Elliptiſchen Cylinderſchnitt. Sie behält die allgemeine Form

$$yy = \frac{Q^2}{P^2}(2P - x)x,$$ weil aber c, mithin L und B unendlich groß werden, ſo hat man $P =$

$$\frac{p \cdot L}{B \operatorname{cosec}\varepsilon} = \frac{p \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta}{(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta) \operatorname{cosec}\varepsilon},$$

und $Q = q$. Dieſer Schnitt des elliptiſchen Cylinders iſt zugleich allemahl eine orthographiſche Projection der Ellipſe.

Wenn der Elliptiſche Kegel grade iſt, ſo hat man $\beta = 90°$, $\tan\beta = \infty$, alſo $\tan\zeta =$

$$\frac{\operatorname{cosec}\psi}{\cot\psi \cot\varepsilon} = \sec\psi \tan\varepsilon,$$ und die Winkel η, ϑ,

fallen aus der Rechnung weg, weil ϑ zur Beſtimmung der Lage der Axe des Kegels nicht weiter gebraucht wird, und die Lage der ſchneidenden Ebene

auſ=

auſſer ψ ſchon durch δ beſtimmt iſt. Man erhält alſo $L = c . \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta$, $B = c . \cot\psi$, und $\delta = CL = KC$ ſind.

Für den Schnitt des graden elliptiſchen Cylinders wird alſo $P = \frac{p . \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta}{\cot\psi \operatorname{coſec}\varepsilon}$, oder $P = p . \sec\psi \operatorname{coſec}\zeta \sin\varepsilon$, und $Q = q$ gefunden.

Der mit der Grundfläche parallele Schnitt iſt eine der Grundfläche ähnliche Ellipſe. Man hat alsdenn $\psi = o$, alſo $\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varepsilon$, $P = \frac{p(c - \Delta)}{c}$, $Q = \frac{q(c - \Delta)}{c}$: und wenn ſich der Kegel in einen elliptiſchen Cylinder verwandelt, ſo wird $P = p$, $Q = q$, wie der Natur der Sache gemäß iſt. Der mit der Grundfläche parallele Schnitt iſt nun eine der Grundfläche gleiche und ähnliche Ellipſe.

395. §.

Die Lage der ſchneidenden Ebene zu finden, welche erfordert wird, wenn der Schnitt des elliptiſchen Kegels eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel werden ſoll.

Aufl. Die erwehnten drey Fälle finden ſtatt, nachdem $B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 > = < pp$ iſt. Im Dreyeck 135 F. FCc aber hat man $Cc = \frac{FC . \sin CFc}{\sin(CFc + ACQ}$

=

$$= \frac{FC \tang CFc}{\tang CFc \,.\, \cos ACO + \sin ACO},$$ und

$FC = \delta \operatorname{coſec} \varepsilon$, weil $TFC = \varepsilon$ angenommen wird;

alſo $$Cc = \frac{\delta \operatorname{coſec} \varepsilon \tang CFc}{\tang CFc \cos ACO + \sin ACO}.$$

Ferner iſt allemahl $Oc : Cc = D \operatorname{coſec} \psi : \delta$, und $OC : Cc = D \operatorname{coſec} \psi + \delta : \delta$, mithin

$$Cc = \frac{c \,.\, \delta}{D \operatorname{coſec} \psi + \delta} = \frac{c \,.\, \delta}{B}.$$ Dieſer Werth

dem vorigen gleich geſetzt giebt

$$\frac{\operatorname{coſec} \varepsilon \tang CFc}{\tang CFc \cos ACO + \sin ACO} = \frac{c}{B},$$ mithin

$B \operatorname{coſec} \varepsilon \tang CFc = c \,.\, \tang CFc \cos ACO + c \,.\, \sin ACO$,

und es wird $$\tang CFc = \frac{c \sin ACO}{B \operatorname{coſec} \varepsilon - c \,.\, \cos ACO}.$$

Noch hat man im Dreyeck ACO, $\tang CAO = \frac{c \sin ACO}{p - c \,.\, \cos ACO}$, und die Vergleichung mit $\tang CFc$ ergiebt folgendes: wenn $B \operatorname{coſec} \varepsilon > = < p$ iſt, ſo iſt $\tang GFc < = > \tang CAO$, mithin $CFc < = > CAO$. Damit alſo der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel werde, wird erfordert, daß $CFc < = > CAO$ ſey: im erſten Fall wird nur einer von beyden entgegen geſetzten Kegeln allein, und zwar ſo geſchnitten, daß der Schnitt durch alle Seitenlinien gehet, im zweyten Fall liegt die Ebene des Schnitts mit einer Seitenlinie parallel, und im dritten Fall ſchneidet ſie beyde entgegen

ge-

geſetzte Kegel. Es hat demnach damit eben die Bewandniß, wie mit den Schnitten des Apollonianiſchen Kegels. 256. §.

396 §.

Die Lage der ſchneidenden Ebene zu finden, welche erfordert wird, wenn der Schnitt des elliptiſchen Kegels oder Cylinders ein Kreis werden ſoll.

Aufl. 1.) Wenn man die Abmeſſungen des Kegels, mithin beyde Axen ſeiner Grundfläche, die Winkel ϑ und β, welche die Lage der Axe c beſtimmen, und die Länge dieſer Axe, als gegeben betrachtet; ſo kömmt die Auflöſung der Aufgabe darauf an, daß man die Winkel δ und ψ ſuche, welche die Lage der ſchneidenden Ebene beſtimmen. Um dieſe zu finden, hat man zu erwägen, daß der Schnitt alsdenn ein Kreis werde, wenn der Conjugationswinkel ζ der beyden Durchmeſſer, davon einer mit der Grundlinie des Schnitts parallel iſt, ein rechter Winkel wird, und überdem dieſe beyden Durchmeſſer gleich groß werden. (287. §.) Zugleich wird dabey vorausgeſetzt, daß der Schnitt in die Claſſe der Ellipſen gehöre, mithin $B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 > p^2$ ſey. Jede dieſer beyden Bedingungen führt auf eine Gleichung zwiſchen δ, ψ, und den gegebenen Abmeſſungen des Kegels, woraus man vermittelſt der bekannten Eliminations-Methoden zwo andre Gleichungen herleiten kann, wovon die eine δ, die andre ψ beſtimmt.

2.) Nun hat man zuerſt aus dem 394. §.

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{ſin}\beta \operatorname{coſec}\psi}{\operatorname{coſ}\beta \operatorname{coſ}\eta + (\operatorname{ſin}\beta \cot\psi + \operatorname{coſ}\beta \operatorname{ſin}\eta)\cot\varepsilon},$$

und

und dieſer Ausdruck muß unendlich groß ſeyn, damit $\zeta = 90°$ werde. Weil nun $\sin\beta$ allemahl endlich iſt, (denn bey der Vorausſetzung $\beta = 0$ oder $\beta = 180°$ würde ſich der Kegel in eine bloſſe Ebene verwandeln) ſo kann der Bruch, welcher $\tang\zeta$ ausdrückt, nicht unendlich groß werden, wofern nicht ſein Nenner verſchwindet. Zwar könnte $\operatorname{coſec}\psi$ unendlich groß werden, allein dies würde den mit der Grundfläche parallelen Schnitt geben, wovon man ſchon aus dem 394. §. weis, daß derſelbe allemahl eine Ellipſe iſt, wie denn auch alsdenn $\tang\zeta = \tang\varepsilon$, und nicht unendlich groß wird. Dieſemnach wird erfordert, daß $\cos\beta \cos\eta + (\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta) \cot\varepsilon = 0$ ſey; und die zweyte Bedingung, welche erfordert, daß $Q = P$ ſey, führt auf die Gleichung $(b^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)qq = pp \,.\, L^2$. (394. §.) Eben daſelbſt war $B = c(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$ und $L = c \sin\beta \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta$, hier aber iſt $\operatorname{coſec}\zeta = 1$, weil $\zeta = 90°$ angenommen wird: alſo verwandelt ſich die zweyte Gleichung in folgende: $c^2 \,.\, \operatorname{coſec}\varepsilon^2$

$$(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)^2 - pp = \frac{p^2}{q^2} c^2 \sin\beta^2$$

$\operatorname{coſec}\psi^2$. Bevor man nun beyde Gleichungen weiter entwickelt, iſt nöthig folgendes zu bemerken. Es

iſt allemahl $\varepsilon = \delta + \gamma$, und $\tang\gamma = \frac{b^2}{a^2} \cot\delta$,

$\tang\varepsilon = \frac{a^2 \operatorname{tg}\delta + b^2 \cot\delta}{a^2 - b^2}$ (389. §.) Ueberdem

iſt $\eta = 180° - \vartheta + \delta$, demnach kann man ε und η durch δ ausdrücken, da dann die erſte Gleichung ergiebt, wie die Winkel δ, ψ, ϑ, β, von einander

ab-

abhängen müſſen, damit der Conjugationswinkel des Schnitts ein rechter Winkel ſey. Eben dieſe erſte Gleichung giebt $\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta = - \cos\beta \cos\eta$ $\tan g\varepsilon$, mithin $\cot\psi = - \cot\beta (\sin\eta + \cos\eta \tan g\varepsilon)$, oder $\cot\psi = - \frac{\cot\beta}{\cos\varepsilon} (\sin\eta \cos\varepsilon + \cos\eta \sin\varepsilon)$ $= - \cot\beta (\sin\eta + \cos\eta \tan g\varepsilon)$, alſo auch $\cot\psi = - \frac{\cot\beta \sin(\eta + \varepsilon)}{\cos\varepsilon}$. Aus der zweyten Gleichung findet man $\sin\beta^2 \cot\psi^2 + 2 \sin\beta \cos\beta$ $\sin\eta \cot\psi + \cos\beta^2 \sin\eta^2 - \frac{pp \sin\varepsilon}{cc} = \frac{pp}{qq}$ $\sin\varepsilon^2 \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2$; und wenn hinter dem Gleichheitszeichen $\cot\psi^2 + 1$ ſtatt $\operatorname{cosec}\psi^2$ geſetzt wird, ſo hat man $\left(1 - \frac{p^2}{q^2} \sin\varepsilon^2\right) \cot\psi^2 + 2 \cot\beta$ $\sin\eta \cot\psi = \frac{pp \sin\varepsilon^2}{cc \cdot \sin\beta^2} + \frac{pp}{qq} \sin\varepsilon^2 - \cot\beta^2$ $\sin\eta^2$, da dann auch p und $\frac{p^2}{q^2}$ durch δ ausgedrückt werden können. (389. §.)

3.) Um nun $\cot\psi$ aus dieſen Gleichungen wegzuſchaffen, ſetze man den Werth $\cot\psi = - \cot\beta$ $(\sin\eta + \cos\eta \, tg\varepsilon)$ aus der erſten Gleichung in die zweyte, ſo findet man

$$\left(1 - \frac{p^2}{q^2} \sin\varepsilon^2\right) \cot\beta^2 (\sin\eta + \cos\eta \, tg\varepsilon)^2$$

$$- 2 \cot\beta^2 \sin\eta (\sin\eta + \cos\eta \, tg\varepsilon)$$

$$= \frac{pp\,\text{ſin}\varepsilon^2}{cc\,.\,\text{ſin}\beta^2} + \frac{pp}{qq}\,\text{ſin}\varepsilon^2 - \cot\beta^2\,\text{ſin}\eta^2,$$ und

nach gehöriger Multiplication im zweyten Gliede, wenn man hiernächſt mit $\cot\beta^2$ dividirt,

$$\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\,\text{ſin}\varepsilon^2\right)(\text{ſin}\eta + \text{coſ}\eta\,tg\varepsilon)^2 - \text{ſin}\eta^2 -$$

$$2\,\text{ſin}\eta\,\text{coſ}\eta\,tg\varepsilon = \frac{pp\,\text{ſin}\varepsilon^2}{cc\,.\,\text{coſ}\beta^2} + \frac{pp\,\text{ſin}\varepsilon^2}{qq\,\cot\beta^2}.$$

Wird nunmehro noch im erſten Gliede gehörig multiplicirt, ſo hat man $\text{coſ}\eta^2\,tg\varepsilon^2 - \frac{p^2}{q^2}\,\text{ſin}\varepsilon^2$

$$(\text{ſin}\eta + \text{coſ}\eta\,tg\varepsilon)^2 = \frac{p^2\,\text{ſin}\varepsilon^2}{c^2\,.\,\text{coſ}\beta^2} +$$

$\frac{p^2\,\text{ſin}\varepsilon^2}{q^2\,\cot\beta^2}$, und wenn alles durch $\text{tang}\varepsilon^2$ dividirt

wird, ſo iſt auch $\text{coſ}\eta^2 - \frac{p^2}{q^2}\,.\,\text{ſin}\,(\eta + \varepsilon)^2 =$

$$\frac{p^2\,\text{coſ}\varepsilon^2}{c^2\,.\,\text{coſ}\beta^2} + \frac{p^2\,\text{coſ}\varepsilon^2}{q^2\,\cot\beta^2}.$$

4.) Aus dem 389. §. hat man nun

$$p = \frac{\sqrt{(a^4\,\text{ſin}\delta^2 + b^4\,\text{coſ}\delta^2)}}{\sqrt{(a^2\,\text{ſin}\delta^2 + b^2\,\text{coſ}\delta^2)}},$$ und $\text{ſec}\varepsilon^2 = 1 +$

$$\text{tang}\varepsilon^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 + (a^2\,tg\delta + b^2\cot\delta)^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

$$= \frac{a^4\,\text{ſec}\delta^2 + b^4\,\text{coſec.}\,\delta^2}{(a^2 - b^2)^2}$$

=

$$= \frac{a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2}{(a^2-b^2)^2 \sin\delta^2 \cos\delta^2}; \text{ alſo } \cos\varepsilon^2 = \frac{1}{\sec\varepsilon^2}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2 \sin\delta^2 \cos\delta^2}{a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2}, \quad \text{und}$$

$$p^2 \cos\varepsilon^2 = \frac{(a^2-b^2)^2 \sin\delta^2 \cos\delta^2}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2 \cos\delta^2}{a^2 + b^2 \cot\delta^2}. \quad \text{Ferner ist}$$

$$q = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2)}}, \text{ (389. §.) alſo}$$

$$\frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2} = \frac{(a^2-b^2)^2 \sin\delta^2 \cos\delta^2}{a^2 b^2}.$$

Weiter iſt $\frac{p^2}{q^2} = \frac{\sin\delta \cos\delta}{\sin\gamma \cos\gamma}$, und $\eta + \varepsilon = 180° - (\vartheta - \gamma)$, mithin erhält man $\frac{p^2}{q^2} \sin(\eta+\varepsilon)^2 = \frac{\sin\delta \cos\delta}{\sin\gamma \cos\gamma} (\sin\vartheta \cos\gamma - \cos\vartheta \sin\gamma)^2 = \frac{\sin\delta^2 \cot\delta}{\tang\gamma} (\sin\vartheta - \cos\vartheta \tang\gamma)^2$;

und weil $\tang\gamma = \frac{b^2}{a^2} \cot\delta$, ſo wird $\frac{p^2}{q^2} \sin(\eta+\varepsilon)^2 = \frac{a^2 \sin\delta^2}{b^2} \left(\sin\vartheta - \frac{b^2}{a^2} \cos\vartheta \cot\delta\right)^2$, oder auch $\frac{p^2}{q^2} \sin(\eta+\varepsilon)^2$

 =

$= \frac{\sin\delta^2 (a^2 \sin\vartheta - b^2 \cos\vartheta \cot\delta)^2}{a^2 b^2}$. Endlich iſt $\eta = 180° - (\vartheta + \delta)$ alſo $\cos\eta^2 = (\sin\vartheta \sin\delta - \cos\vartheta \cos\delta)^2 = \sin\delta^2 (\sin\vartheta - \cos\vartheta \cot\delta)^2$. Alle dieſe Werthe ſetze man in die im n. 3. am Ende gefundene Gleichung, und dividire ſie hiernächſt mit $\sin\delta^2$, ſo findet man $(\sin\vartheta - \cos\vartheta \cot\delta)^2 -$

$$\frac{(a^2 \sin\vartheta - b^2 \cos\vartheta \cot\delta)^2}{a^2 b^2} =$$

$$\frac{(a^2 - b^2)^2 \cot\delta^2}{(a^2 + b^2 \cot\delta^2) c^2 . \cos\beta^2} +$$

$\frac{(a^2 - b^2)^2 \cos\delta^2}{a^2 b^2 \cot\beta^2}$. Noch ſetze man im letzten Gliede $\cos\delta^2 = \frac{\cot\delta^2}{1 + \cot\delta^2}$, und multiplicire alles durch $a^2 b^2$, ſo erhält man $a^2 b^2 (\sin\vartheta - \cos\vartheta \cot\delta)^2 - (a^2 \sin\vartheta - b^2 \cos\vartheta \cot\delta)^2 =$

$$\frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2 \cot\delta^2}{(a^2 + b^2 \cot\delta^2) c^2 . \cos\beta^2} +$$

$\frac{(a^2 - b^2)^2 \cot\delta^2}{\cot\beta^2 (1 + \cot\delta^2)}$. Was vor dem Gleichheitszeichen ſteht, verwandelt ſich in den Ausdruck $(a^2 - b^2) b^2 \cos\vartheta^2 \cot\delta^2 - (a^2 - b^2) a^2 \sin\vartheta^2$, und wenn hiernächſt auf beyden Seiten durch $a^2 - b^2$ dividirt wird, ſo erhält man folgende Gleichung:

$$b^2 \cos\vartheta^2 \cot\delta^2 - a^2 \sin\vartheta^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2) \sec\beta^2 \cot\delta^2}{c^2 (a^2 + b^2 \cot\delta^2)}$$

+

$+ \frac{(a^2-b^2)\,tg\beta^2\,\cot\delta^2}{1+\cot\delta^2}$. Dieſe multiplicire man zuerſt mit $1+\cot\delta^2$, ſo findet man

$$b^2\cos\vartheta^2 . \cot\delta^4 - a^2\sin\vartheta^2 . \cot\delta^2$$
$$+ b^2\cos\vartheta^2 .$$
$$-(a^2-b^2)\,tg\beta^2 .$$
$$-a^2\sin\vartheta^2 = \frac{a^2b^2(a^2-b^2)\sec\beta^2\cot\delta^2(1+\cot\delta^2)}{c^2(a^2+b^2\cot\delta^2)} .$$

5.) Für den elliptiſchen Cylinder iſt c unendlich groß, und alsdenn verſchwindet der Ausdruck hinter dem Gleichheitszeichen, ſo daß man für $\cot\delta$ eine Gleichung der vierten Ordnung erhält, die ſich aber nach Art der quadratiſchen auflöſen läßt. Es wird nemlich

$$\cot\delta^4 - \left(\frac{a^2\,tg\vartheta^2}{b^2} + \frac{(a^2-b^2)\,tg\beta^2}{b^2\cos\vartheta^2} - 1\right).$$

$$\cot\delta^2 = \frac{a^2\,tg\vartheta^2}{b^2},\ \text{alſo}\ \cot\delta^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2\,tg\vartheta^2}{b^2} + \frac{(a^2-b^2)\,tg\beta^2}{b^2\cos\vartheta^2} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{a^2\,tg\vartheta^2}{b^2} + \frac{(a^2-b^2)\,tg\beta^2}{b^2\cos\vartheta^2} - 1\right)^2 + \frac{a^2\,tg\vartheta^2}{b^2}\right)},$$

und daraus wird $\cot\delta$ gefunden, wenn man von neuen die Quadratwurzel nimmt. Es iſt aber der eine Werth von $\cot\delta^2$ allemal negativ. und der andre poſitiv, demnach giebt es für $\cot\delta$ allemal zwey mögliche einander gleiche und

 entge-

entgegen geſetzte Werthe, aber auch nie mehrere, weil die übrigen beyden allemal unmöglich ſind. Für $\cot\psi$ hat man zugleich aus dem num. 2. die Gleichung $\left(1-\frac{p^2}{q^2}\sin\varepsilon^2\right)\cot\psi^2 + 2\cot\beta\sin\eta\,.\cot\psi = \frac{pp}{qq}\sin\varepsilon^2 - \cot\beta^2\sin\eta^2$, und wenn man $\frac{p}{q}=\mu$ ſetzt, ſo erhält man $\cot\psi^2 + \frac{2\cot\beta\sin\eta}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}\,.\cot\psi = \frac{\mu^2\sin\varepsilon^2-\cot\beta^2\sin\varepsilon^2}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}$, und

$$\cot\psi = -\frac{\cot\beta\sin\eta}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\cot\beta^2\sin\eta^2}{(1-\mu^2\sin\varepsilon^2)^2}+\frac{\mu^2\sin\varepsilon^2-\cot\beta^2\sin\eta^2}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}\right)}$$

oder $\cot\psi =$

$$\frac{-\cot\beta\sin\eta \pm \mu\sin\varepsilon\sqrt{(1+\cot\beta^2\sin\eta^2-\mu^2\sin\varepsilon^2)}}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}$$

Damit beyde Werthe möglich bleiben, wird erfordert, daß $1+\cot\beta^2\sin\eta^2$ nicht kleiner ſey, als $\mu^2\sin\varepsilon^2$, mithin $\cot\beta^2$ nicht kleiner, als $\frac{\mu^2\sin\varepsilon^2-1}{\sin\eta^2}$, oder $\cot\beta^2$ nicht kleiner, als $\frac{p^2\sin\varepsilon^2-q^2}{q^2\sin\eta^2}$. Wenn alſo gleich die vorhin für $\cot\delta$ gefundene Gleichung allemahl einen möglichen Werth für δ giebt; ſo folgt doch daraus nicht, daß man aus jedem elliptiſchen Cylinder einen Kreis ſchnei-

ſchneiden kann: denn hiezu wird erfordert, daß auch für cotψ ein möglicher Werth gefunden werde, wenn der für δ herausgebrachte Werth in der für cotψ gefundenen Glrichung gebraucht wird, wo
$\eta = 180° - (\vartheta + \delta)$, und $\tan\varepsilon = \dfrac{a^2 tg\delta + b^2 \cot\delta}{a^2 - b^2}$,
aus δ gefunden werden können.

6.) Für den elliptiſchen Kegel muß die am Ende des num. 4. gefundene Gleichung noch mit $a^2 + b^2 \cot\delta^2$ multiplicirt werden; wenn alsdenn $\dfrac{a^2 b^2}{c^2} = A^2$ geſetzt wird, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$
\begin{array}{llll}
b^4 \cos\vartheta^2 . \cot\delta^6 & - & a^2 b^2 \sin\vartheta^2 . \cot\delta^4 & \\
 & + & b^4 \cos\vartheta^2 . & \\
 & - & (a^2 - b^2)\, b^2\, tg\beta^2 . & \\
 & + & a^2 b^2 \cos\vartheta^2 & \\
 & - & A (a^2 - b^2) \sec\beta^2 . & \\
- & a^2 b^2 \sin\vartheta^2 . \cot\delta^2 - a^4 \sin\vartheta^2 = 0. & & \\
- & a^4 \sin\vartheta^2 & & \\
+ & a^2 b^2 \cos\vartheta^2 & & \\
- & a^2 (a^2 - b^2)\, tg\beta^2 . & & \\
- & A (a^2 - b^2) \sec\beta^2 . & &
\end{array}
$$

Noch dividire man alles mit $b^4 \cos\vartheta^2$, und ſetze $\cot\delta^2 = z$, ſo erhält man

$$
z^3 + \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} - \frac{a^2\, tg\vartheta^2}{b^2} \right) . z^2
$$
$$
- \frac{(a^2 - b^2)\, tg\beta^2}{b^2 \cos\vartheta^2} .
$$
$$
- \frac{a^2\, (a^2 - b^2) \sec\beta^2}{b^2 c^2 \cos\vartheta^2} .
$$

$$+\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{(a^2+b^2)a^2\,\mathrm{tg}\,\vartheta^2}{b^4}\right.$$
$$-\frac{a^2(a-b^2)\,\mathrm{tg}\,\beta^2}{b^4\cos\vartheta^2}$$
$$\left.-\frac{a^2(a^2-b^2)\sec\beta^2}{b^2c^2\cos\vartheta^2}\right).z-\frac{a^4}{b^4}\mathrm{tg}\,\vartheta^2=0$$

Dieſemnach kommt die völlige Auflöſung der Aufgabe auf die Auflöſung einer cubiſchen Gleichung an: eine Gleichung dieſer Art iſt ſchon im 550. §. Hydraul. vorgekommen, und daſelbſt bemerkt worden, daß jede ſolche Gleichung drey Wurzeln habe, unter welchen allemal eine möglich iſt, die übrigen beyden aber unmöglich ſeyn können. Nach einer in der Algebra zu beweiſenden Regel (M. ſ. meine Matheſin Theoreticam pag. 365. Anal. Math. §. 92) läßt ſich aus den Zeichen + und — vor den Coefficienten der Gleichung, wenn alle ihre Wurzeln möglich ſind, beurtheilen, wie viele poſitive und wie viele negative unter ihnen befindlich ſeyn müſſen: ſie hat alsdenn ſo viele poſitive Wurzeln, ſo viel mahl ein Paar entgegen geſetzte Zeichen auf einander folgen, und ſo viele negative, ſo viel mahl ein Paar übereinſtimmige Zeichen auf einander folgen. Nun hat in der für z gefundenen Gleichung allemahl das erſte Glied (+), das letzte aber (—) vor ſich. Wenn ferner der Coefficient des zweyten Gliedes negativ iſt, ſo iſt es gewiß auch der Coefficient des dritten Gliedes, denn in dem letztern iſt der poſitive Theil kleiner als der poſitive Theil des erſtern, der negative Theil aber gröſſer; mithin kann nur eine dreyfache Abwechſelung der Zeichen ſtatt haben, welche folgende drey Reihen vorſtellen.

+

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & - \end{array}$$

In allen dieſen Fällen iſt nur eine von den dreyen Wurzeln poſitiv, wenn alle möglich ſind: weil nun $\cot\delta = \pm\sqrt{z}$ gefunden wird, ſo kann $\cot\delta$ nie mehr als zwey mögliche für ſich gleiche und entgegen geſetzte Werthe haben, nur den einzigen Fall ausgenommen, wenn eine von den negativen Wurzeln der cubiſchen Gleichung $= 0$ wird. Auch hat $\cot\delta$ gewiß zwey mögliche Werthe, wenn alle drey Wurzeln der cubiſchen Gleichung möglich ſind: weil aber in dem Fall, wenn ſie zwo unmögliche Wurzeln hat, die dritte mögliche wohl negativ ſeyn könnte; ſo könnte auch wohl $\cot\delta$ gar keinen möglichen Werth haben.

Wenn c unendlich groß angenommen wird, ſo fällt aus den Coefficienten des zweyten und dritten Gliedes der in c dividirte Theil weg: der übrige Theil der Gleichung hat alsdenn den Factor $z + \frac{a^2}{b^2} = 0$, der die negative Wurzel $z = -\frac{a^2}{b^2}$, mithin für $\cot\delta$ ein Paar unmögliche Werthe giebt: der Quotient aber, welcher gefunden wird, wenn man die Gleichung mit $z + \frac{a^2}{b^2}$ dividirt, iſt mit der im n. 5. betrachteten Gleichung für

$\cot\delta$ einerley. Wenn übrigens wiederum $\frac{p}{q}=\mu$, $\frac{p}{c}=\nu$ angenommen wird, ſo hat man für den Kegel aus dem num. 2. $\cot\psi^2 + \frac{2\cot\beta\sin\eta}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}$.

$$\cot\psi = \frac{\nu^2\sin\varepsilon^2\operatorname{cosec}\beta^2+\mu^2\sin\varepsilon^2-\cot\beta^2\sin\eta}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2},$$

und daraus folgt $\cot\psi = -\frac{\cot\beta\sin\eta}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}$

$$\pm\surd\left(\frac{\cot\beta^2\sin\eta^2}{(1-\mu^2\sin\varepsilon^2)^2}+\frac{\nu^2\sin\varepsilon^2\operatorname{cosec}\beta^2+\mu^2\sin\varepsilon^2-\cot\beta^2\sin\eta^2}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}\right).$$

Die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen wird =

$$\frac{\nu^2\sin\varepsilon^2\operatorname{cosec}\beta^2+\mu^2\sin\varepsilon^2-\mu^2\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\varepsilon^2\operatorname{cosec}\beta^2+\mu^2\sin\varepsilon^2-\cot\beta^2\sin\eta^2)}{(1-\mu^2\sin\varepsilon^2)^2},$$

und man erhält $\cot\psi = -\frac{\cot\beta\sin\eta}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}\pm$

$$\frac{\sin\varepsilon\surd(\nu^2\operatorname{cosec}\beta^2+\mu^2(1+\cot\beta^2\sin\eta^2-(\nu^2\operatorname{cosec}\beta^2+\mu^2)\sin\varepsilon^2))}{1-\mu^2\sin\varepsilon^2}.$$

Damit alſo der kreisförmige Schnitt des elliptiſchen Kegels möglich bleibe, wird nicht allein erfordert, daß aus der vorigen Gleichung ein möglicher Werth für

für δ gefunden werde, ſondern es muß auch überdem dieſer Werth ſo beſchaffen ſeyn, daß wenn die Winkel $\eta = 180° - (\vartheta + \delta)$, und ε, deſſen Tangente $= \frac{a^2 tg\delta + b^2 \cot\delta}{a^2 - b^2}$, in dem Ausdruck für $\cot\psi$ gebraucht werden, die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen poſitiv bleibe, mithin $\nu^2 \mathrm{coſec}\beta^2 + \mu^2(1 + \cot\beta^2 \sin\eta^2)$ nicht kleiner als $(\nu^2 \mathrm{coſec}\beta^2 + \mu^2)\,\mu^2 \sin\varepsilon^2$ ausfalle. Vermöge dieſer Bedingung wird alſo erfordert, daß $\nu^2 \cot\beta^2 + \nu^2 + \mu^2 \cot\beta^2 \sin\eta^2$ nicht kleiner ſey als $\nu^2 \mu^2 \sin\varepsilon^2 \cot\beta^2 + \nu^2 \mu^2 \sin\varepsilon^2 + \mu^4 \sin\varepsilon^2$, oder $\cot\beta^2$ nicht kleiner als $\frac{(\nu^2 + \mu^2)(\mu^2 \sin\varepsilon^2 - 1)}{\nu^2 + \mu^2(\sin\eta^2 - \nu^2 \sin\varepsilon^2)}$. Es iſt aber

$$\nu^2 + \mu^2(\sin\eta^2 - \nu^2 \sin\varepsilon^2) = \frac{p^2}{c^2} + \frac{p^2}{q^2}.$$

$$\frac{c^2 \sin q^2 - p^2 \sin\varepsilon^2}{c^2} = \frac{p^2(q^2 + c^2 \sin\eta^2 - p^2 \sin\varepsilon^2)}{c^2 q^2},$$

und $(\nu^2 + \mu^2)(\mu^2 \sin\varepsilon^2 - 1) = \frac{p^2(c^2 + q^2)(p^2 \sin\varepsilon^2 - q^2)}{c^2 q^4}$; alſo wird erfordert, daß $\cot\beta^2$ nicht kleiner ſey, als $\frac{(c^2 + q^2)(p^2 \sin\varepsilon^2 - q^2)}{q^2(q^2 + c^2 \sin\eta^2 - p^2 \sin\varepsilon^2)}$.

397. §.

Die Lage des kreisförmigen Schnitts im graden elliptiſchen Kegel oder Cylinder zu finden.

Aufl.

Aufl. Wenn der Kegel grade, mithin $\beta=90°$ iſt, und tangβ, ſecβ, unendlich groß werden, ſo wird in der allgemeinen im num. 6. des vor. §. gefundenen Gleichung der Coefficient des zweyten und dritten Gliedes unendlich groß, mithin muß wenigſtens ein Werth von z unendlich groß ſeyn, oder dieſer Werth von z muß gegen $tg\beta^2$ und $\sec\beta^2$ ein endliches Verhåltniß haben. Es iſt nemlich, wie die Algebra umſtåndlicher lehren wird, der Coefficient des zweyten Gliedes die Summe der dreyen Wurzeln der Gleichung, die nicht unendlich groß ſeyn kånnte, wenn es nicht wenigſtens eine Wurzel wåre. Von den übrigen beyden Wurzeln iſt die eine $=0$, die andre negativ, und ſie werden auf folgende Art gefunden. Man nimmt an, daß z einen endlichen Werth habe, und dividiret alles durch $\tan\beta^2$ oder $\sec\beta^2$, ſo verſchwindet $\frac{z^2}{\tan\beta^2}$, und man erhålt $\frac{a^2+c^2}{c^2}z^2+\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2}z=0$, da dann die eine Wurzel dieſer Gleichung $=0$, die andre negativ iſt. Die letzte giebt für $\cot\delta$ ein Paar unmögliche Werthe, weil $z=-\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2(a^2+c^2)}$ gefunden wird: mithin muß entweder $\cot\delta$ unendlich groß, oder $\cot\delta=0$ ſeyn, das heiſt die Grundlinie des Schnitts muß entweder mit der Zwergaxe der Grundfläche parallel oder auf ihr ſenkrecht ſeyn.

Eben dieſe Schlüſſe finden für den Fall $\beta=90°$ auch ihre Anwendung, wenn man beym graden Cy-

Cylinder aus dem num. 5. die allgemeine für $\cot\delta^2$ gefundene Gleichung zum Grunde ſetzt: ſie giebt ebenfalls entweder einen unendlich groſſen Werth für $\cot\delta^2$, oder auch $\cot\delta^2 = 0$.

Der unendlich groſſe Werth von $\cot\delta$ giebt nun zugleich $\tang\varepsilon = \frac{a^2 tg\delta + b^2 \cot\delta}{a^2 - b^2}$ ebenfalls unendlich groß, und deswegen muß $\varepsilon = 90°$ ſeyn. Werden hiernächſt die Werthe $\cot\beta = 0$, $\sin\varepsilon = 1$, in der für $\cot\psi$ gefundenen Gleichung gebraucht; ſo verwandelt ſie ſich in folgende reine quadratiſche Gleichung $\cot\psi = \pm\sqrt{\frac{\nu^2 + \mu^2}{1 - \mu^2}}$, da dann $\nu = \frac{p}{c}$, $\mu = \frac{p}{q}$ iſt, alſo $\nu^2 + \mu^2 = \frac{p^2(c^2 + q^2)}{c^2 q^2}$, und $1 - \mu^2 = \frac{q^2 - p^2}{q^2}$, alſo $\cot\psi = \pm \frac{p\sqrt{(c^2 + q^2)}}{c\sqrt{(q^2 - p^2)}}$. Aus $\delta = 0$ aber findet man $p = b$, $q = a$, (389. §.) mithin $\cot\psi = \pm \frac{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}{c\sqrt{(a^2 - b^2)}}$. Zugleich hat man für den kreisförmigen Schnitt des elliptiſchen Cylinders $\cot\psi = \frac{b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

Der

Der Halbmeſſer des Schnitts wird aus dem 394. §. $= \frac{q(B-\delta)}{\sqrt{(B^2-pp)}}$ gefunden, $\varepsilon = 90°$ geſetzt, und in den allgemeinen Formuln war $B = \varepsilon(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \cos\eta)$; hier wird alſo $B = c.\cot\psi$, und der geſuchte Halbmeſſer $= \frac{q(c.\cot\psi - \delta)}{\sqrt{(c^2.\cot\psi^2 - p^2)}}$.

Hier bezeichnen nun wie im 389. §. a und b die beyden Hauptaxen der Grundfläche, und man hat $p = b$, $q = a$, alſo iſt der Halbmeſſer

$$= \frac{a(c.\cot\psi - \delta)}{\sqrt{(c^2.\cot\psi^2 - b^2)}},$$

für den Cylinder aber wird derſelbe $= a$. Braucht man den gefundenen Werth von $\cot\psi$, ſo hat man $c.\cot\psi - \delta =$

$$\frac{b\sqrt{(a^2+c^2)} - \delta\sqrt{(a^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2-b^2)}},$$

und

$$c^2.\cot\psi^2 - bb = \frac{b^2(a^2+c^2-(a^2-b^2))}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2-b^2};$$

mithin iſt der Halbmeſſer des Schnitts für den Kegel $=$

$$\frac{a(b\sqrt{(a^2+c^2)} - \delta\sqrt{(a^2-b^2)})}{b\sqrt{(b^2+c^2)}}.$$

Der zweyte Werth $\cot\delta = 0$, giebt ebenfalls tang ε unendlich groß, und $\varepsilon = 90°$, alſo wiederum

$$\cot\psi = \pm\sqrt{\frac{\nu^2+\mu^2}{1-\mu^2}},$$

oder

cot ψ

$\cot\psi = \pm \frac{p\surd(c^2+q^2)}{c\surd(q^2-p^2)}$. Nun aber iſt $\delta = 90°$, alſo $p = a$, $q = b$, und es wird $\cot\psi \pm \frac{a\surd(c^2+b^2)}{c\surd(b^2-a^2)}$ unmöglich, weil allemahl $b < a$ iſt. Demnach kann der Schnitt des graden elliptiſchen Kegels nur in dem einzigen Fall ein Kreis werden, wenn die Grundlinie des Schnitts mit der Zwergaxe parallel iſt.

398. §.

Die Grundlinie der Neigungsebene der Axe des ſchiefen elliptiſchen Kegels oder Cylinders fällt mit der Zwergaxe der Grundfläche zuſammen: man ſucht die Lage der Ebene des kreisförmigen Schnitts.

Aufl. 1.) Die angenommene Vorausſetzung beſtimmt $\vartheta = 0$, und hiemit verſchwindet in der allgemeinen cubiſchen Gleichung (369. §. n. 6.) das letzte Glied, ſo daß eine Wurzel $z = 0$, mithin durch $\cot\delta = \pm 0$, und $\delta = 90°$ ſeyn muß. Hiernächſt giebt es noch zwey Werthe für z, welche folgende quadratiſche Gleichung beſtimmt:

$$z^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{b^2} - \frac{a^2-b^2}{b^2}(tg\,\beta^2 + \frac{a^2}{c^2}\,sec\,\beta^2)\right) \cdot z + \frac{a^2}{b^2} - \frac{(a^2-b^2}{b^2} \left(\frac{a^2}{b^2}\,tg\,\beta^2 + \frac{a^2}{c^2}\,sec\,\beta^2\right) = 0.$$

Wenn

Wenn das letzte völlig bekannte Glied dieſer Gleichung poſitiv iſt, ſo iſt es auch der Coefficient des zweyten Gliedes: alsdenn ſind beyde Wurzeln dieſer quadratiſchen Gleichung negativ, und es giebt für $\cot\delta$ weiter keinen möglichen Werth, als den vorigen $\cot\delta = 0$. In andern Fällen hat die quadratiſche Gleichung allemahl eine poſitive und eine negative Wurzel, wenn beyde möglich ſind, mithin giebt es alsdenn noch ein Paar gleich groſſe einander entgegen geſetzte Werthe für $\cot\delta$. Aus dem gefundenen Werth $\cot\delta$ ſucht man hiernächſt die Winkel ε und $\eta = 180 - (\vartheta + \delta)$ ſo wie auch p und q, und dieſe Werthe im 396. §. n. 6. gebraucht geben beyde dazu gehörige Werthe von $\cot\psi$.

2.) Wenn man den erſten Werth $\cot\delta = 0$, alſo $\delta = 90°$ annimmt; ſo hat man auch $\varepsilon = 90°$, und $\eta = 180° - (\vartheta + \delta) = 90°$, weil $\vartheta = 0$ iſt. Das giebt im 396. §. n. 6. $\cot\psi =$

$$\frac{-\cot\beta \pm \sqrt{((\nu^2 + \mu^2)\operatorname{coſec}\beta^2 - \mu^2(\nu^2 \operatorname{coſec}\beta + \mu^2))}}{1 - \mu^2}.$$

Weiter hat man $p = a$, $q = b$, alſo $\mu = \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$,

$$\nu = \frac{p}{c} = \frac{a}{c},\quad 1 - \mu^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2},\quad \nu^2 + \mu^2 =$$

$$\frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2c^2},$$ und $\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2 =$

$$\frac{a^2(b^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + c^2)}{b^2c^2};$$ mithin

$\cot\psi$

$$\cot\psi = \frac{b^2 \cot\beta}{a^2 - b^2} \mp \frac{a\sqrt{(b^2(b^2+c^2)\operatorname{coſec}\beta^2 - a^2(b^2\operatorname{coſec}\beta^2 + c^2))}}{c(a^2 - b^2)},$$

und die Bedingung der Möglichkeit iſt, daß $\cot.\beta^2$ nicht kleiner ſey, als $\frac{(b^2+c^2)(a^2-b^2)}{b^2(b^2+c^2-a^2)}$.

Für den elliptiſchen Cylinder hat man

$$\cot\psi = \frac{b^2 \cot\beta}{a^2 - b^2} \mp \frac{a\sqrt{(b^2\operatorname{coſec}\beta^2 - a^2)}}{a^2 - b^2},$$

und es muß $\cot.\beta^2$ nicht kleiner ſeyn, als $\frac{a^2-b^2}{b^2}$.

399. §.

Die Grundlinie der Axe des ſchiefen elliptiſchen Kegels oder Cylinders fällt mit der zugeordneten Axe der Grundfläche zuſammen: man ſucht die Lage der Ebene des kreisförmigen Schnitts.

Aufl. Durch die angenommene Vorausſeẞung wird $\vartheta = 90°$ beſtimmt, das giebt $\operatorname{tang}\vartheta$, $\sec\vartheta$, unendlich groß: mithin iſt eine Wurzel der für z gefundenen cubiſchen Gleichung unendlich groß, alſo auch ein Werth von $\cot\delta$, und das giebt $\vartheta = 0$. Um die übrigen beyden Wurzeln zu finden, laſſe man die endlichen Theile aus den Coefficienten weg, und drücke die Gleichung ſo aus

$$z^3 - \frac{a^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^2} \cdot z^2$$

$$- \frac{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\beta^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^2}.$$

$$- \frac{(a^2-b^2)\sec\beta^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^2 c^2}.$$

$$- \frac{(a^2+b^2)\,a^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^4} \cdot z - \frac{a^4}{b^4} \operatorname{tg}\vartheta^2 = 0.$$

$$- \frac{a^2(a^2-b^2)\operatorname{tg}\beta^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^4}.$$

$$- \frac{a^2(a^2-b^2)\sec\beta^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^2 c^2}$$

man ſetze ferner voraus, daß ſtatt z einer der übrigen beyden endlichen Werthe ſubſtituirt ſey, und dividire alles durch $\operatorname{tg}\vartheta^2$, oder $\sec\vartheta^2$, welches hier einerley iſt, ſo verſchwindet $\frac{z^3}{\operatorname{tg}\vartheta^2}$, und man erhält eine quadratiſche Gleichung für z, welche die beyden übrigen Wurzeln der cubiſchen beſtimmen würde. Weil aber alle drey Glieder dieſer quadratiſchen Gleichung einerley Zeichen vor ſich haben, ſo ſind ihre beyden Wurzeln, wenn ſie möglich ſind, allemal negativ, und können für $\cot\delta = \pm\sqrt{z}$ weiter keinen möglichen Werth geben.

Man nehme alſo $\delta = 0$ an, ſo hat man $\operatorname{tang}\gamma = \frac{b^2}{a^2}\cot\delta$ unendlich groß, mithin $\gamma = 90°$, $\varepsilon = \delta + \gamma = 90°$, und $\eta = 180° - (\vartheta + \delta) = 90°$. Dieſemnach findet man

$$\cot\psi = -\frac{\cot\beta}{1-\mu^2} \qquad \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{(\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2(\operatorname{coſec}\beta^2 - \nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 - \mu^2))}}{1-\mu^2},$$

oder $\cot\psi =$

$$\frac{-\cot\beta \pm \sqrt{((\nu^2+\mu^2)\operatorname{coſec}\beta^2 - \mu^2(\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2))}}{1-\mu^2}.$$

Weiter hat man $p = b$, $q = a$, alſo $\mu = \frac{b}{a}$,

$\nu = \frac{b}{c}$, $1-\mu^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, $\nu^2+\mu^2 = \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2 c^2}$, $\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2 = \frac{(a^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + c^2) b^2}{a^2 c^2}$. Dieſe Werthe geben $\cot\psi =$

$$\frac{-a^2 c . \cot\beta \pm b\sqrt{((a^2+c^2-b^2)a^2 \operatorname{coſec}\beta^2 - b^2 c^2)}}{c(a^2-b^2)}.$$

Was unter dem Wurzelzeichen ſteht iſt allemahl poſitiv, weil $a > b$ iſt, mithin iſt die Auflöſung allemahl möglich; welches auch die im 396. §. n. 6. feſtgeſetzte Bedingung der Möglichkeit anzeigt, vermöge welcher $\cot\beta^2$ nicht kleiner als $\frac{(a^2+c^2)(b^2-a^2)}{a^2(a^2+c^2-b^2)}$ ſeyn muß: hier aber iſt b^2-a^2 negativ, und $\cot\beta^2$ allemahl poſitiv.

Für den Cylinder hat man $\cot\psi = \frac{-a^2 \cot\beta \pm b\sqrt{(a^2 \operatorname{coſec}\beta^2 - b^2)}}{a^2-b^2}$, und die Auflöſung iſt ebenfalls allemahl möglich.

400. §.

Wenn man aus dem 398. §. n. 2. die Formul

$$\cot\psi = \frac{b^2 c \cot\beta \mp a\sqrt{(b^2(b^2+c^2-a^2)\operatorname{coſec}\beta^2 - a^2 c^2)}}{c(a^2-b^2)}$$

mit der Formul

$$\cot\psi = \frac{-a^2 c \cot\beta \pm b\sqrt{((a^2+c^2-b^2)a^2\operatorname{coſec}\beta^2 - b^2 c^2)}}{c(a^2-b^2)}$$

aus dem 399. §. vergleicht, ſo nimmt man leicht die Uebereinſtimmung wahr, daß eine in die andre verwandelt wird, wenn man b und a mit einander verwechſelt, wie auch der Natur der Sache gemäß iſt. Setzt man nun $b=a$, ſo verwandelt ſich der elliptiſche Kegel in einen Apollonianiſchen, weil die Grundfläche ein Kreis wird. Von den beyden Werthen $\cot\psi$, welche die beyden Formuln anzeigen, wird nun der eine unendlich groß, wie der Natur der Sache gemäß iſt, weil der mit der Grundfläche parallele Schnitt nun auch ein Kreis wird: der andre Werth $\cot\psi$ aber wird eine Differenz zweyer unendlichen Gröſſen, die wohl endlich ſeyn könnte, und auf folgende Art geſucht werden muß.

Im 344. §. Hydraul. iſt bereits der ſo genannte Binomiſche Lehrſatz gebraucht worden, wovon die Algebra umſtändlicher handeln wird, und vermöge deſſen jede Potenz wie $(1+x)^n$ ſich ſo ausdrücken läßt: $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 \ldots\ldots$ es mag übrigens n

eine

eine ganze oder gebrochene poſitive, oder negative Zahl ſeyn. Um nun kurz zu überſehen, wie ſich beyde Werthe von cotψ aus dem 398. und 399. §. verändern, wenn man $b=a$ ſetzt, vor dem Wurzelzeichen aber das Zeichen + braucht, nehme man aus dem 396. §. n. 6. den allgemeinen Ausdruck für cotψ nur mit der Einſchränkung, daß $\varepsilon=\eta=90^\circ$ ſey, ſo hat man

$$\cot\psi = -\frac{\cot\beta}{1-\mu^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\cot\beta^2}{(1-\mu^2)^2} + \frac{\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2 - \cot\beta^2}{1-\mu^2}\right)}.$$

In dieſem Ausdruck iſt die Wurzelgröſſe

$$= \frac{\cot\beta}{1-\mu^2}\sqrt{(1 + (\nu^2 \operatorname{ſec}\beta^2 + \mu^2 \operatorname{tang}\beta^2 - 1)(1-\mu^2))},$$

und wenn der zweyte Theil unter dem Wurzelzeichen $=x$ geſetzt wird, ſo hat man

$$\sqrt{(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \ldots$$

Noch ſetze man

$$\frac{\cot\beta^2}{1-\mu^2} = y,$$

ſo hat man

$xy = \nu^2 \operatorname{ſec}\beta \operatorname{coſec}\beta + \mu^2 tg\beta - \cot\beta$, und dieſer Ausdruck $=m$ geſetzt giebt $y\sqrt{(1+x)} = y + \frac{1}{2}m - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2}m\cdot x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}m\cdot x^2 \ldots$

Wenn alſo vor dem Wurzelzeichen + gebraucht

 wird,

wird, ſo hat man $\cot\psi = -y + y\sqrt{(1+x)} = \frac{1}{2}m$
$- \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2} m\cdot x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3} m\cdot x^2 \ldots$

Im 398. §. n. 2. iſt nun $\mu = \frac{a}{b}$, und im 399. §. hat man $\mu = \frac{b}{a}$: in beyden Fällen alſo wird $\mu = 1$, wenn $b = a$ wird, da dann zugleich $x = 0$ iſt, und es wird $\cot\psi = \frac{1}{2}m$. Ueberdem hat man in beyden Fällen $\nu = \frac{a}{c}$, weil b mit a einerley iſt; alſo $\cot\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c^2}\sec\beta\,\mathrm{coſec}\,\beta + tg\beta - \cot\beta\right)$

$$= \frac{a^2\sec\beta\,\mathrm{coſec}\,\beta + c^2(tg\beta - \cot\beta)}{2c^2}, \text{ oder}$$

$$\cot\psi = \frac{a^2 + c^2(\sin\beta^2 - \cos\beta^2)}{2c^2\sin\beta\cos\beta}, \text{ mithin}$$

$$\cot\psi = \frac{a^2 - c^2.\cos 2\beta}{c^2\sin 2\beta}.$$ Hier iſt nun a der Halbmeſſer der Grundfläche des Apollonianiſchen Kegels, der im 289. §. r hieß, und ſo erhellet, daß die dortige Aufgabe nur ein beſondrer Fall von den im 398. und 399. §. vorgetragenen Aufgaben ſey: wie denn auch die daſelbſt betrachteten Schnitte des elliptiſchen Kegels mit der ſectione coni ſubcontraria darin überein kommen, daß die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene der Axe des Kegels gegen die Grundfläche ſenkrecht iſt.

401 §.

401. §.

Wenn ein auf der Neigungsebene der Axe des elliptiſchen Kegels oder Cylinders ſenkrechter Schnitt ein Kreis werden ſoll; ſo muß die Grundlinie der Axe mit einem der beyden Hauptdurchmeſſer der Grundfläche zuſammen fallen.

Beweis. Die angenommene Vorausſetzung erfordert, daß $\eta = 90°$ ſey: alsdenn aber verwandelt ſich die am Ende des num. 3. im 396. §. gefundene Gleichung in folgende $\frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2} + \frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{c^2 \cos\beta^2} + \frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2 \cot\beta^2} = 0$, und dieſer Ausdruck kann nicht verſchwinden, wofern nicht $\cos\varepsilon = 0$, mithin auch $\varepsilon = 90°$ iſt. Weil aber allemahl $\eta + \vartheta + \delta = 180°$ iſt, ſo hat man hier $\vartheta + \delta = 90°$. Weiter iſt $\tang\varepsilon = \frac{a^2 \tang\delta + b^2 \cot\delta}{a^2 - b^2}$ unendlich groß, mithin endweder $\delta = 0$, oder $\delta = 180°$, alſo auch entweder $\vartheta = 90°$ oder $\vartheta = 0$, mithin muß die Grundlinie der Axe mit einem von beyden Hauptdurchmeſſern zuſammen fallen.

402. §.

Die Lage der Tafel gegen die Ebene einer Ellipſe iſt gegeben, nebſt der Lage der Hauptdurchmeſſer der Ellipſe gegen die Grundlinie der Tafel: man ſucht, wo das Auge ſtehen muß, damit das Bild der Ellipſe kreisförmig ſey.

Aufl. Die Aufgabe nimmt an, daß die Winkel δ und ψ gegeben ſind, mithin auch γ, ε; und man muß η oder ϑ und β ſuchen. Beyde Winkel η und β können aus den Gleichungen

1.) $\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta = -\cos\beta \cos\eta \tan\varepsilon$

2.) $(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)^2 - \frac{p^2}{c^2} \sin\varepsilon^2 = \frac{p^2}{q^2} \sin\varepsilon^2 \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2$, (396. §. n. 2.) gefunden

werden. Die erſte giebt $\tan\beta = -\frac{\cos\eta \tan\varepsilon + \sin\eta}{\cot\psi}$, und wenn in der zweyten $\frac{p}{q} = \mu$ $\frac{p}{c} = \nu$ geſetzt wird, ſo erhält man $(\tan\beta \cot\psi + \sin\eta)^2 - \nu^2 \sin\varepsilon^2 \sec\beta^2 = \mu^2 \sin\varepsilon^2 \operatorname{cosec}\psi^2\, tg\beta^2$; wenn man ferner $tg\beta^2 + 1 = \sec\beta^2$ ſetzt, hiernächſt aber alles gehörig ordnet, ſo findet man $(\cot\psi^2 - \sin\varepsilon^2 (\nu^2 + \mu^2 \operatorname{cosec}\psi^2)) . tg\beta^2 + 2 \sin\eta \cot\psi . tg\beta + \sin\eta^2 - \nu^2 \sin\varepsilon^2 = 0$. In dieſe Gleichung ſetze man aus der erſten den Werth $\tan\beta = -(\cos\eta\, tg\varepsilon + \sin\eta)\, tg\psi$, ſo findet man $(1 - \sin\varepsilon^2 (\nu^2 tg\psi^2 + \mu^2 \sec\psi^2) (\cos\eta\, tg\varepsilon + \sin\eta)^2 - 2 \sin\eta (\cos\eta\, tg\varepsilon + \sin\eta) + \sin\eta^2 - \nu^2 \sin\varepsilon^2 = 0$, und daraus folgt: $\cos\eta^2 tg\varepsilon^2 - \sin\varepsilon^2 (\nu^2 tg\psi^2 + \mu^2 \sec\psi^2) (\cos\eta\, tg\varepsilon + \sin\eta)^2 - \nu^2 \sin\varepsilon^2 = 0$. Nun dividire man alles durch $\cos\eta^2 \sin\varepsilon^2$ und ſetze im letzten Gliede $tg\eta^2 + 1$ ſtatt $\sec\eta^2$, ſo erhält man $(\nu^2 tg\psi^2 + \mu^2 \sec\psi^2)(tg\varepsilon + tg\eta)^2 + \nu^2 tg\eta^2 + \nu^2 - \sec\varepsilon^2 = 0$. Im erſten Gliede ſetze man $\sec\psi^2 - 1$

ſtatt

ſtatt $\tan g\psi^2$, ſo findet man $(\nu^2+\mu^2)\sec\psi^2(tg\varepsilon+tg\eta)^2-\nu^2 tg\varepsilon^2-2\nu^2 tg\varepsilon tg\eta+\nu^2-\sec\varepsilon^2=0$, und das gehörig geordnet giebt $(\nu^2+\mu^2)\sec\psi^2 . tg\eta^2+2 tg\varepsilon(\nu^2 tg\psi^2+\mu^2\sec\psi^2) . tg\eta+\nu^2(1-tg\varepsilon^2)-\sec\varepsilon^2=0$. oder $tg\eta^2+\frac{2 tg\varepsilon(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)}{\nu^2+\mu^2} tg\eta$

$$=\frac{(\nu^2 tg\varepsilon^2+\sec\varepsilon^2-\nu^2)\cos\psi^2}{\nu^2+\mu^2}.$$ Daraus folgt

$$tg\eta=-\frac{tg\varepsilon(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)}{\nu^2+\mu^2}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{tg\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)^2}{(\nu^2+\mu^2)^2}\right.}$$

$$\left.+\frac{(\nu^2\tan g\varepsilon^2+\sec\varepsilon^2-\nu^2)\cos\psi^2}{\nu^2+\mu^2}\right).$$

Wenn aus dieſer Gleichung, worin man ε willkührlich, und allemahl ſo annehmen kann, daß die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen poſitiv bleibt, η gefunden iſt, ſo ſucht man β aus der Gleichung

$$tg\beta^2-\frac{2\sin\eta\cot\psi}{\sin\varepsilon^2(\nu^2+\mu^2\operatorname{cosec}\psi)-\cot\psi^2} . tg\beta$$

$$=\frac{\sin\eta^2-\nu^2\sin\varepsilon^2}{\sin\varepsilon^2(\nu^2+\mu^2\operatorname{cosec}\psi^2)-\cot\psi^2},$$

oder $$tg\beta^2-\frac{2\sin\eta\cos\psi . tg\beta}{\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)-\cos\psi^2}$$

$$=\frac{(\sin\eta^2-\nu^2\sin\varepsilon^2)\sin\psi^2}{\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)-\cos\psi^2},$$

 und

und dieſe giebt $tg\beta =$

$$\frac{\sin\eta\cos\psi \pm \surd\,(\sin\eta^2\cos\psi^2 + (\sin\eta^2 - \nu^2\sin\varepsilon^2)\sin\psi^2(\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)-\cos\psi^2))}{\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2+\mu^2)-\cos\psi^2}.$$

Aus η hat man übrigens auch $\vartheta = 180 - (\eta+\delta)$, und ſo iſt hiemit zugleich die Aufgabe aufgelöſt: **was der elliptiſche Kegel für eine Geſtalt haben muß, wenn ein Schnitt deſſelben in gegebener Lage ein Kreis werden ſoll.** In der Perſpectiv hat man nun noch $D\operatorname{coſec}\psi + \delta = B = c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta)$, und $A = c\sin\beta$. Wenn alſo der Abſtand $\delta = CL$ des Mittelpuncts der Ellipſe von der Grundlinie der Tafel gegeben, oder willkührlich angenommen wird, ſo hat man den Abſtand des Auges von der Tafel $D = (c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta) - \delta)\sin\psi$, und die Höhe des Auges $A = c\sin\beta$. Wird überdem der Abſtand des Mittelpuncts der Ellipſe von der Ebene des Auges $TL = \Delta$ geſetzt, ſo hat man auch $\Delta = c.\cos\beta\cos\eta$.

403. §.

1.) Wenn einer von beyden Hauptdurchmeſſern die Grundlinie der Tafel ſenkrecht ſchneidet, ſo hat man entweder $\delta = 90^\circ$, oder $\delta = 0$, und in beyden Fällen iſt $\varepsilon = 90^\circ$, $tg\varepsilon$ und $\sec\varepsilon$ ſind unendlich groß, mithin ſind beyde Werthe von $\tan\eta$ unendlich groß, und es muß auch $\eta = 90^\circ$ ſeyn. Das giebt $\Delta = 0$, und der Mittelpunct der Ellipſe muß in der Ebene des Auges liegen. Uebrigens wird β vermittelſt der Gleichung

$tg\beta =$

$$tg\beta = \frac{\cos\psi \pm \surd(\cos\psi^2 + \sin\psi^2(1-\nu^2)(\nu^2\sin\psi^2 + \mu^2 - \cos\psi^2))}{\nu^2\sin\psi^2 + \mu^2 - \cos\psi^2}$$

gefunden.

2.) Stehet die Tafel auf der Ebene der Elſipſe ſenkrecht, ſo hat man $\sin\varphi = 1$, $\cos\psi = 0$, mithin entweder $\tan g\eta = 0$, oder $\tan g\eta = -2\tan g\varepsilon$: mithin im letzten Fall $\cot\eta^2 = \frac{1}{4}\cot\varepsilon^2$, $\operatorname{cosec}\eta^2 = 1 + \frac{1}{4}\cot\varepsilon^2$, und $\sin\eta^2 = \frac{4}{4+\cot\varepsilon^2} = \frac{4\sin\varepsilon^2}{4\sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2}$. Der erſte Werth $\tan g\eta = 0$ würde auch $\sin\eta = 0$, und für $tg\beta$ was unmögliches geben: es wird nemlich in der Vorausſetzung $\psi = 90°$ vermöge des 402. §. $\tan g\beta = \surd \frac{\sin\eta^2 - \nu^2\sin\varepsilon^2}{\sin\varepsilon^2(\nu^2+\mu^2)}$. Wird dagegen in dieſer Gleichung der Werth $\sin\eta^2 = \frac{4\sin\varepsilon^2}{4\sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2}$ gebraucht, ſo hat man $\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\eta^2} = \sin\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\cos\varepsilon^2$, und man erhält

$$\tan g\beta = \pm\surd \frac{1-\nu^2(\sin\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\cos\varepsilon^2)}{(\nu^2+\mu^2)(\sin\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\cos\varepsilon^2)}.$$

3.) Verbindet man mit der im num. 2. angenommenen Vorausſetzung noch die im num. 1. angenommene, ſo iſt allemahl $\varepsilon = 90°$, es mag

$\delta =$

$\delta = 90°$, oder $\delta = 0$ angenommen ſeyn; alſo findet man $tg\beta = \pm \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{\nu^2 + \mu^2}}$. Wenn nun die Zwergaxe der Ellipſe auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht, mithin $\delta = 90°$ iſt; ſo hat man $\nu = \frac{a}{c}$, $\mu = \frac{a}{b}$, und $\tang\beta = \pm \sqrt{\frac{b^2(c^2 - a^2)}{a^2(b^2 + c^2)}}$, da dann für die orthographiſche Projection $tg\beta = \pm \frac{b}{a}$ wird. Iſt umgekehrt die zugeord- nete Axe der Ellipſe auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht, ſo hat man $\delta = 0$, $\nu = \frac{b}{c}$, $\mu = \frac{b}{a}$, und $\tang\beta = \pm \sqrt{\frac{a^2(c^2 - b^2)}{b^2(a^2 + c^2)}}$, für die or- thographiſche Projection aber $\tang\beta = \pm \frac{a}{b}$.

404. §.

Wenn der grade elliptiſche Cylinder mit einer Ebene geſchnitten wird, ſo verhält ſich das Product beyder Hauptdurchmeſſer des Schnitts zum Product beyder Hauptdurch- meſſer der Grundfläche, wie die Secante des Neigungswinkels der Ebene des Schnitts ge- gen die Grundfläche zum ganzen Sinus.

Beweis. Es iſt allemahl für den Schnitt des graden elliptiſchen Cylinders $P = p \cdot \sec\psi \, \operatorname{cosec}\zeta \, \sin\varepsilon$,

und

und $Q = q$; (394. §.) mithin hat man $P.Q = p.q.\sec\psi \operatorname{cosec}\zeta \sin\varepsilon$, oder $P.Q.\sin\zeta = p.q.\sin\varepsilon \sec\psi$. Wenn aber a, b, beyde Hauptdurchmeſſer der Grundfläche, A, B, beyde Hauptdurchmeſſer des Schnitts bedeuten, ſo iſt $P.Q.\sin\zeta = A.B$, und $p.q.\sin\varepsilon = a.b$, (284. §.) alſo $A.B = a.b.\sec\psi$, und $A.B : a.b = \sec\psi : 1$.

Hr. Euler beweiſet dieſen Lehrſatz in der Introd. in Analyſin Infinitorum Tom. II. Append. Cap. III. §. 64. pag. 354. und drückt ihn ſo aus, als wenn er allgemein für jeden elliptiſchen Cylinder richtig wäre: allein Hr. Euler hat keinen andern als den graden Cylinder betrachtet. (M. ſ. oben den 269. §.) Für den ſchiefen Cylinder hat man

$$P.Q.\sin\zeta = \frac{p.q.\sin\varepsilon \sin\beta \operatorname{cosec}\psi}{\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta}, \text{ alſo}$$

$$A.B. = \frac{a.b.\tan\beta}{\tan\beta \cos\psi + \sin\eta \sin\psi}.$$

Der

Der XXIX. Abſchnitt.

Von den Projectionen der Parabel.

405. §.

Die Lage einer Parabel in der Fundamental-Ebene iſt gegeben, nebſt der Lage der Tafel: man ſucht eine Gleichung für die Projection der Parabel.

Aufl. 1.) Die geſuchte Gleichung muß unter der allgemeinen Form

$$yy = \frac{2QQ}{P} x - \frac{QQ}{PP} xx$$

enthalten ſeyn, wenn $\frac{2QQ}{P} = \frac{2qq(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{p.L}$,

und $\frac{QQ}{PP} = \frac{(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon - p^2)qq}{p^2 L^2}$ angenommen wird. (390. §.) Vermöge der Natur der Parabel aber ſind p und q unendlich groß, jedoch ſo daß $\frac{qq}{p}$ endlich und $\frac{2qq}{p} = g$ der Parameter desjenigen Durchmeſſers der Parabel iſt, der die mit der Grund-

linie

linie der Projection parallelen Ordinaten halbirt. Dieſemnach muß man nur die Formuln ſo verändern, daß ſtatt der beyden Durchmeſſer p und q der Parameter g in die Rechnung eingeführt wird, und ſo erhält man gleich ohne Umweg $\frac{2QQ}{\delta} =$

$\frac{g(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon}{L}$ für den Parameter desjenigen Durchmeſſers der Projection, dem die mit der Grundlinie der Tafel parallelen Ordinaten zugeordnet ſind. Bey dieſem Ausdruck iſt zu bemerken, daß zwar B und δ unendlich groß werden, aber $B-\delta = D\,\mathrm{coſec}\,\psi$ bleibt endlich, (es wäre denn die Projection orthographiſch, wovon jetzt aber noch nicht die Rede iſt,) und eben ſo iſt auch $L = A.\,\mathrm{coſec}\,\psi$ $\mathrm{coſec}\,\zeta$ endlich, wenn A die Höhe des Auges über der Fundamentalebene bedeutet. Um den Ausdruck für $\frac{QQ}{PP}$ von den unendlichen Gröſſen zu befreyen, erwäge man, daß $p = \delta\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - c$ war, $FA = c$ geſetzt; (389. §.) mithin hat man $B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + p =$ 130 131F.

$(B+\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - c$, und $\frac{B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + p}{p} =$

$\frac{(B+\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - c}{\delta\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - c} = 2$, weil $\frac{B}{\delta} = 1$ wird,

und c endlich iſt. Weiter hat man $B\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon - p =$ $(B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + c$, alſo $\frac{B^2\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon^2 - pp}{p}$

$= 2((B-\delta)\,\mathrm{coſec}\,\varepsilon + c)$, und das

giebt

giebt $\frac{QQ}{PP} = \frac{B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - p^2}{p.L^2} . \frac{qq}{p} = \frac{g((B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon + c)}{L^2}$: mithin iſt die Gleichung für die Projection $yy = \frac{g.D\operatorname{coſec}\varepsilon}{A.\operatorname{coſec}\zeta} . x - \frac{g(D\operatorname{coſec}\varepsilon + c\sin\psi)\sin\psi}{A^2 \operatorname{coſec}\zeta^2} x^2$. Den Anfangspunct der Abſciſſen giebt die Gleichung

135 F. $Fa = \frac{c.L}{D\operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon + c}$ (389. §.) oder

$Fa = \frac{A.c.\operatorname{coſec}\zeta}{D\operatorname{coſec}\varepsilon + c\sin\psi}$.

2.) Weil $\frac{PP}{QQ} = \frac{L^2}{g((B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon + c)}$ war, und $\frac{QQ}{P} = \frac{g(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{2L}$, ſo findet man $P = \frac{PP}{QQ} . \frac{QQ}{P}$

$= \frac{\frac{1}{2}L(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon + c}$, und

$Q = \frac{\sqrt{(g(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon + c)}}{L}$.

$P = \frac{\frac{1}{2}(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon\sqrt{g}}{\sqrt{((B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon + c)}}$. Für den Coordi-

na-

natenwinkel ζ hat man $\mathrm{tang}\,\zeta = \frac{A.\mathrm{coſec}\psi}{f + D\,\mathrm{coſec}\psi\,\mathrm{cot}\varepsilon}$, und f iſt aus der gegebenen Lage der Parabel bekannt. Im 389. §. iſt $TK = h$, $K\alpha = k$ angenommen, und $KF = \frac{(k+a)\,b^2\,\mathrm{coſ}\delta}{a^2\,\mathrm{ſin}\delta^2 + b^2\,\mathrm{coſ}\delta^2}$ gefunden, den Winkel $TK\alpha = \delta$, und a, b, für die Hauptdurchmeſſer des abzubildenden Kegelſchnitts angenommen, da dann $f = h - KF$ wird. Hier kann man den Zähler und Nenner des Bruchs, welcher KF ausdrückt, durch a dividiren, und $\frac{2bb}{a} = \pi$ ſetzen, ſo iſt π der Parameter der Zwergaxe, und man erhält $KF = \frac{\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{coſ}\delta}{\mathrm{ſin}\delta^2}$, oder $KF = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{cot}\varepsilon\,\mathrm{coſec}\varepsilon$, weil hier $\delta = \varepsilon$ iſt, welches auch mit dem 274. und 278. §. übereinſtimmt. Dieſemnach hat man $f = h - \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{cot}\varepsilon\,\mathrm{coſec}\varepsilon$ und $\mathrm{tang}\,\zeta =$

$$\frac{A\,\mathrm{coſec}\psi}{h - \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{cot}\varepsilon\,\mathrm{coſec}\varepsilon + D\,\mathrm{coſec}\psi\,\mathrm{cot}\varepsilon}.$$

3.) Noch iſt für $FA = c$ im 389. §. der Ausdruck $\frac{(k+a)\,\mathrm{ſin}\delta\sqrt{(a^4\,\mathrm{ſin}\delta^2 + b^4\,\mathrm{coſ}\delta^2)}}{a^2\,\mathrm{ſin}\delta^2 + b^2\,\mathrm{coſ}\delta^2} - p$ gefunden, der ſich auch ſo verändern läßt:

$$FA = \frac{(k+a)\,\mathrm{ſin}\delta}{\sqrt{(a^2\,\mathrm{ſin}\delta^2 + b^2\,\mathrm{coſ}\delta^2)}} \cdot p - p = \frac{k+a}{\sqrt{(a^2 + b^2\,\mathrm{cot}\delta^2)}} \cdot p - p,$$

weil $p = \sqrt{\frac{a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2}{a^2 \sin\delta^2 + b^2 \cos\delta^2}}$ war, oder

$$p = \sqrt{\left(a^2 - \frac{b^2 (a^2 - b^2) \cot\delta^2}{a^2 + b^2 \cot\delta^2}\right)} = a\sqrt{\left(1 - \frac{(b^2 : a^2)(a^2 - b^2) \cot\delta^2}{a^2 + b^2 \cot\delta^2}\right)}.$$

Der negative Theil unter dem Wurzelzeichen verſchwindet für die Parabel, wenn a und b unendlich groß werden, weil alsdenn $\frac{b}{a}$ verſchwindet, und man findet nach der im 400. §. gebrauchten Regel für die Parabel $p = a - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a} \cot\delta^2 = a - \frac{1}{4} \pi \cot\delta^2$.

Es wird alſo $\frac{p}{\sqrt{(a^2 + b^2 \cot\delta^2)}} = 1$, und weil nach eben der Regel des 400. §. $\sqrt{(a^2 + b^2 \cot\delta^2)}$

$$= a\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cot\delta^2\right)} = a + \frac{1}{4} \pi \cot\delta^2$$

gefunden wird, ſo erhält man

$$c = k + \frac{a(a - \frac{1}{4}\pi \cot\delta^2)}{a + \frac{1}{4}\pi \cot\delta^2} - (a - \frac{1}{4}\pi \cot\delta^2)$$

$$= k - \frac{\frac{1}{4} a \pi \cot\delta^2 - \frac{1}{16} \pi^2 \cot\delta^4}{a + \frac{1}{4}\pi \cot\delta^2},$$

oder $c = k - \frac{1}{4}\pi \cot\delta^2$. Wenn man aus A und F auf die Zwergaxe der Parabel ſenkrecht Linien in q und f zieht, ſo iſt $c = \mathrm{FA} = fq = \mathrm{K}\alpha + \alpha q - \mathrm{K}f$, vermöge der Natur der Parabel aber

$\alpha q =$

$\alpha q = \frac{Aq^2}{\pi} = \frac{1}{4}\pi \cot\varepsilon^2$, (278. §.) und aus eben dem Grunde $Kf = \frac{1}{2}\pi \cot\varepsilon^2$, mithin $c = k - \frac{1}{4}\pi \cot^2$, wie vorhin, weil hier $\delta = \varepsilon$ iſt.

4.) Man ſchreibe von nun an $D\operatorname{coſec}\psi$ ſtatt $B - \delta$ in den gefundenen Formuln, und ſetze bey dieſer Unterſuchung den Abſtand αl, um welchen der Scheitel der Zwergaxe αC von der Grundlinie der Tafel entfernt iſt, $= \delta$, ſo hat man $\alpha K = k = \delta \operatorname{coſec}\varepsilon$, alſo $c = \delta \operatorname{coſec}\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cot\varepsilon^2$, und man findet

$$P = \frac{\frac{1}{2}L \cdot D\operatorname{coſec}\psi \sin\varepsilon}{(D\operatorname{coſec}\psi + \delta)\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2},$$

$$Q = \frac{\frac{1}{2}D\operatorname{coſec}\psi \sqrt{g}}{\sqrt{((D\operatorname{coſec}\psi + \delta)\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2)}},$$

$$\frac{QQ}{PP} = \frac{g((D\operatorname{coſec}\psi + \delta)\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2}{L^2 \sin\varepsilon^2},$$

$$\frac{2QQ}{P} = \frac{g\, D\operatorname{coſec}\psi}{L \sin\varepsilon},$$

$$Fa = \frac{(\delta \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2)L}{(D\operatorname{coſec}\psi + \delta)\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2}.$$

Weil übrigens $g = \pi \operatorname{coſec}\varepsilon^2$, (278. §.) ſo hat man auch $Q = \frac{\frac{1}{2}D\operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{((D\operatorname{coſec}\psi + \delta)\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2)}}$,

$$\frac{QQ}{PP} = \frac{\pi((D\operatorname{coſec}\psi + \delta)\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2)}{L^2 \sin\varepsilon^4},$$

$$\frac{2QQ}{P} = \frac{\pi D\operatorname{coſec}\psi}{L \sin\varepsilon^3},$$

Die Projection der Parabel iſt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel, nachdem $(D \operatorname{coſec}\psi + \delta) \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \operatorname{coſ}\varepsilon^2$ poſitiv, oder $= 0$, oder negativ iſt, wenn man vorausſetzt, daß der Parameter π poſitiv ſey, da dann, wie in der Figur angenommen wird, die erhabene Seite der Parabel der Tafel zugekehrt iſt. Liegt die Parabel umgekehrt, ſo daß ſie die hohle Seite der Tafel zukehrt; ſo nimmt man π negativ an, und die gefundenen Formuln ergeben, daß die Projection allemahl eine Hyperbel ſey, ſo lange δ poſitiv iſt, d. i. ſo lange der Scheitel der abzubildenden Parabel hinter der Tafel liegt.

406 §.

Man ſtelle ſich wiederum das Auge als die Spitze der optiſchen Kegelfläche vor, und die Parabel als die Grundfläche, ſo hat man einen Begrif von einer **Paraboliſchen Kegelfläche**. Dieſe hat wiederum die Haupteigenſchaft, daß jede grade Linie von ihrer Spitze nach einen Punct im Umfang der Grundfläche gezogen ganz in derſelben liegt: auch ſind eigentlich zwey dergleichen Kegelflächen einander an der Spitze entgegen geſetzt, und erſtrecken ſich von dort aus zu beyden Seiten ins unendliche fort. Weil der Mittelpunct der Parabel vom Scheitel eines jeden Durchmeſſers unendlich weit weg liegt; ſo kann der Begrif von der Axe des Kegels hier nicht eben ſo wie bey der Ellipſe ſeine Anwendung finden, ſie würde allemahl mit der Grundfläche parallel liegen, der Kegel müſte denn eine unendlich groſſe Höhe haben. Deswegen läßt ſich hier ſtatt der Axe bequemer eine Seitenlinie des **paraboliſchen Kegels** in die Rechnung einführen, worunter jede grade

linie verſtanden werden kann, die ſich von der Spitze nach einen Punct im Umfang der Parabel erſtreckt: auf ſolche Art kann die Projection der Parabel zugleich als ein Schnitt des paraboliſchen Kegels betrachtet werden. Nimmt man hiernächſt jene Seitenlinie des Kegels unendlich groß, mithin alle übrige Seitenlinien damit parallel an, ſo verwandelt ſich der paraboliſche Kegel in einen Cylinder, und die Projection wird orthographiſch. Weil übrigens der Scheitelpunct der Zwergaxe, als der Scheitel der Parabel ſelbſt, allemahl als ein bekannter Punct im Umfang der Grundfläche angeſehen iſt, ſo kann füglich diejenige Seitenlinie des paraboliſchen Kegels, welche durch den Scheitelpunct der Grundfläche geht, als die erſte betrachtet, und in der Rechnung ſo wie ſonſt die Axe des elliptiſchen Kegels gebraucht werden.

407. §.

Die allgemeine Gleichung für den Schnitt des paraboliſchen Kegels zu finden, wenn ſeine Abmeſſungen, und die Lage der Ebene des Schnitts gegeben ſind.

Aufl. 1.) Die Lage der Ebene des Schnitts 131
iſt durch den Winkel ε, unter welchem ſeine Grund- 135 F.
linie die Durchmeſſer der Parabel ſchneidet, und den Neigungswinkel ψ gegen die Grundfläche beſtimmt: zugleich iſt der Scheitelpunct α der Zwergaxe gegeben. Wenn nun O die Spitze des Kegels und OS ſeine Höhe iſt, ſo iſt die Ebene αOS auf der Grundfläche ſenkrecht, und die Abmeſſungen des Kegels ſind beſtimmt, wenn auſſer dem Parameter π der

Zwergare der Parabel die Winkel $K\alpha S = \vartheta$, $S\alpha O = \beta$ gegeben ſind, nebſt der Länge der Seitenlinien αO, die ich $= e$ ſetze. Das giebt $OS = e \sin\beta = A$, $\alpha S = e \cos\beta$, und wenn αS die Grundlinie des Schnitts bey w unter dem Winkel η ſchneidet, $\alpha l = \delta$ aber auf ihr ſenkrecht iſt; ſo hat man $\alpha\lambda = \alpha S \sin\eta = e \cos\beta \sin\eta$, und $\lambda\delta = Ss = OS \cot\psi = e \sin\beta \cot\psi$: mithin $\alpha\delta = D \operatorname{cosec}\psi + \delta = e(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$. Eben ſo findet man $f = TF = Tl + lK - KF = e \cos\beta \cos\eta + \delta \cot\varepsilon - \frac{1}{2}\pi \cot\varepsilon \operatorname{cosec}\varepsilon$, und ſo ergiebt ſich für den Coordinatenwinkel des Schnitts die Gleichung $\tang\zeta =$

$$\frac{\sin\beta \operatorname{cosec}\psi}{\cos\beta \cos\eta + (\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta) \cot\varepsilon - \frac{1}{2}(\pi : e).\cot\varepsilon \operatorname{cosec}\varepsilon}$$

Ferner hat man $L = e \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta$, und wenn $D \operatorname{cosec}\psi + \delta = B$ geſetzt wird, ſo geben ſich folgende Abmeſſungen des Schnitts: $P = \frac{\frac{1}{2} L (B - \delta) \sin\varepsilon}{B \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2}$,

$$Q = \frac{\frac{1}{2}(B - \delta) \operatorname{cosec}\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{(B \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2)}}, \quad \frac{QQ}{PP} = \frac{\pi (B \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2)}{L^2 \sin\varepsilon^4}, \quad \frac{2QQ}{P} = \frac{\pi (B - \delta)}{L \sin\varepsilon^3}, \text{ und}$$

$$Fa = \frac{(\delta \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2).L}{B \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2}.$$

Der

Der Schnitt iſt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem $B \sin\varepsilon >=< \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2$, oder $B \operatorname{cosec}\varepsilon >=< \frac{1}{4}\pi \cot\varepsilon^2$. Man ziehe durch α eine Parallele mit der Grundlinie des Schnitts die den Durchmeſſer AC in β ſchneidet, und mit eben der Grundlinie ſey durch A eine Parallele gezogen, welche die Zwergaxe in t ſchneidet, ſo iſt $\alpha t = \alpha q$ (297. §.) $= \frac{1}{4}\pi \cot\varepsilon^2$ (405. §. n. 3.) Wenn man ſich nun aus dem 258. §. erinnert, daß allemahl die Ebene $Osg \# r$TF ſey, und βF hier $= \delta \operatorname{cosec}\varepsilon$ alſo $\beta g = (D \operatorname{cosec}\psi + \delta) \operatorname{cosec}\varepsilon = B \operatorname{cosec}\varepsilon$, ſo erhellet, daß der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel ſey, nachdem die Seitenlinie AO des Kegels von der Ebene des Schnitts entweder oberhalb A, oder gar nicht, oder unterhalb A geſchnitten wird. Im erſten Fall wird nur einer von den entgegengeſetzten Kegeln, und zugleich alle Seitenlinien deſſelben, im zweyten Fall ebenfalls nur einer von den entgegen geſetzten Kegeln, aber alle Seitenlinien weniger eine, im dritten Fall beyde entgegen geſetzte Kegel, und zugleich alle Seitenlinien weniger zwey geſchnitten.

Will man ſtatt $\delta = \alpha l$ den Abſtand $\alpha\omega$ desjenigen Puncts ω vom Scheitel α der Zwergaxe αC der Parabel als gegeben annehmen, worin die erſte Seitenlinie αO des paraboliſchen Kegels die Ebene des Schnitts trift; ſo hat man $\alpha\omega = \dfrac{\alpha w \,.\, \sin \alpha w \omega}{\sin(\alpha w \omega + \beta)}$

$$= \frac{\alpha w \,.\, \tang \alpha w \omega}{\tang \alpha w \omega \,.\, \cos\beta + \sin\beta}.$$ Im körperlichen Dreyeck, deſſen Spitze w iſt, und deſſen Seitenflächen $\alpha w \omega$, αwF, $= \eta$, F$w\omega$ ſind, iſt der Winkel

 an

an $\alpha w = 90^\circ$, der Winkel an $wF = \psi$, alſo $\tan \alpha w \omega = \sin\eta \tan\psi$; (538. §. Geom. n. II.) wenn alſo $\alpha\omega = \Delta$ geſetzt wird, ſo hat man

$$\Delta = \frac{\alpha w \,.\, \sin\eta \tan\psi}{\sin\eta \tan\psi \cos\beta + \sin\beta}.$$

Es iſt aber $\alpha w \,.\, \sin\eta$ hier $= \delta$, alſo $\Delta = \dfrac{\delta \tan\psi}{\sin\eta \tan\psi \cos\beta + \sin\beta}$, und umgekehrt $\delta = \Delta (\sin\eta \cos\beta + \sin\beta \cot\psi)$. Wird dieſer Werth ſtatt δ, und der vorhin ſchon feſtgeſetzte Werth ſtatt B gebraucht, ſo hat man $B - \delta = (e - \Delta)(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$, mithin

$$P = \frac{\frac{1}{2} L (e - \Delta)(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta) \sin\varepsilon}{B \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2},$$

$$Q = \frac{\frac{1}{2}(e - \Delta)(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)\sqrt{\pi}}{\sin\varepsilon \sqrt{(B \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi \cos\varepsilon^2)}},$$

$$\frac{2QQ}{P} = \frac{\pi (e - \Delta)(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)}{e \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta \sin\varepsilon}.$$

2.) Wenn die Seitenlinie e des Kegels unendlich groß angenommen wird, ſo verwandelt ſich derſelbe in einen paraboliſchen Cylinder, und man wendet die vorgetragenen Formuln leicht auf den Cylinderſchnitt an. Die allgemeine Form der Gleichung bleibt $yy = \dfrac{Q^2}{P^2}(2P - x)x$, oder auch

$$yy = \frac{2QQ}{P}x - \frac{QQ}{PP}xx,$$

und der allgemeine Ausdruck für $\tan\zeta$ wird =

$$= \frac{\sin\beta \operatorname{coſec}\psi}{\operatorname{coſ}\beta \operatorname{coſ}\eta + (\sin\beta \cot\psi + \operatorname{coſ}\beta \sin\eta)\cot\varepsilon}.$$

Hingegen werden P und Q unendlich groß, jedoch Q um eine Ordnung niedriger als P, ſo daß

$$\frac{2QQ}{P} = \frac{\pi B}{L\sin\varepsilon^3} = \frac{\pi(\cot\psi + \cot\beta\sin\eta)}{\operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta \sin\varepsilon^3}$$

endlich bleibt; aber $\frac{QQ}{PP}$ verſchwindet, und Fa

$$\text{wird} = \frac{(\delta\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi\operatorname{coſ}\varepsilon^2)L}{B\sin\varepsilon} =$$

$$\frac{(\delta\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi\operatorname{coſ}\varepsilon^2)\operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta}{\cot\psi + \cot\beta\sin\eta}.$$

Dieſemnach iſt der Schnitt des paraboliſchen Cylinders, mithin die orthographiſche Projection der Parabel allemahl ebenfalls eine Parabel, und die Gleichung des Schnitts iſt

$$yy = \frac{\pi(\cot\psi + \cot\beta\sin\eta)}{\operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta \sin\varepsilon^3}\, x.$$

Der mit der Grundfläche parallele Schnitt des paraboliſchen Kegels iſt allemahl auch eine Parabel, und weil der Coordinatenwinkel $\zeta = \varepsilon$ wird, ſo iſt der Parameter ihres Durchmeſſers, worauf die Abſciſſen genommen werden $= \frac{\pi(e - \Delta)}{e\sin\varepsilon^2}$, der Parameter ihrer Zwergaxe $= \frac{\pi(e-\Delta)}{e}$.

408. §.

Die Zwergaxe der Parabel liegt mit der Grundlinie des Schnitts parallel: man ſucht die Gleichung für den Schnitt des paraboliſchen Kegels oder Cylinders: oder welches einerley iſt, die Gleichung für die Projection der Parabel.

Aufl. 1.) Die Parabel hat keinen Durchmeſſer, der die mit der Zwergaxe parallelen Ordinaten unter einem ſchiefen Winkel ε halbiren kann. Man müſte für dieſen Fall $\varepsilon = 0$ ſetzen, und das würde auch $\zeta = 0$ geben, da dann der Parameter des für die Abſciſſenlinie angenommenen Durchmeſſers ſowohl der paraboliſchen Grundfläche ſelbſt, als auch des Schnitts unendlich groß würde, welches der Natur der Parabel gemäß nicht anders erfolgen kann. Alle ihre mit der Zwergaxe parallele Ordinaten ſind eigentlich unendlich groß, und würden von der zugeordneten Axe ſenkrecht halbirt werden, wenn dieſe nicht ſelbſt vom Scheitel der Zwergaxe unendlich weit entlegen wäre. Deswegen muß man für dieſen beſondern Fall die Rechnung ſo anſtellen.

Es ſey AC die Zwergaxe der Parabel, TF die
126F. damit parallele Grundlinie des Schnitts, AF auf ihr ſenkrecht, QM eine der Zwergaxe zugeordnete ſenkrechte halbe Ordinate, π der Parameter der Zwergaxe, $AQ = x$, $QM = y$, ſo hat man $yy = \pi . x$. Man ziehe MP auf AF ſenkrecht, nehme nun FA für die Abſciſſenlinie, A für den Anfangspunct der Abſciſſen, ſetze $AP = t$, $PM = u$, ſo hat man $y = t$, $x = u$, und es wird $tt = \pi . u$ die Gleichung für die

Pa-

Parabel. Um nun hieraus die Gleichung für die Projection zu finden, brauche man aus dem 102. §. die Werthe

$$t = \frac{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c)^2\,x}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,.\,L - (D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c)\,x},$$

$$u = \frac{(D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c)\,L\,.\,y}{D\,\mathrm{coſec}\,\psi\,.\,L - (D\,\mathrm{coſec}\,\psi + c)\,x},$$

da dann $c = AF$ iſt, ſtatt deſſen hier auch δ geſchrieben, und $D\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta = B$ angenommen werden kann, ſo iſt $t = \frac{B^2\,x}{(B - \delta)\,L - B\,x}$, und

$u = \frac{B\,.\,L\,.\,y}{(B - \delta)\,L - B\,x}$. Dieſemnach erhält man

folgende Gleichung für den Schnitt: $\frac{B^4\,x^2}{((B - \delta)\,L - B\,x)^2}$

$= \frac{\pi\,.\,B\,.\,L\,.\,y}{(B - \delta)\,L - B\,x}$, und daraus folgt

$B^3\,x^2 = \pi\,.\,L\,.\,((B - \delta)\,L - b\,x)\,y$, oder

$$y = \frac{B^3\,x^2}{\pi\,L\,((B - \delta)\,L - B\,x)}.$$

2.) Dieſe Gleichung ergiebt, daß der Schnitt des paraboliſchen Kegels, oder die Projection der Parabel, in dieſem beſondern Fall allemahl eine Hyperbel ſey, die ſich in dem Fall $B = \delta$ in eine grade Linie verwandelt, weil der Schnitt alsdenn durch die Spitze des Kegels geht. Für den Cylinderſchnitt aber, und die orthographiſche Projection der Parabel, hat

hat man $y = \frac{B^2 x^2}{\pi L^2}$, und dieſe Gleichung gehört für eine Parabel, wie man gleich ſiehet, wenn man y als die Abſciſſe und x als die Applicate betrachtet; da dann der Parameter ihres mit der Grundlinie der Tafel parallelen Durchmeſſers $= \frac{\pi L^2}{B^2}$ iſt.

Die Tangente des Coordinatenwinkels ζ iſt allemahl

$$= -\frac{D \operatorname{coſec} \psi}{f} = \frac{\sin \beta \operatorname{coſec} \psi}{\operatorname{coſ} \beta \operatorname{coſ} \eta} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ſec} \eta \operatorname{coſec} \psi,$$

auch für den Fall des Kegelſchnitts, der nun beſonders betrachtet werden ſoll.

3.) Man nehme nemlich zuerſt $B > \delta$ an, ſo iſt ſowohl für kleine poſitive als auch für kleine negative Werthe von x die Applicate y poſitiv, woraus ſo viel erhellet, daß beyde Aeſte *am*, *an* des Bogens *man* der Projection ſich von *a* aus nach der Seite
129F. der Abſciſſenlinie erſtrecken, wohin die poſitiven Applicaten laufen, daß mithin die Projection und die Abſciſſenlinie einander im Anfangspunct *a* der Abſciſſen berühren. Wenn $x = \frac{B - \delta}{B} \cdot L$ genommen wird, ſo wird y unendlich groß, und für gröſſere x negativ. Wenn demnach $aB = \frac{B - \delta}{B} \cdot L$ genommen und BC durch B mit der Grundlinie der Tafel parallel gezogen wird, ſo iſt BC eine Aſymtote der Projection. Ueberdem

aber

aber iſt $Fa = \frac{\delta . L}{B}$, mithin wird

$FB = \frac{\delta . L}{B} + \frac{B - \delta}{B} . L = L$, und die Aſym-
tote BC iſt mit der Gränzlinie derjenigen Ebene einerley, worin die abgebildete Parabel liegt, und B iſt ihr Augenpunct.

Man rücke den Anfangspunct der Abſciſſen aus a nach B, und ſetze $Bp = t$, ſo hat man $ap = x = aB - t = \frac{B - \delta}{B} . L - t$; dieſe Werthe geben $B^2 x^2 = (B - \delta)^2 L^2 - 2B(B - \delta) L . t + B^2 t^2$,

$\pi L . xy = \frac{\pi L^2 (B - \delta)}{B} . y - \pi L . ty$,

und wenn man dieſe Ausdrücke in die für die Projection gefundene Gleichung ſetzt, ſo verwandelt ſie ſich in folgende zwiſchen t und y: $(B - \delta)^2 L^2 - 2B (B - \delta) L . t + B^2 t^2 = \pi L . t . y$.

4.) Nun nehme man die Aſymtote, BC für die Abſciſſenlinie, und $m\pi$ ſey eine Applicate, welche die Aſymtote unter dem Winkel $m\pi q = \xi$ ſchneidet. Wenn alsdenn mq mit FB parallel gezogen, und $B\pi = s$, $\pi m = z$ geſetzt wird; ſo findet man auf folgende Art eine Gleichung zwiſchen s und z. Im Dreyeck $qm\pi$ iſt $mq = Bp = t$, alſo $\pi m = z = \frac{t \sin \zeta}{\sin \xi}$,

und $q\pi = \frac{z \sin (\xi + \zeta)}{\sin \zeta}$, mithin

$pm =$

$$pm = Bq = y = s + \frac{z \sin(\xi + \zeta)}{\sin\zeta},$$

$t = \frac{z \sin\xi}{\sin\zeta}$. Man ſetze dieſe Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung, ſo erhält man

$$(B-\delta)^2 L^2 - \frac{2B(B-\delta)L.\sin\xi}{\sin\zeta}.z$$

$$+ \frac{B^2 \sin\xi^2}{\sin\zeta^2}.zz = \frac{\pi L \sin\xi}{\sin\zeta}.sz$$

$$+ \frac{\pi L \sin\xi \sin(\xi+\zeta)}{\sin\zeta^2}.zz,$$ oder auch

$$\frac{(\pi L \sin(\xi+\zeta) - B^2 \sin\xi)\sin\xi}{\sin\zeta^2}.zz$$

$$+ \frac{(\pi.s + 2B(B-\delta))L\sin\xi}{\sin\zeta}.z = (B-\delta)^2 L^2.$$

Weil nun der Winkel ξ willkührlich angenommen werden kann, ſo nehme man ihm ſo an, daß $\pi L \sin(\xi + \zeta) = B^2 \sin\xi$ wird. Das giebt nun zuerſt $\pi L(\sin\xi \cos\zeta + \cos\xi \sin\zeta) = B^2 \sin\xi$, und $\pi L \,\mathrm{tg}\xi \cos\zeta + \pi L \sin\zeta = B^2 \,\mathrm{tg}\xi$, mithin $\mathrm{tang}\xi = \frac{\pi L \sin\zeta}{B^2 - \pi L \cos\zeta}$; die Gleichung für die Projection aber verwandelt ſich in folgende: $z = \frac{(B-\delta)^2 L \sin\zeta}{(2B(B-\delta) + \pi.s)\sin\xi}$. Bey der angenommenen Gröſſe des Winkels ξ hat alſo wiederum z für

für jede Abſciſſe s nur einen Werth, derſelbe wächſt, wenn s abnimmt, wird unendlich groß, wenn $s = -\frac{2B(B-\delta)}{\pi}$ iſt, und für gröſſere negative Werthe s wird z negativ, und nimmt wieder ab. Wenn alſo $BC = \frac{2B(B-\delta)}{\pi}$ angenommen und CD mit πm parallel gezogen wird, ſo iſt auch CD eine Aſymtote der Projection, und beyde Aſymtoten ſchneiden einander in C unter einem Winkel ξ, deſſen Tangente $= \frac{\pi L \sin\zeta}{B^2 - \pi L \cos\zeta}$ iſt.

Endlich verrücke man den Anfangspunct der Abſciſſen aus B nach C, und ſetze $C\pi = w$, ſo hat man $w = CB + s = \frac{2B(B-\delta)}{\pi} + s$. Das giebt $2B(B-\delta) + \pi . s = \pi . w$, die zuletzt gefundene Gleichung zwiſchen s und z verwandelt ſich in folgende: $w . z = \frac{(B-\delta)^2 L \sin\zeta}{\pi \sin\xi}$, und das iſt die Gleichung einer Hyperbel zwiſchen ihren Aſymtoten. (309. 310. §.) Eben die Gleichung ergiebt, daß ſich die Projection in eine grade Linie verwandele, wenn $B = \delta$ iſt, weil alsdenn z für jede Abſciſſe w einen verſchwindenden Werth hat. Wenn aber $\delta > B$ iſt, ſo iſt die Projection ebenfalls eine Hyperbel.

Aus dem 314. §. weis man, daß allemahl $aB = aD$ ſey, mithin iſt

BD =

$BD = \frac{2(B-\delta)}{B} . L$; weil nun

$BC = \frac{2B(B-\delta)}{\pi}$ war; ſo läſt ſich die zweyte Aſymtote leicht durch Hülfe der Puncte C und D finden.

409. §.

Die Lage der Ebene des Schnitts oder der Tafel zu finden, welche erfordert wird, wenn der Schnitt des paraboliſchen Kegels, oder die Projection der Parabel, ein Kreis werden ſoll.

Aufl. Zuerſt wird erfordert, daß $\zeta = 90°$, mithin tang ζ unendlich groß ſey, und ſo hat man aus dem 407. §., wenn $\frac{\pi}{e} = \mu$ geſetzt wird,

$\cos\beta \cos\eta \operatorname{tang}\varepsilon + \sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta = \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\varepsilon$,
oder
$\cot\psi + \cot\beta \sin\eta = \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\beta \operatorname{coſec}\varepsilon - \cot\beta \cos\eta \operatorname{tg}\varepsilon$,
alſo
$\cot\psi = \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\beta \operatorname{coſec}\varepsilon - \cot\beta (\sin\eta + \cos\eta \operatorname{tg}\varepsilon)$

135 F. oder $\cot\psi = \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\beta \operatorname{coſec}\varepsilon - \frac{\cot\beta \sin(\eta+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}$.

Wenn nun wie im 407. §. angenommen ward, der Winkel $Kw\alpha = \eta$, und $K\alpha s = \vartheta$ geſetzt wird, ſo hat man $\eta + \varepsilon + \vartheta = 180°$, und $\cot\psi = \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\beta \operatorname{coſec}\varepsilon - \frac{\cot\beta \sin\vartheta}{\cos\varepsilon}$. Hiernächſt iſt die zweyte

Be-

Bedingung, welche die Aufgabe fordert, dieſe, daß QQ=PP ſey, mithin $\pi(B\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi\cos\varepsilon^2) = L^2\sin\varepsilon^4$, und es iſt $B = e(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta)$, $L = e\sin\beta\operatorname{cosec}\psi$, weil der Vorausſetzung gemäß $\operatorname{cosec}\zeta = 1$ ſeyn muß. Dieſemnach hat man folgende Gleichung $\mu(\sin\beta\sin\varepsilon\cot\psi + \cos\beta\sin\eta\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\mu\cos\varepsilon^2) = \sin\beta^2\operatorname{cosec}\psi^2\sin\varepsilon^4 . = \sin\beta^2\sin\varepsilon^4 + \sin\beta^2\sin\varepsilon^4\cot\psi^2$.

Man ſubſtituire $\cot\psi = \frac{1}{2}\mu\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\varepsilon - \dfrac{\cot\beta\sin\vartheta}{\cos\varepsilon}$, ſo wird $\sin\beta\sin\varepsilon\cot\psi = \frac{1}{2}\mu - \cos\beta\sin\vartheta\,\mathrm{tang}\,\varepsilon$, und $\sin\beta^2\sin\varepsilon^4\cot\psi^2 = \sin\varepsilon^2(\frac{1}{2}\mu - \cos\beta\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\varepsilon)^2$, folglich erhält man $\frac{1}{2}\mu^2 - \mu\cos\beta\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\varepsilon + \mu\cos\beta\sin\eta\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\mu^2\cos\varepsilon^2 = \sin\beta^2\sin\varepsilon^4 + \frac{1}{4}\mu^2\sin\varepsilon^2 - \mu\cos\beta\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sin\varepsilon^2 + \cos\beta^2\sin\vartheta^2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon^2\sin\varepsilon^2$. Ferner iſt $\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{4}\mu^2\cos\varepsilon^2 = \frac{1}{4}\mu^2 + \frac{1}{4}\mu^2\sin\varepsilon^2$, und $\mu\cos\beta\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\varepsilon(1 - \sin\varepsilon^2) = \mu\cos\beta\sin\vartheta\sin\varepsilon\cos\varepsilon$, daher verwandelt ſich die Gleichung in folgende: $\frac{1}{4}\mu^2 - \mu\cos\beta\sin\vartheta\sin\varepsilon\cos\varepsilon + \mu\cos\beta\sin\eta\sin\varepsilon = \sin\beta^2\sin\varepsilon^4 + \cos\beta^2\sin\vartheta^2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon^2\sin\varepsilon^2$. Weil überdem $\eta = 180° - (\vartheta + \varepsilon)$, alſo $\sin\eta = \sin\vartheta\cos\varepsilon + \cos\vartheta\sin\varepsilon$, ſo findet man $\frac{1}{4}\mu^2 + \mu\cos\beta\cos\vartheta\sin\varepsilon^2 = \sin\beta^2\sin\varepsilon^4 + \cos\beta^2\sin\vartheta^2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon^2\sin\varepsilon^2$, und wenn alles mit $\cos\varepsilon^2 = 1 - \sin\varepsilon^2$ multiplicirt wird, $(\frac{1}{4}\mu^2 + \mu\cos\beta\cos\vartheta\sin\varepsilon^2 - \sin\beta^2\sin\varepsilon^4)(1 - \sin\varepsilon^2) = \cos\beta^2\sin\vartheta^2\sin\varepsilon^4$.

Man ſchreibe z ſtatt $\sin\varepsilon^2$, und ordne alles gehörig, ſo erhält man die cubiſche Gleichung

$$\begin{array}{llll} \sin\beta^2 . z^3 & -\mu\cos\beta\cos\vartheta . z^2 & -\frac{1}{4}\mu^2 . z & +\frac{1}{4}\mu^2 = 0. \\ & -\sin\beta^2 & +\mu\cos\beta\cos\vartheta & \\ & -\cos\beta^2\sin\vartheta^2 & & \end{array}$$

Wenn aus dieſer Gleichung z gefunden iſt, ſo hat man auch $\sin\varepsilon = \pm\sqrt{z}$, daß alſo die negativen Wurzeln dieſer cubiſchen Gleichung für $\sin\varepsilon$ unmögliche Werthe geben. Nachdem aber ε gefunden iſt, hat man ferner $\sin\beta^2 \sin\varepsilon^4 . \cot\psi^2 - \mu \sin\beta \sin\varepsilon . \cot\psi = \mu \cos\beta \sin\eta \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\mu^2 \cos\varepsilon^2 - \sin\beta^2 \sin\varepsilon^4$, oder $\cot\psi^2 - \mu \operatorname{cosec}\beta \operatorname{cosec}\varepsilon^3 . \cot\psi = \mu \cot\beta \operatorname{cosec}\beta \sin\eta \operatorname{cosec}\varepsilon^3 - \frac{1}{4}\mu^2 \operatorname{cosec}\beta^2 \cot\varepsilon^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1$. und man findet $\cot\psi = \frac{1}{2}\mu \operatorname{cosec}\beta \operatorname{cosec}\varepsilon^3 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\mu^2 \operatorname{cosec}\beta^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 (\operatorname{cosec}\varepsilon^4 - \cot\varepsilon^2) + \mu \cot\beta \operatorname{cosec}\beta \sin\eta \operatorname{cosec}\varepsilon^3 - 1)}$. Uebrigens iſt $\operatorname{cosec}\varepsilon^4 - \cot\varepsilon^2$

$$= \frac{1}{\sin\varepsilon^4} - \frac{\cos\varepsilon^2}{\sin\varepsilon^2} = \frac{1 - \cos\varepsilon^2 \sin\varepsilon^2}{\sin\varepsilon^4} =$$

$$\frac{1 - \sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^4}{\sin\varepsilon^4} = \cot\varepsilon^2 (\operatorname{cosec}\varepsilon^2 + \cot\varepsilon^2),$$ und

man hat auch $\cot\psi = \operatorname{cosec}\beta \operatorname{cosec}\varepsilon (\frac{1}{2}\mu \operatorname{cosec}\varepsilon^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\mu^2 (\operatorname{cosec}\varepsilon^2 + \cot\varepsilon^2) + \mu \cos\beta \sin\eta \operatorname{cosec}\varepsilon - \sin\beta^2 \sin\varepsilon^2)})$.

Für die orthographiſche Projection verſchwindet

$\mu = \frac{\pi}{e}$, und beyde Werthe von $\cot\psi$ ſind alsdenn

allemahl unmöglich, wie der Natur dieſer Projection gemäß iſt, weil ſie allemahl eine Parabel wird. (407. §. n. 2.)

Wenn $\beta = 90°$ iſt, ſo fällt ϑ aus der Rechnung weg, und man hat $z^3 - z^2 - \frac{1}{4}\mu^2 z + \frac{1}{4}\mu^2 = 0$, und eine Wurzel dieſer Gleichung iſt $z = 1$. Dividirt man die Gleichung durch $z - 1$, ſo iſt der Quotient $= z^2 - \frac{1}{4}\mu^2$, alſo iſt $(z-1)(z^2 - \frac{1}{4}\mu^2) = 0$, mithin entweder $z - 1 = 0$, oder $z^2 - \frac{1}{4}\mu^2 = 0$,

da

da dann die letzte Gleichung $z^2 - \frac{1}{4}\mu^2 = 0$ die übrigen beyden Wurzeln der cubiſchen Gleichung giebt, nemlich $z = \pm \frac{1}{2}\mu$. Es kann alſo $\varepsilon = 90°$, oder auch $\sin\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\mu}$ ſeyn. Im erſten Fall hat man $\cot\psi = \frac{1}{2}\mu \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\mu^2 - 1)}$, und es wird erfordert, daß μ nicht kleiner als 2, mithin π nicht kleiner als $2e$ ſey, wenn beyde Werthe möglich ſeyn ſollen. Der allgemeine Ausdruck für den Halbmeſſer des Kreiſes $= \frac{\frac{1}{2}(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon\sqrt{\pi}}{\sqrt{(B\sin\varepsilon - \frac{1}{4}\pi\operatorname{coſ}\varepsilon^2)}}$ (407. §.) verwandelt ſich alsdenn in folgenden $\frac{\frac{1}{2}(e\cot\psi-\delta)\sqrt{\pi}}{\sqrt{e\cot\psi}}$, $= \frac{1}{2}\sqrt{e\cot\psi} - \frac{\frac{1}{2}\delta\sqrt{\pi}}{\sqrt{e\cot\psi}}$.

Der Werth $\sin\varepsilon = -\sqrt{\frac{1}{2}\mu}$ kann nicht gebraucht werden, weil alsdenn der Halbmeſſer des Kreiſes unmöglich würde: es wird neimlich nun der Schnitt eine gleichſeitige Hyperbel. Aber die Vorausſetzung $\sin\varepsilon = +\sqrt{\frac{1}{2}\mu}$ giebt $\operatorname{coſec}\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\mu}}$, $\operatorname{coſ}\varepsilon^2 = 1 - \frac{1}{2}\mu$, alſo $\cot\psi = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\mu}}(1 \pm \sqrt{(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{4}\mu^2)}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\mu}} \pm \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\mu)}$. Weil $\sin\varepsilon$ nicht gröſſer, als 1 ſeyn kann, ſo muß $\mu = \frac{\pi}{e}$ nicht gröſſer als 2, mithin π nicht gröſſer als $2e$ ſeyn.

In dem Fall $\vartheta = 0$ hat man

$$\begin{array}{llll} \sin\beta^2 . z^3 & - \mu\cos\beta . z^2 & - \frac{1}{4}\mu^2 . z & + \frac{1}{4}\mu^2 = 0, \\ & - \sin\beta^2 & + \mu\cos\beta & \end{array}$$

und dieſer Gleichung leiſtet ebenfalls der Werth $z = 1$ ein Genüge. Dividirt man ſie durch $z = 1$, ſo iſt der Quotient $\sin\beta^2 . z^2 - \mu\cos\beta . z - \frac{1}{4}\mu^2$, und man hat $(z - 1)(\sin\beta^2 . z^2 - \mu\cos\beta . z - \frac{1}{4}\mu^2) = 0$, mithin entweder $z - 1 = 0$, oder $\sin\beta^2 . z^2 - \mu\cos\beta . z - \frac{1}{4}\mu^2 = 0$. Die letzte Gleichung giebt $z^2 - \mu\cot\beta \operatorname{coſec}\beta . z = \frac{1}{4}\mu^2 \operatorname{coſec}\beta^2$, und $z = \frac{1}{2}\mu\cot\beta \operatorname{coſec}\beta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\mu^2 \cot\beta^2 \operatorname{coſec}\beta^2 + \frac{1}{4}\mu^2 \operatorname{coſec}\beta^2)}$ oder $z = \frac{1}{2}\mu\cot\beta \operatorname{coſec}\beta \pm \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\beta^2$, oder auch $z = \frac{1}{2}\mu \operatorname{coſec}\beta(\cot\beta \pm \operatorname{coſec}\beta)$. Der negative Werth giebt für $\sin\varepsilon$ was unmögliches, und es kann nur der poſitive gebraucht werden, da dann

$$\cot\beta + \operatorname{coſec}\beta = \frac{1 + \cos\beta}{\sin\beta}, \quad \text{und}$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\mu(1 + \cos\beta)}}{\sin\beta}$$ gefunden wird. Weil übrigens allemahl $\eta + \vartheta + \varepsilon = 180°$ iſt, ſo hat man in dem Fall $\vartheta = 0$ zugleich $\eta = 180° - \varepsilon$, und $\sin\eta = \sin\varepsilon$.

Wenn demnach zuerſt $z = 1$, alſo $\sin\varepsilon = \pm 1$ angenommen wird, ſo findet man $\cot\psi = \operatorname{coſec}\beta (\frac{1}{2}\mu \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\mu^2 + \mu\cos\beta - \sin\beta^2)})$, oder $\cot\psi = \operatorname{coſec}\beta(\frac{1}{2}\mu \pm \sqrt{((\frac{1}{2}\mu + \cos\beta)^2 - 1)})$, und damit beyde Werthe möglich bleiben, wird erfordert, daß $(\frac{1}{2}\mu + \cos\beta)^2$ nicht kleiner als 1 ſey. Wird aber $\sin\varepsilon^2 = \frac{\frac{1}{2}\mu(1 + \cos\beta)}{\sin\beta^2}$ angenommen, ſo giebt

das

das $\operatorname{coſec}\varepsilon^2 = \frac{\sin\beta^2}{\frac{1}{2}\mu(1+\cos\beta)}$, und

$\operatorname{coſec}\varepsilon^2 + \cot\varepsilon^2 = \frac{2\sin\beta^2}{\frac{1}{2}\mu(1+\cos\beta)} - 1$, alſo

$$\cot\psi = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\mu(1+\cos\beta)}}\left(\frac{\sin\beta^2}{1+\cos\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\sin\beta^2}{1+\cos\beta} - \frac{1}{4}\mu^2 + \mu\cos\beta - \frac{1}{2}\mu(1+\cos\beta)\right)}\right).$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen iſt

$$= \frac{\mu\sin\beta^2}{1+\cos\beta} + \frac{1}{2}\mu\cos\beta - \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\mu = \frac{\mu\sin\beta^2 + (\frac{1}{2}\mu\cos\beta - \frac{1}{2}\mu)(1+\cos\beta)}{1+\cos\beta} - \frac{1}{4}\mu^2 = \frac{\frac{1}{2}\mu\sin\beta^2}{1+\cos\beta} - \frac{1}{4}\mu^2;$$ und man erhält

$$\cot\psi = \frac{\sin\beta^2}{(1+\cos\beta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\mu}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sin\beta^2}{(1+\cos\beta)^2} - \frac{\frac{1}{2}\mu}{1+\cos\beta}\right)}.$$ Damit

beyde Werthe möglich bleiben, wird erfordert, daß $\frac{\sin\beta^2}{1+\cos\beta}$ nicht kleiner, als $\frac{1}{2}\mu$ ſey, oder $1-\cos\beta^2$ nicht kleiner als $\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu\cos\beta$, mithin $\cos\beta^2 + \frac{1}{2}\mu\cos\beta$ nicht gröſſer als $1 - \frac{1}{2}\mu$, und $(\cos\beta + \frac{1}{4}\mu)^2$ nicht gröſſer als $(1-\frac{1}{4}\mu)^2$, oder $\cos\beta + \frac{1}{2}\mu$ nicht gröſſer als 1.

410. §.

Die Lage der perſpectiviſchen Tafel gegen die Ebene einer Parabel iſt gegeben, nebſt der Lage der Zwergaxe dieſer Parabel gegen die Grundlinie der Tafel: man ſucht, wo das Auge ſtehen muß, damit das Bild der Parabel kreisförmig ſey.

Aufl. Vermöge der Aufgabe ſind die Winkel ε und ψ gegeben, und man ſoll η und β finden. Hiezu dienen die Gleichungen

1.) $\cos\beta \cos\eta \operatorname{tg}\varepsilon + \sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta = \frac{1}{2}\mu \operatorname{cosec}\varepsilon$

2.) $\mu(\sin\beta \sin\varepsilon \cot\psi + \cos\beta \sin\eta \sin\varepsilon - \frac{1}{4}\mu \cos\varepsilon^2) = \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^4$, und die erſte giebt

$(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)\sin\varepsilon = \frac{1}{2}\mu - \cos\beta \cos\eta \operatorname{tg}\varepsilon \sin\varepsilon$,

die zweyte aber

$(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)\sin\varepsilon = \frac{1}{\mu} \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^4 + \frac{1}{4}\mu \cos\varepsilon^2$ mithin wird

$\frac{1}{2}\mu^2 - \mu \cos\beta \cos\eta \operatorname{tg}\varepsilon \sin\varepsilon = \sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^4 + \frac{1}{4}\mu^2 \cos\varepsilon^2$; und

$$\cos\eta = \frac{\sin\beta^2 \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^4 + \frac{1}{4}\mu^2 \cos\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\mu^2}{-\mu \cos\beta \operatorname{tg}\varepsilon \sin\varepsilon}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4}\mu^2(1 + \operatorname{cosec}\varepsilon^2) - \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\varepsilon^2 \sin\beta^2)\cot\varepsilon}{\mu \cos\beta \operatorname{cosec}\varepsilon}.$$

Die zweyte Gleichung giebt ferner $\sin\eta =$

$$\frac{\frac{1}{4}\mu^2 \cos\varepsilon^2 - \mu \sin\varepsilon \cot\psi . \sin\beta + \sin\varepsilon^4 \operatorname{cosec}\psi^2 \sin\beta^2}{\mu \sin\varepsilon \cos\beta}$$

=

$$= \frac{\frac{1}{4}\mu^2 \cot\varepsilon^2 - \mu \operatorname{coſec}\varepsilon \cot\psi . \sin\beta + \sin\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\psi^2 \sin\beta^2}{\mu \operatorname{coſ}\beta \operatorname{coſec}\varepsilon};$$

und weil $\sin\eta^2 + \operatorname{coſ}\eta^2 = 1$, ſo erhält man

$$\left.\begin{array}{rr} & \operatorname{coſec}\psi^4 . \sin\varepsilon^4 \\ + & \operatorname{coſec}\psi^4 \sin\varepsilon^2 \operatorname{coſ}\varepsilon^2 \end{array}\right\} . \sin\beta^4$$

$$+ \quad 2\mu \sin\varepsilon \cot\psi \operatorname{coſec}\psi^2 . \sin\beta^3$$

$$\left.\begin{array}{rr} + & \frac{1}{2}\mu^2 \operatorname{coſ}\varepsilon \operatorname{coſec}\psi^2 \\ + & \mu^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 \cot\psi^2 \\ + & \mu \operatorname{coſec}\varepsilon^4 \\ - & \frac{1}{2}\mu^2 (1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2) \operatorname{coſ}\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\psi^2 \end{array}\right\} . \sin\beta^2$$

$$- \quad \frac{1}{2}\mu^3 \cot\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 \cot\psi^2 . \sin\beta.$$

$$\left.\begin{array}{rr} + & \frac{1}{16}\mu^4 \operatorname{cotang}\varepsilon^4 \\ + & \frac{1}{16}\mu^4 (1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2)^2 \cot\varepsilon^2 \\ - & \mu^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Es iſt aber der Coefficient von $\sin\beta^2 = \mu^2 \operatorname{coſec}\psi^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \cot\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\psi^2 = \frac{1}{2}\mu^2 \operatorname{coſec}\psi^2 (1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2)$, und der Coefficient des erſten Gliedes $= \sin\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\psi^4$, alſo erhält man

$$\sin\beta^4 - \frac{2\mu \operatorname{coſ}\psi}{\sin\varepsilon \operatorname{coſec}\psi} . \sin\beta^3 + \frac{\frac{1}{2}\mu^2 (1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2)}{\sin\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\psi^2} \sin\beta^2 - \frac{\frac{1}{2}\mu^3 \cot\varepsilon^2 \operatorname{coſ}\psi}{\sin\varepsilon^3 \operatorname{coſec}\psi^3} \sin\beta$$

$$+ \frac{\frac{1}{16}\mu^4 \operatorname{coſ}\varepsilon^2 ((1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2)^2 + \cot\varepsilon^2) - \mu^2}{\sin\varepsilon^4 \operatorname{coſec}\psi^4} = 0.$$

Im letzten völlig bekannten Gliede hat man auch $(1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2)^2 + \cot\varepsilon^2 = 3 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 + \operatorname{coſec}\varepsilon^4 = \operatorname{coſec}\varepsilon^2 (4 + \cot\varepsilon^2)$, und die Gleichung wird folgende $\sin\beta^4 - \frac{2\mu \operatorname{coſ}\psi}{\sin\varepsilon \operatorname{coſec}\psi} . \sin\beta^3 + \frac{\frac{1}{2}\mu^2 (1 + \operatorname{coſec}\varepsilon^2)}{\sin\varepsilon^2 \operatorname{coſec}\psi^2} \sin\beta^2$

$$- \frac{\frac{1}{2}\mu^3 \cot\varepsilon^2 \operatorname{coſ}\psi}{\operatorname{ſin}\varepsilon^3 \operatorname{coſec}\psi^3} \operatorname{ſin}\beta +$$

$$\frac{\frac{1}{4}\mu^4 \cot\varepsilon^2 (1 + \frac{1}{4}\cot\varepsilon^2) - \mu^2}{\operatorname{ſin}\varepsilon^4 \operatorname{coſec}\psi^4} = 0.$$

Wenn dieſe Gleichung mögliche Wurzeln hat, ſo iſt die vorgelegte Aufgabe allemahl möglich, weil $\operatorname{ſin}\eta$ und $\operatorname{coſ}\eta$ durch β vermittelſt einer einfachen Gleichung beſtimmt werden. Aus den Winkeln η und β hat man hiernächſt den Abſtand des Auges von der Tafel $D = (e(\operatorname{ſin}\beta \cot\psi + \operatorname{coſ}\beta \operatorname{ſin}\eta) - \delta) \operatorname{ſin}\psi$, die Höhe des Auges $A = e \operatorname{ſin}\beta$, und den Abſtand des Scheitels der Parabel von der Ebene des Auges $\Delta = e \operatorname{coſ}\beta \operatorname{coſ}\eta$. Die Entfernung e des Auges vom Scheitel der Parabel kann willkührlich angenommen werden. Uebrigens hat man auch $\vartheta = 180° - (\eta + \varepsilon)$ und ſo iſt hiemit zugleich die Aufgabe aufgelößt: was der paraboliſche Regel für eine Geſtalt haben muß, wenn ein Schnitt deſſelben in gegebener Lage ein Kreis werden ſoll.

411. §.

Die Aufgabe des vorigen §. für den beſondern Fall aufzulöſen, wenn die Tafel auf der Ebene der Parabel ſenkrecht ſteht.

Aufl. In dieſem beſondern Fall hat man $\psi = 90°$, $\operatorname{coſ}\psi = 0$, $\operatorname{coſec}\psi = 1$, alſo $\operatorname{ſin}\beta^4 + \frac{\mu^2 (1 + \frac{1}{2}\cot\varepsilon^2)}{\operatorname{ſin}\varepsilon^2} \operatorname{ſin}\beta^2 =$

$$\frac{\mu^2 - \frac{1}{4}\mu^4 \cot\varepsilon^2 (1 + \frac{1}{4}\cot\varepsilon^2)}{\operatorname{ſin}\varepsilon^4}.$$ Daraus findet

man

man ferner $\sin\beta^2 = -\frac{\frac{1}{2}\mu^2(1+\frac{1}{2}\cot\varepsilon^2)}{\sin\varepsilon^2} \pm \surd$

$$\frac{\frac{1}{4}\mu^2(1+\frac{1}{2}\cot\varepsilon^2)^2+\mu^2-\frac{1}{4}\mu^2\cot\varepsilon^2(1+\frac{1}{4}\cot\varepsilon^2)}{\sin\varepsilon^4}$$

oder $\sin\beta^2 = \frac{\frac{1}{2}\mu^2(1+\frac{1}{2}\cot\varepsilon^2)\pm\frac{1}{2}\mu\surd(\mu^2+4)}{\sin\varepsilon^2}$.

Einer von dieſen Werthen iſt allemahl poſitiv, und derſelbe giebt zwey mögliche für ſich gleiche einander entgegen geſetzte Werthe für $\sin\beta$. Der andre $\frac{\frac{1}{2}\mu^2}{\sin\varepsilon^2}\left(1+\frac{1}{2}\cot\varepsilon^2-\frac{\surd(\mu^2+4)}{\mu}\right)$ iſt ebenfalls poſitiv und giebt für $\sin\beta$ ein Paar mögliche Werthe, wenn $1+\frac{1}{2}\cot\varepsilon^2 > \frac{\surd(\mu^2+4)}{\mu}$ iſt, oder $\cot\varepsilon^2 > \frac{2\surd(\mu^2+4)-2\mu}{\mu}$. Aus β findet man $\sin\eta = \frac{\frac{1}{4}\mu^2\cos\varepsilon^2+\sin\beta^2\sin\varepsilon^4}{\mu\cos\beta\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon}$, hiernächſt $D = e\cos\beta\sin\eta - \delta$, $\Delta = e\cos\beta\cos\eta$, und $A = e\sin\beta$.

Der XXX. Abſchnitt.

Von den Projectionen der Hyperbel.

412. §.

132 135F. Der abzubildende Kegelſchnitt iſt eine Hyperbel: man ſoll finden, unter welchen Umſtänden die Projection eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel wird.

Aufl. 1.) Man verſtehe, wie im 389. u. 390. §. durch a die halbe Zwergaxe, durch b die halbe zugeordnete Axe des abzubildenden Kegelſchnitts, ſo iſt für die Hyperbel in den dortigen Formuln bb und a negativ: mithin hat man

$$p = \frac{\sqrt{(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}}{\sqrt{(a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2)}}, \quad \text{und}$$

$$q = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 \cos\delta^2 - a^2 \sin\delta^2)}}, \quad \text{oder}$$

$$qq = -\frac{ab}{a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2}; \quad \text{ſo wie}$$

$$\tang\varepsilon = \frac{a^2 \tang\delta - b^2 \cot\delta}{a^2 + b^2}.$$ Auch iſt γ negativ,

und es wird $\frac{qq}{pp} = \frac{-\sin 2\gamma}{\sin 2\delta}$. Um nun

die Rechnung deſto leichter auf die Hyperbel anzuwenden, kann man $q = \frac{ab}{\surd(a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2)}$ annehmen, ſo werden die übrigen allgemeinen Formuln des 390. §. auf die Hyperbel angewandt, wenn man vor qq und p das entgegen geſetzte Zeichen nimmt, und $q\surd -1$ ſtatt q ſchreibt. Das giebt

$$P = -\frac{p.L.(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon}{B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp} =$$

$$\frac{p.L.(B-\delta)\sin\varepsilon}{p^2 \sin\varepsilon^2 - B^2},\ Q = \frac{q(B-\delta)\operatorname{coſec}\varepsilon\surd -1}{\surd(B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2 - pp)}$$

$$= \frac{q(B-\delta)}{\surd(p\sin\varepsilon^2 - B^2)},\ \frac{QQ}{PP} =$$

$$\frac{(p^2 \sin\varepsilon^2 - B^2)qq}{p^2 L^2 \sin\varepsilon^2},\ \frac{2QQ}{P} =$$

$$G = \frac{2qq(B-\delta)}{pL\sin\varepsilon},\ \text{und}\ \frac{qq}{pp} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\delta}.$$

Wenn dieſe ſo geänderten Werthe in die allgemeine Gleichung für die Projection des Kegelſchnitts $yy = \frac{2QQ}{P}x - \frac{QQ}{PP}xx$ (390. §.) geſetzt werden; ſo findet man für die Projection der Hyperbel folgende Gleichung: $yy = \frac{2qq(B-\delta)}{pL\sin\varepsilon}.x$

$- \frac{(p^2 \sin\varepsilon^2 - B^2)qq}{p^2 L^2 \sin\varepsilon^2}xx$, für den Anfangspunct

der

der Abſciſſen der Projection hat man $Fa = \frac{(\delta \operatorname{coſec}\varepsilon + p)L}{B\operatorname{coſec}\varepsilon + p} = \frac{(\delta + p \operatorname{ſin}\varepsilon)L}{B + p\operatorname{ſin}\varepsilon}$, und für die Stelle des Mittelpuncts f der Projection iſt $Ff = \frac{(B\delta - p^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2)L}{B^2 - p^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2}$. Der Coordinaten-winkel iſt $= \zeta$ und $-\operatorname{tang}\zeta = \frac{A\operatorname{coſec}\psi}{f + D\operatorname{coſec}\psi \operatorname{cot}\varepsilon}$, auch bleibt $L = A\operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta$, die Höhe des Auges $= A$ geſetzt, ſo wie $B = D\operatorname{coſec}\psi + \delta$.

2.) Hier iſt nun $\operatorname{ſin}\varepsilon^2 = \frac{a^2 \operatorname{ſin}\delta^2 - b^2 \operatorname{coſ}\delta^2}{\sqrt{(a^4 \operatorname{ſin}\delta^2 + b^4 \operatorname{coſ}\delta^2)}}$, und in den allgemeinen Formuln $B = D\operatorname{coſec}\psi + \delta$, mithin $p^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2 = a^2 \operatorname{ſin}\delta^2 - b^2 \operatorname{coſ}\delta^2$, und $p^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2 - B^2 = a^2 \operatorname{ſin}\delta^2 - b^2 \operatorname{coſ}\delta^2 - (D\operatorname{coſec}\psi + \delta)^2$, oder auch $p^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2 - B^2 = (\operatorname{tang}\delta^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{(D\operatorname{coſec}\psi + \delta)^2}{a^2} \operatorname{ſec}\delta^2) a^2 \operatorname{coſ}\delta^2$. So lange nun $\operatorname{tang}\delta^2 > \frac{b^2}{a^2}$ iſt, ſo lange iſt q mithin auch Q möglich, wenn $p^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2 - B^2$ poſitiv iſt, und p ſowohl, als auch P ſind ebenfalls möglich. Wird alſo die Vorausſetzung $\operatorname{tang}\delta^2 > \frac{b^2}{a^2}$ angenommen, ſo iſt die Projection eine Ellipſe, Parabel oder Hyper-

perbel, nachdem $\tang\delta^2 >=< \frac{b^2}{a^2} + \frac{(D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2}{a^2}\operatorname{ſec}\delta^2$ iſt, oder $\operatorname{tg}\delta^2 >=< \frac{b^2+(D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2}{a^2-(D\operatorname{coſec}\psi+\delta)^2}$. Man muß aber hiebey die Vorausſetzung wohl vor Augen behalten, daß für q die mögliche Gröſſe $\frac{ab}{\sqrt{(a^2\operatorname{ſin}\delta^2 - b^2\operatorname{coſ}\delta^2)}}$ angenommen ſey, ſo wie hier nun $p = \frac{+\sqrt{(a^4\operatorname{ſin}\delta^2 + b^4\operatorname{coſ}\delta^2)}}{\sqrt{(a^2\operatorname{ſin}\delta^2 - b^2\operatorname{coſ}\delta^2)}}$ iſt: in der allgemeinen Gleichung für die Projection aber, $yy = \frac{2QQ}{P}x - \frac{QQ}{PP}xx$, ſetzt man $P = \frac{pL(B-\delta)\operatorname{ſin}\varepsilon}{p^2\operatorname{ſin}\varepsilon^2 - B^2}$, und $Q = \frac{q(B-\delta)}{\sqrt{(p^2\operatorname{ſin}\varepsilon^2 - B^2)}}$.

3.) Wenn dagegen $\tang\delta^2 < \frac{b^2}{a^2}$ iſt; ſo werden q und p unmöglich, oder q^2 und p^2 negativ, mithin iſt $Q = \frac{q(B-\delta)}{\sqrt{(pp\operatorname{ſin}\varepsilon^2 - B^2)}}$ allemahl möglich, weil der Vorausſetzung $\operatorname{tg}\delta^2 < \frac{b^2}{a^2}$ gemäß $p^2\operatorname{ſin}\varepsilon^2 = \left(\operatorname{tg}\delta^2 - \frac{b^2}{a^2}\right)a^2\operatorname{coſ}\delta^2$ allemahl ne-

gativ bleibt: dagegen wird P mit p unmöglich, und die Projection iſt allemahl eine Hyperbel. In eben dieſem Fall aber iſt nicht allein p und P, ſondern auch der Parameter G unmöglich, und der Grund davon iſt darin zu ſuchen, weil nun die Gleichung $uu = \frac{2qq}{p} t - \frac{qq}{pp} t^2$, welche im 289. §. als die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt iſt zum Grunde gelegt worden, und ſich für die Hyperbel in folgende verwandelt: $uu = \frac{2qq}{p} t + \frac{qq}{pp} t^2$, vermöge der im 315. §. angeſtellten Unterſuchungen nicht mehr brauchbar bleibt. Auch der Parameter $\frac{2qq}{p}$ der abzubildenden Hyperbel iſt nun unmöglich, und die Gleichung geht eigentlich in eine andre über, die einer Hyperbel zugehört, welche der gegebenen zugeordnet, und als ein unmögliches Stück derſelben zu betrachten iſt. Dieſemnach iſt auch die Gleichung $yy = \frac{2QQ}{P} x + \frac{QQ}{PP} xx$ für die Projection nicht mehr brauchbar, wenn P mit p unmöglich wird: ſie gehört nun eigentlich für das Bild derjenigen Hyperbel, welche der gegebenen zugeordnet, und hier als unmöglich zu betrachten iſt. Man ſiehet indeſſen leicht, daß es nur darauf ankomme, die allgemeine Gleichung für die Projection des Kegelſchnitts $y = \frac{2QQ}{P} x - \frac{QQ}{PP} xx$ ſo zu

ver-

verwandeln, daß der Anfangspunct der Abſciſſen vom Scheitel des Durchmeſſers 2P nach den Mittelpunct dadurch verrückt werde, daß man $w + P$ ſtatt x ſchreibt, da dann die Gleichung

$yy = \frac{QQ}{PP}(P^2 - w^2)$, oder $yy =$

$$\frac{(p^2 \sin \varepsilon^2 - B^2)q^2}{p^2 L^2 \sin \varepsilon^2} \cdot \left(\frac{p^2 L^2 (B - \delta)^2 \sin \varepsilon^2}{(p^2 \sin \varepsilon^2 - B^2)^2} - w^2\right)$$

gefunden wird.

4.) Dieſe letztere Gleichung kann eben ſo als eine allgemeine Gleichung für die Projection der Hyperbel angeſehen werden, wie die Gleichung

$uu = \frac{q^2}{p^2}(p^2 - t^2)$ als eine allgemeine Gleichung

für den abzubildenden Kegelſchnitt ſelbſt, wenn die Abſciſſen t vom Mittelpunct auf dem Durchmeſſer $2p$ genommen werden. Für die Hyperbel verwandelt ſich alsdenn letztere in folgende

$uu = \frac{q^2}{p^2}(t^2 - p^2)$, und erſtere behält auch

alsdenn noch ihre Form, ſo lange $\mathrm{tg}\,\delta^2 <$ $\frac{b^2 + (D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2}{a^2 - (D \operatorname{coſec} \psi + \delta)^2}$ iſt. Wenn $\mathrm{tg}\,\delta^2$ dem letztern Ausdruck gleich wird, ſo nimmt ſie die Ferm an

$yy = \frac{2QQ}{P} x$, die Abſciſſen vom Scheitel des

Durchmeſſers 2P gerechnet. Wenn aber

tangδ^2

$\tang\delta^2 < \frac{b^2 + (\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta)^2}{a^2 - (\mathrm{D}\,\mathrm{coſec}\,\psi + \delta)^2}$ iſt, ſo hat die Gleichung für die Projection, die Abſciſſen wieder vom Mittelpunct gerechnet, die Form $yy = \frac{\mathrm{QQ}}{\mathrm{PP}}(w^2 - \mathrm{P}^2)$ weil QQ negativ wird. Wenn endlich $\tang\delta^2 < \frac{b^2}{a^2}$ wird, ſo bekommen P^2 und Q^2 abermahl das entgegen geſetzte Zeichen, und wie in eben dieſem Fall die Gleichung für die abzubildende Hyperbel dieſe Form annimmt $uu = \frac{q^2}{p^2}(t^2 + p^2)$ (315. §.) ſo iſt auch die Gleichung für die Projection unter folgender Form $yy = \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}}(w^2 + \mathrm{P}^2)$ begriffen. Damit die öftere Verwechſelung der Zeichen keine Verwirrung veranlaſſe, iſt es am beſten, ſich allein an den allgemeinen Ausdruck der Gleichung $yy =$

$$\frac{(p^2 \sin\varepsilon^2 - \mathrm{B}^2)q^2}{p^2 \mathrm{L}^2 \sin\varepsilon^2}\left(\frac{p^2 \mathrm{L}^2 (\mathrm{B} - \delta)^2 \sin\varepsilon^2}{(p^2 \sin\varepsilon^2 - \mathrm{B}^2)^2} - w^2\right)$$

zu halten, dem man es gleich anſiehet, wie ſich die Zeichen ändern, wenn entweder $p^2 \sin\varepsilon^2 - \mathrm{B}^2$ negativ wird, oder auch wenn p^2 und q^2 beyde negativ werden.

5.) Um den Zuſammenhang der dreyen Aufgaben des 389. §. des 405. §. und der eben jetzt vorgetragenen deſto beſſer zu überſehen, ſtelle man ſich

in

in der 135. Fig. vor, die Linie FACE behalte ihre Lage unverändert, in derſelben auch der Punct A, mithin ändre auch der Geſichtsſtrahl OA, ſo wie das Bild *a* des Puncts A ſeine Stelle auf der Tafel nicht. Es wachſe aber $AC = p$, mithin zugleich $AE = 2AC$, zugleich wachſe auch der zugeordnete Durchmeſſer *q* der Ellipſe ſo, wie es dem aus dem 264. §. bekannten Geſetz gemäß iſt. Dies vorausgeſetzt, rückt *e* auf der Tafel immer höher nach π, erreicht aber π alsdann allererſt, wenn AC und AE unendlich groß werden. Alsdann hat ſich die Ellipſe AMEN in eine Parabel verwandelt, $a\pi$ iſt das Bild ihres ins unendliche fortlaufenden Durchmeſſers, und bis dahin iſt das Bild auf der Tafel noch eine Ellipſe, wozu der Durchmeſſer $a\pi$ gehört. Soll nun aus der abzubildenden Parabel eine Hyperbel werden, ſo muß E auf der andern Seite von A in die verlängerte A*g* fallen, da dann die Linie OE anfangs die Tafel nur rückwärts durch O verlängert treffen kann. Alsdenn giebt es eigentlich kein phyſiſches, ſondern nur ein geometriſches Bild von E auf der Tafel: mithin rückt *e* über π hinaus, wenn AE auf der negativen Seite abnimmt, und das Bild der Hyperbel iſt noch eine Ellipſe. Sobald $AE = -Ag$ wird, oder E in *g* fällt, ſobald wird O*E*, die nun in O*g* liegt, mit $a\pi$ parallel ſeyn, es giebt von *e* gar kein Bild auf der Tafel, *ae* iſt unendlich groß geworden, und das Bild der Hyperbel hat ſich in eine Parabel verwandelt. Wird $-AE$ noch kleiner, und fällt E zwiſchen F und *g*, ſo wird OE die Tafel wieder unterhalb der Grundlinie TK treffen, es giebt wieder ein Bild *e* von E auf der Tafel, aber *ae* liegt nun unterhalb *a*, und iſt alſo

in Abſicht der vorigen Lage negativ, das Bild der Hyperbel iſt nun ebenfalls eine Hyperbel. Rückt E auf der negativen Seite des Puncts A noch weiter gegen A zu, und liegt nun zwiſchen F und A; ſo fällt das Bild e von E zwiſchen F und a auf der Tafel, ae iſt noch negativ, und das Bild der Hyperbel iſt noch eine Hyperbel.

413. §.

Eine Aſymtote der Hyperbel liegt mit der Grundlinie der Tafel parallel: man ſucht die Gleichung für ihre Projection.

Aufl. In dieſem beſondern Fall iſt
133F. $\text{tang}\,\delta^2 = \frac{b^2}{a^2}$, und $\text{tang}\,\varepsilon = 0$, p und q werden unendlich groß, oder fallen in einer Aſymtote der Hyperbel zuſammen: deswegen können die Formuln des vor. §. nicht gebraucht werden, und man wendet auf dieſen beſondern Fall am leichteſten die erſte Auflöſung der Aufgabe des 102. §. an. In ſolcher Abſicht ſey MQ auf die Aſymtote CA ſenkrecht gezogen, und CQ $= t$, QM $= u$ geſetzt, ſo hat man für die abzubildende Hyperbel die Gleichung $uu - \frac{2ab}{aa-bb} \cdot tu + \frac{aabb}{aa-bb} = 0$ 308. §. Weil hier aber, um die Aufgabe des 102. §. anzuwenden, die Abſciſſenlinie auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht, und die dazu gehörigen Applicaten mit letzterer parallel angenommen werden müſſen; ſo ſey MP auf

CL ſenkrecht, und man nehme CP für die Abſciſſe, PM für die zugehörige Applicate. Verſteht man alsdenn CP durch t, und PM durch u, ſo verwandelt ſich die letzte Gleichung in folgende: $2ab.t.u-(aa-bb)tt-aabb=0$, und es wird

$$u=\frac{aa-bb}{2ab}.t+\frac{a.b}{2t}.$$

Der halbe Aſymtotenwinkel der abzubildenden Hyperbel iſt nach der hieſigen Bezeichnung $=\delta$, und $\operatorname{tang}\delta=\frac{b}{a}$,

$$\operatorname{tang}2\delta=\frac{2ab}{aa-bb},\text{ und }\sin 2\delta=\frac{2ab}{aa+bb}.$$

(Man vergleiche den (308. §.) Mithin iſt

$$\frac{aa-bb}{2ab}=\cot 2\delta,\text{ und }\tfrac{1}{2}ab=\tfrac{1}{4}(aa+bb)\sin 2\delta.$$

Die Potenz der abzubildenden Hyperbel ſey $=hh$, ſo iſt $\frac{1}{4}(aa+bb)=hh$, (309. §.) und es wird $\frac{1}{2}ab=hh\sin 2\delta$. Demnach läßt ſich die Gleichung zwiſchen t und u ſo ausdrücken $u=t.\cot 2\delta+\frac{h^2\sin 2\delta}{t}$, oder $tu=hh\sin 2\delta+tt\cot 2\delta$.

In dieſe Gleichung ſetzt man aus dem 102. §. 1. Aufl. die Werthe

$$u=\frac{(D\operatorname{coſec}\psi+c)L.y}{D\operatorname{coſec}\psi.L-(D\operatorname{coſec}\psi+c)x},$$

$$t=\frac{(D\operatorname{coſec}\psi+c)^2x}{D\operatorname{coſec}\psi.L-(D\operatorname{coſec}\psi+c)x};$$

wenn aber CL $=\delta$ geſetzt wird, ſo iſt hier $c=\delta$,

 und

und um abzukürzen, ſetzt man $D\operatorname{coſec}\psi + \delta = B$, ſo wird $u = \frac{B.L.y}{(B-\delta)L - Bx}$,

$t = \frac{B^2.x}{(B-\delta)L - Bx}$. Dieſemnach erhält man

$$\frac{B^3 Lxy}{((B-\delta)L - Bx)^2} = hh\sin 2\delta + \frac{B^4 x^2 \cot 2\delta}{((B-\delta)L - Bx)^2},$$ alſo

$$y = \frac{hh((B-\delta)L - Bx)^2 \sin 2\delta}{B^3 Lx} + \frac{Bx\cot 2\delta}{L}.$$

Wenn übrigens die lothrechte Höhe des Auges über der Ebene der abzubildenden Hyperbel $= A$, der Coordinatenwinkel $= \zeta$ geſetzt wird, ſo iſt $\operatorname{tang}\zeta = \frac{A\operatorname{coſec}\psi}{f}$, und $L = A\operatorname{coſec}\psi\operatorname{coſec}\zeta$, ſo wie $Fc = \frac{\delta.L}{B}$, (102. §.) da dann c die Projection des Mittelpuncts der Hyperbel iſt.

134F. Um die Natur der Linie, welche die gefundene Gleichung ausdrückt, und worin die Abſciſſe $x = cp$, die Applicate $y = pm$ iſt, genauer kennen zu lernen, verwechſele man zuförderſt die Coordinaten, und verſtehe $cq = pm$ durch x, $qm = cp$ durch y, ſo iſt

$$xy = \frac{h^2((B-\delta)L - By)^2 \sin 2\delta}{B^3 L} + \frac{By^2\cot 2\delta}{L},$$

oder

oder $\frac{B^3 L}{h^2 \sin 2\delta} . xy = (B-\delta)^2 L^2 - 2B(B-\delta) . Ly$

$+ \frac{B^2 (h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta)}{h^2 \sin 2\delta} . y^2$. Man ziehe nun eine andre Applicate $m\pi$, welche die Abſciſſenlinie unter dem Winkel $q\pi m = \xi$ ſchneidet, und ſetze $C\pi = w$, $\pi m = z$, ſo hat man $qm = y = \frac{z \sin\xi}{\sin\zeta}$,

$\pi q = \frac{z \sin(\zeta - \xi)}{\sin\zeta}$, und $cq = x = C\pi + \pi q = w$

$+ \frac{z \sin(\zeta-\xi)}{\sin\zeta}$. Dieſe Werthe von x und y gebraucht geben zwiſchen w und z die Gleichung

$$\frac{B^3 L \sin\xi}{h^2 \sin 2\delta \sin\zeta} wz + \frac{B^3 L \sin\xi \sin(\zeta-\xi)}{h^2 \sin 2\delta \sin\zeta^2} z^2 =$$

$$(B-\delta)^2 L^2 - \frac{2B(B-\delta) L \sin\xi}{\sin\zeta} . z$$

$$+ \frac{B^2 (h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta) \sin\xi^2}{h^2 \sin 2\delta \sin\zeta^2} . z^2.$$

oder nach den Potenzen von z geordnet,

$$\frac{B^3 L \sin\xi \sin(\zeta-\xi) - B^2 (h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta) \sin\xi^2}{h^2 \sin 2\delta \sin\zeta^2}$$

$$. z^2 + \left(\frac{B^3 L \sin\xi}{h^2 \sin 2\delta \sin\zeta} w + \frac{2B(B-\delta) L \sin\xi}{\sin\zeta} \right)$$

$$. z = (B-\delta)^2 L^2.$$

Man nehme den Winkel ξ ſo groß an, daß der Coefficient von z^2 verſchwindet, ſo hat man für die Projection die Gleichung

$$\left(\frac{B^3 \sin\xi}{h^2 \sin 2\delta \sin\zeta}\, w + \frac{2B(B-\delta)\sin\xi}{\sin\zeta}\right) \cdot z$$

$$= (B-\delta)^2 L, \text{ oder } \left(w + \frac{2(B-\delta)h^2 \sin 2\delta}{B^2}\right)$$

$$z = \frac{(B-\delta)^2 h^2 L \sin 2\delta \sin\zeta}{B^3 \sin\xi},$$ und die angenommene Vorausſetzung erfordert, daß $BL\sin(\zeta-\xi) = (h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta)\sin\xi$ ſey, oder $BL(\sin\zeta \cot\xi - \cos\zeta) = h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta$. Das giebt

$$\cot\xi = \frac{h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta + BL\cos\zeta}{BL\sin\zeta},$$ oder

$$\tan\xi = \frac{BL\sin\zeta}{h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta + BL\cos\zeta}.$$ Noch verrücke man den Anfangspunct der Abſciſſen aus c nach f, und nehme $cf = \frac{2(B-\delta)h^2 \sin 2\delta}{B^2}$, $f\pi = s$ an; ſo iſt in der zwiſchen w und z gefundenen Gleichung $w + \frac{2(B-\delta)h^2 \sin 2\delta}{B^2} = s$, und man erhält $s \cdot z = \frac{(B-\delta)^2 h^2 L \sin 2\delta \sin\zeta}{B^3 \sin\xi}$. Das iſt eine Gleichung für die Hyperbel zwiſchen ihren Aſymtoten, und ſo leitet die gefundene Auflöſung auf folgende Sätze.

Die

Die Projection einer Hyperbel, wovon eine Aſymtote mit der Grundlinie der Tafel parallel liegt, iſt ebenfalls eine Hyperbel, und eine Aſymtote der Projection liegt mit der Grundlinie der Tafel in der Entfernung $\frac{\delta L \sin\zeta}{B}$ parallel; und wenn der halbe Aſymtoten-Winkel der abzubildenden Hyperbel $=\delta$, ihre Potenz $=hh$, und $\mathrm{tg}\,\zeta = \frac{A \operatorname{coſec}\psi}{f}$,

$L = A \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta$ genommen iſt; ſo iſt ξ der Aſymtoten-Winkel für die Projection, wenn man

$$\tan\xi = \frac{BL \sin\zeta}{h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta + BL \cos\zeta}$$ nimmt,

und die Potenz der Projection iſt

$$= \frac{(B-\delta)^2 h^2 L \sin 2\delta \sin\zeta}{B^3 \sin\xi}.$$

Um alſo die Projection zu zeichnen, nimmt man $TF=f$, den Winkel $TFp=\zeta$, $Fc=\frac{\delta L}{B}$, ziehet durch c mit der Grundlinie der Tafel eine Parallele, nimmt auf derſelben $cf=\frac{2(B-\delta)h^2 \sin 2\delta}{B^2}$, und macht den Winkel $cfr=\xi$; ſo hat man den Mittelpunct f und beyde Aſymtoten fr, fs der Projection. Man nimmt ferner $fg=fh=\frac{(B-\delta)h}{B}$ ·

$\sqrt{\frac{L \sin 2\delta \sin\zeta}{B \sin\xi}}$, verzeichnet das gleichſeitige Paral-

rallelogramm *fgeh*, ſo iſt *fe* die halbe Zwergaxe, und *ek* auf *ef* ſenkrecht geſetzt die halbe zugeordnete Axe der Projection.

414. §.

Man ſtelle ſich auch hier das Auge als die Spitze der optiſchen Kegelfläche vor, und die abzubildende Hyperbel als die Grundfläche; ſo hat man einen Begrif von einer hyperboliſchen Kegelfläche, deren Haupteigenſchaft wiederum darin beſtehet, daß jede grade Linie von ihrer Spitze nach einen Punct im Umfang der Grundfläche gezogen ganz in derſelben liegt: auch ſind allemahl zwey dergleichen Kegelflächen einander an der Spitze entgegen geſetzt, und erſtrecken ſich von dort aus zu beyden Seiten ins unendliche fort. Die grade Linie von der Spitze durch den Mittelpunct der Grundfläche kann die Axe des hyperboliſchen Kegels heiſſen, und überhaupt bey der ganzen Unterſuchung über die Schnitte des hyperboliſchen Kegels die völlige Aehnlichkeit mit den Schnitten des elliptiſchen Kegels beybehalten werden. Man kann nemlich die Projection der Hyperbel zugleich als einen Schnitt des hyperboliſchen Kegels betrachten, die Tafel für die Ebene des Schnitts angenommen. Unter den allgemeinen Formuln wird alsdenn auch der beſondre Fall enthalten ſeyn, wenn die Axe des hyperboliſchen Kegels unendlich groß geſetzt wird, da ſich dann derſelbe in einen hyperboliſchen Cylinder verwandelt, und die Projection orthographiſch wird.

415. §.

415. §.

Die allgemeine Gleichung für den Schnitt des hyperboliſchen Kegels oder Cylinders zu finden, wenn ſeine Abmeſſungen, und die Lage der Ebene des Schnitts gegeben ſind.

Aufl. Die Lage der Ebene des Schnitts iſt 132
durch den Winkel δ, unter welchem ſeine Grundlinie 135 F.
die Zwergaxe der Hyperbel ſchneidet, und den Neigungswinkel gegen die Ebene der hyperboliſchen Grundfläche beſtimmt. Alle im 394. §. gebrauchte Zeichen können hier ihre Bedeutung behalten, wobey man hier die 132. Fig. mit der 135. vergleichen muß. Ueber S ſtelle man ſich die ſenkrechte Höhe des Kegels $OS = A = c\sin\beta$ vor, wenn ſeine Axe $CS = c$ geſetzt iſt; ſo hat man weiter $CS = c.\cos\beta$. Ferner ſind in der 132. Fig. die Winkel $KWC = \eta$, $WKC = \delta$, $KCW = \vartheta$, $KCF = \gamma$, $KFC = MPD = \varepsilon$, und die Formuln des 394. §. finden insgeſammt ihre Anwendung, wenn man nur ſich daran erinnert, daß auſſer p, qq, hier auch γ negativ ſey. Dieſemnach hat man $TF = f = c.\cos\beta\cos\eta + \delta\cot\varepsilon$, $D\operatorname{cosec}\psi + \delta = B = c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta)$,

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\sin\beta\operatorname{cosec}\psi}{\cos\beta\cos\eta + (\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta)\cot\varepsilon},$$

$L = c\sin\beta\operatorname{cosec}\psi\operatorname{cosec}\zeta$, und die allgemeine Gleichung für den Schnitt des hyperboliſchen Kegels iſt

$yy = \frac{QQ}{PP}(P^2 - w^2)$ (412. §. n. 3. 4.) für den

Coordinatenwinkel ζ: da dann $P = \frac{pL(B-\delta)\sin\varepsilon}{p^2\sin\varepsilon^2 - B^2}$,

$Q = \frac{q(B-\delta)}{\surd(p^2 \sin\varepsilon^2 - B^2)}$, und $\frac{QQ}{PP} =$
$\frac{(p^2 \sin\varepsilon^2 - B^2)q^2}{p^2 L^2 \sin\varepsilon^2}$ genommen werden muß, ſo

wie $\frac{2QQ}{P} = \frac{2qq(B-\delta)}{pL\sin\varepsilon}$ iſt: übrigens aber

$$p = \frac{\surd(a^4 \sin\delta^2 + b^4 \cos\delta^2)}{\surd(a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2)},$$

$$q = \frac{ab}{\surd(a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2)}, \quad \text{und}$$

$\tan\varepsilon = \frac{a^2 \operatorname{tg}\delta - b^2 \cot\delta}{a^2 + b^2}$. Aus dem Winkel δ

und beyden Hauptaxen der Hyperbel hat man alſo Ep und q, (412. §.) und wenn $CW = e$ iſt, ſo hat man noch $\delta = e\sin\eta$: auch kann ſtatt deſſen $Cc = \Delta$ angenommen werden; ſo iſt $\delta = \Delta(\sin\eta \cos\beta + \sin\beta \cot\psi)$ (265. §.) und $B - \delta = (c - \Delta)(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)$. Aus η und ϑ hat man $\delta = 180° - (\eta + \vartheta)$, ſo wie auch $\delta = \varepsilon + \gamma$. Den Mittelpunct f des Schnitts aber giebt die Gleichung

$$Ff = \frac{(p^2 \sin\varepsilon^2 - B\delta)L}{p^2 \sin\varepsilon^2 - B^2}.$$

So lange $\tan\delta^2 > \frac{b^2}{a^2}$ (a und b für die beyden halben Axen der Hyperbel angenommen) bleibt, ſo lange gelten dieſe Formuln unverändert: wenn

wenn aber $\tang\delta^2 < \frac{b^2}{a^2}$ iſt, ſo bekommen pp und qq das entgegen geſetzte Zeichen. In dem ganz beſondern Fall $\tang\delta^2 = \frac{b^2}{a^2}$, iſt der Schnitt eine Hyperbel, eine ihrer Aſymtoten liegt mit der Grundlinie des Schnitts in der Entfernung $\frac{\delta L \sin\zeta}{B}$ parallel, die Tangente ihres Aſymtotenwinkels ξ iſt $= \frac{B L \sin\zeta}{h^2 \sin 2\delta + B^2 \cot 2\delta + BL \cos\zeta}$, die Potenz dieſer Hyperbel $= \frac{(B-\delta)^2 h^2 L \sin 2\delta \sin\zeta}{B^3 \sin\xi}$, wenn die Potenz der gegebenen $= hh$ und der halbe Aſymtoten-Winkel $= \delta$ iſt.

Wenn man c unendlich groß annimmt, ſo findet man die nöthigen Formuln für den Schnitt des hyperboliſchen Cylinders, oder die orthographiſche Projection der Hyperbel. Die Gleichung für dieſen Schnitt behält die allgemeine Form $yy = \frac{Q^2}{P^2}(P^2 - w^2)$; weil aber B und L unendlich groß werden, ſo hat man

$$\frac{L}{B} = \frac{\sin\beta \operatorname{coſec}\psi \operatorname{coſec}\zeta}{\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta} =$$

$$\frac{\operatorname{coſec}\zeta}{\cos\psi + \cot\beta \sin\eta \sin\psi}, \text{ alſo } P = - \frac{p L \sin\varepsilon}{B}$$

$$= \frac{-p \operatorname{coſec}\zeta \operatorname{ſin}\varepsilon}{\operatorname{coſ}\psi + \cot\beta \operatorname{ſin}\eta \operatorname{ſin}\psi}, \quad Q = q\sqrt{-1},$$

$$\frac{Q^2}{P^2} = -\frac{B^2 q^2}{p^2 L^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2} = -$$

$$\frac{q^2 (\operatorname{coſ}\psi + \cot\beta \operatorname{ſin}\eta \operatorname{ſin}\psi)^2}{p^2 \operatorname{coſec}\zeta^2 \operatorname{ſin}\varepsilon^2}, \quad \frac{2QQ}{P} =$$

$$\frac{2qqB}{pL\operatorname{ſin}\varepsilon} = \frac{2qq(\operatorname{coſ}\psi + \cot\beta \operatorname{ſin}\eta \operatorname{ſin}\psi)}{p \operatorname{coſec}\zeta \operatorname{ſin}\varepsilon},$$

da dann allemahl P negativ und Q unmöglich iſt, ſo lange $\tang\delta^2 > \frac{b^2}{a^2}$ bleibt. In dem Fall $\tang\delta^2 < \frac{b^2}{a^2}$ kehrt ſich das um, und es wird P unmöglich, Q aber negativ, und dies leitet auf die Folge: daß die orthographiſche Projection der Hyperbel, oder der Schnitt des hyperboliſchen Cylinders allemahl eine Hyperbel ſey. In dem Fall, wenn die Grundlinie des Schnitts mit einer Aſym-tote der Grundfläche des Kegels parallel liegt, ſo liegt auch eine Aſymtote des Schnitts, oder der or-thographiſchen Projection der Hyperbel mit der Grundlinie des Schnitts parallel, und zwar in der Entfernung $\frac{\delta L \operatorname{ſin}\zeta}{B} = \frac{\delta \operatorname{coſec}\psi}{\cot\psi + \cot\beta \operatorname{ſin}\eta}$, die Tangente des Aſymtotenwinkels ξ iſt

$$= \frac{L \operatorname{ſin}\zeta}{B \cot 2\delta + L \operatorname{coſ}\zeta}$$

=

$$= \frac{\sin\beta \operatorname{cosec}\psi}{(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\eta)\cot 2\delta + \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \cot\zeta},$$

oder tangξ =

$$\frac{\operatorname{tang} 2\delta \operatorname{tang}\zeta}{(\cos\psi + \cot\beta \sin\eta \sin\psi)\operatorname{tg}\zeta + \operatorname{tang} 2\delta},$$

und die Potenz der Projection, oder des Schnitts

$$= \frac{h^2 L \sin 2\delta \sin\zeta}{B \sin\xi} = \frac{h^2 \sin 2\delta \operatorname{cosec}\xi}{\cos\psi + \cot\beta \sin\eta \sin\psi}.$$

Auch iſt nun $\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\beta \sec\eta \operatorname{cosec}\psi$.

Wenn der hyperboliſche Kegel grade, mithin $\beta = 90°$ iſt, ſo hat man $\operatorname{tang}\zeta = \sec\psi \operatorname{tg}\varepsilon$, die Winkel η und ϑ fallen aus der Rechnung weg, und man erhält $L = c \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\zeta$, $B = c . \cot\psi$, und $\delta = KC . \sin\delta$. Für den Schnitt des graden hyperboliſchen Cylinders hat man $P = -p \operatorname{cosec}\zeta \sec\psi \sin\varepsilon$, und $Q = q\sqrt{-1}$.

Der mit der Grundfläche parallele Schnitt iſt eine der Grundfläche ähnliche Hyperbel; denn man hat nun $\psi = 0$, alſo $\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varepsilon$, und es werden $B = c \sin\beta \cot\psi$, $(B - \delta) = (c - \Delta) \sin\beta \cot\psi$, $L = c \sin\beta \operatorname{cosec}\psi \operatorname{cosec}\varepsilon$ unendlich groß, mithin $\frac{L}{B} = \operatorname{cosec}\varepsilon$, $\frac{B - \delta}{B} = \frac{c - \Delta}{c}$, alſo

$$P = -\frac{pL(B-\delta)\sin\varepsilon}{B^2} = -\frac{p(c-\Delta)}{c},$$

$Q = \frac{q(c-\Delta)\sqrt{-1}}{c}$: wenn ſich aber der

hyper-

hyperboliſche Kegel in einen Cylinder verwandelt, und c unendlich groß wird, ſo hat man $P = -p$, und $Q = q\sqrt{-1}$, wie für ſich ſchon aus der Natur der Sache klar iſt.

Was übrigens die ſchneidende Ebene für eine Lage haben muß, damit der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel werde, in der Vorausſetzung daß p möglich, mithin $\tang\delta^2 > \frac{b^2}{a^2}$ ſey; darüber laſſen ſich eben ſolche Betrachtungen, wie im 395. §. beym elliptiſchen Kegel anſtellen. Es iſt nemlich der Schnitt eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel, nachdem $p^2 > = < B^2 \operatorname{coſec}\varepsilon^2$ iſt, und wenn man ſich alles in der 135. Fig. gehörig vorſtellt, ſo überſiehet man leicht, daß im erſten Fall die Ebene $O\varsigma g$ mithin auch die mit ihr parallele Ebene des Schnitts alle Seitenlinien des hyperboliſchen Kegels ohne Ausnahme ſchneide, im zweyten Fall alle Seitenlinien weniger eine, nemlich OA, im dritten Fall alle Seitenlinien, weniger zwey, diejenigen nemlich, welche alsdenn in der Ebene $O\varsigma g$ liegen.

416. §.

Die Lage der ſchneidenden Ebene zu finden, welche erfordert wird, wenn der Schnitt des hyperboliſchen Kegels oder Cylinders ein Kreis werden ſoll.

Aufl. Man hat nicht nöthig, die Rechnung für die Hyperbel beſonders anzuſtellen, weil alle Formuln des 396. §. auf die Hyperbel leicht angewandt werden, wenn man nur bemerkt, daß p, qq, bb,

bb, a, γ das entgegen geſetzte Zeichen haben müſſen. Dies vorausgeſetzt erinnere man ſich nur aus dem 396. §. daß es bey dieſer Aufgabe darauf ankomme, die Winkel δ und ψ aus den gegebenen Abmeſſungen des Kegels, a, b, ϑ, β, und c zu finden, da dann für den Cylinder c unendlich groß iſt.

Was alſo zuerſt den Cylinder betrift, ſo ergiebt ſich aus dem 396. §. num. 4. und 5. für denſelben die Gleichung $b^2 \cos\vartheta^2 . \cot\delta^4 + (a^2 \sin\vartheta^2 + b^2 \cos\vartheta^2 + (a^2 + b^2) \operatorname{tg}\beta^2) \cot\delta^2 + a^2 \sin\vartheta^2 = 0$, daraus werden für $\cot\delta^2$ allemahl ein paar negative Werthe gefunden, mithin für $\cot\delta$ gar kein möglicher Werth. In eben dem num. 5. iſt $\mu = \frac{p}{q}$ unmöglich, und μ^2 negativ, alſo ſieht man es der für $\cot\psi$ daſelbſt gefundenen Gleichung ſogleich an, daß beyde Werthe von $\cot\psi$ allemahl unmöglich ſind. Dieſemnach giebt es gar keinen kreisförmigen Schnitt des hyperboliſchen Cylinders, und die orthographiſche Projection der Hyperbel kann nie ein Kreis werden.

Aus dem num. 6. des 396. §. aber erhält man für den hyperboliſchen Kegel

$$z^3 + \left(\frac{a^2 \operatorname{tg}\vartheta^2}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) . z^2$$
$$+ \frac{(a^2 + b^2) \operatorname{tang}\beta^2}{b^2 \cos\vartheta^2}$$
$$+ \frac{a^2 (a^2 + b^2) \sec\beta^2}{b^2 c^2 \cos\vartheta^2}$$

=

$$-\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{(a^2-b^2)a^2 \text{tg}\vartheta^2}{b^4}\right)\cdot z-\frac{a^4}{b^4}\text{tg}\vartheta^2=0,$$

$$-\frac{a^2(a^2+b^2)\,\text{tang}\beta^2}{b^4 \cos\vartheta^2}$$

$$+\frac{a^2(a^2+b^2)\sec\beta^2}{b^2 c^2 \cos\vartheta^2}$$

und eine von den Wurzeln dieſer Gleichung iſt allemahl möglich, da dann, wenn ſie zugleich poſitiv iſt, die Gleichung $\cot\delta^2=z$, für $\cot\delta$ ein Paar mögliche für ſich gleich groſſe einander entgegen geſetzte Werthe giebt. Hiernächſt werden in der für $\cot\psi$ im num. 6. §. 396. ſchon gefundenen Gleichung $\frac{p^2}{q^2}=\mu^2$, und $\frac{p}{c}=\nu$ negativ, ſo daß man folgende Gleichung erhält: $\cot\psi=-\frac{\cot\beta\sin\eta}{1+\mu^2\sin\varepsilon^2}\pm$

$$\frac{\sin\varepsilon\sqrt{(\nu^2\operatorname{cosec}\beta^2(1+\mu^2\sin\varepsilon^2)-\mu^2(1+\cot\beta^2\sin\eta^2+\mu^2\sin\varepsilon^2))}}{1+\mu^2\sin\varepsilon^2}.$$

In derſelben iſt nun $\eta=180^\circ-(\vartheta+\delta)$, und $\text{tang}\,\varepsilon=\frac{a^2\text{tg}\delta-b^2\cot\delta}{a^2+b^2}$: die Bedingung der Möglichkeit aber iſt dieſe, daß $\nu^2\operatorname{cosec}\beta^2(1+\mu^2\sin\varepsilon^2)$ nicht kleiner ſey, als $\mu^2(1+\cot\beta^2\sin\eta^2+\mu^2\sin\varepsilon^2)$, mithin $\cot\beta^2$ nicht kleiner als $\frac{(\mu^2-\nu^2)(1+\mu^2\sin\varepsilon^2)}{\nu^2(1+\mu^2\sin\varepsilon^2)-\mu^2\sin\eta^2}$. Es iſt aber $(\mu^2-\nu^2)(1+\mu^2\sin\varepsilon^2)=\left(\frac{p^2}{q^2}-\frac{p^2}{c^2}\right)\times$

(1+

Der Buchbinder hat dieſe 8 beſondern B[l]
die durchgeſchnitt[...]

$$\left(1+\frac{p^2\sin\varepsilon^2}{q^2}\right)=\frac{p^2(c^2-q^2)(q^2+p^2\sin\varepsilon^2)}{c^2q^4},$$

und $\nu^2(1+\mu^2\sin\varepsilon^2)-\mu^2\sin\eta^2=\frac{p^2}{c^2}$

$$\left(1+\frac{p^2\sin\varepsilon^2}{q^2}\right)-\frac{p^2\sin\eta^2}{q^2}=$$

$$\frac{p^2(q^2+p^2\sin\varepsilon^2)-c^2\sin\eta^2)}{c^2q^2},$$ alſo wird

erfordert, daß $\cot\beta^2$ nicht kleiner ſey, als

$$\frac{(c^2-q^2)(q^2+p^2\sin\varepsilon^2)}{q^2(q^2+p^2\sin\varepsilon^2-c^2\sin\eta^2)}.$$ Uebrigens iſt

hiebey zu bemerken, daß nachdem nunmehro durch die vorgenommene Veränderung der Zeichen die Formuln ſchon auf die Hyperbel ſind eingeſchränkt worden, aus dem 412. §.

$$p=\frac{+\surd(c^4\sin\delta^2+b^4\cos\delta^2)}{\surd(a^2\sin\delta^2-b^2\cos\delta^2)},$$ und

$$q=\frac{ab}{\surd(a^2\sin\delta^2-b^2\cos\delta^2)}$$ angenommen

werden müſſe.

417. §.

Die Lage des kreisförmigen Schnitts im graden hyperboliſchen Kegel zu finden.

Aufl. Die Vergleichung mit dem 397. §. ergiebt ganz leicht, daß aus der cubiſchen für z im vor. §. gefundenen Gleichung in dieſem beſondern

 Fall

Fall drey mögliche Werthe für z gefunden werden, wovon der eine z unendlich groß, der andre $z = 0$, und der dritte $z = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{b^2(a^2 + c^2)}$ giebt: mithin iſt wiederum wie im 397. §. entweder $\cot\delta$ unendlich groß, oder $\cot\delta = 0$, oder $\cot\delta = \pm \frac{a\sqrt{(c^2 - b^2)}}{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}$, da dann auch die beyden letzten Werthe möglich ſind, wenn nur $c > b$ iſt. Der erſte unendlich groſſe Werth kann nicht gebraucht werden, weil derſelbe $\tang\delta = 0$, mithin $\tang\delta < \frac{b}{a}$ geben würde, da dann der Schnitt allemahl eine Hyperbel iſt. (412. §.) Weil in eben dieſem Fall p unmöglich, alſo $\nu^2 = \frac{p^2}{c^2}$ negativ wird, ſo giebt auch im vor. §. die für $\cot\psi$ gefundene Gleichung ein Paar unmögliche Werthe für $\cot\psi$, denn $\mu^2 = \frac{p^2}{q^2}$ behält einerley Zeichen.

Für $\cot\delta = 0$, findet man $\varepsilon = 90°$, alſo $\cot\psi = \pm \frac{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(1 + \mu^2)}}{1 + \mu^2} = \sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{1 + \mu^2}}$. Weil nun $\nu^2 = \frac{p^2}{c^2}$, $\mu^2 = \frac{p^2}{q^2}$ angenommen iſt, ſo erhält man $\nu^2 - \mu^2 = \frac{p^2(q^2 - c^2)}{c^2 q^2}$, und

und $1+\mu^2 = \frac{q^2+p^2}{q^2}$, mithin

$\cot\psi = \frac{p\sqrt{(q^2-c^2)}}{c\sqrt{(p^2+q^2)}}$. Hier iſt nun $\delta = 90°$,

alſo $p=a$, $q=b$, alſo wird $\cot\psi = \pm \frac{a\sqrt{(b^2-c^2)}}{c\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

Wenn demnach b^2 nicht kleiner als c^2 iſt, ſo ſind beyde Wurzeln möglich, und der Schnitt des hyperboliſchen Kegels kann ein Kreis werden, wenn die Grundlinie des Schnitts auf der Zwergaxe ſenkrecht iſt. Den Halbmeſſer des Schnitts giebt aus dem 412. §. die allgemeine Formul $Q = \frac{q(B-\delta)}{\sqrt{(p^2-B^2)}}$, $\varepsilon = 90°$ geſetzt, da dann $q=b$, $B = c.\cot\psi$, $p=a$ geſetzt werden muß, und man findet den Halbmeſſer $= \frac{b(c.\cot\psi - \delta)}{\sqrt{(a^2-c^2\cot\psi^2)}}$ der allemahl möglich bleibt, weil $\cot\psi < \frac{a}{c}$ gefunden iſt.

Noch iſt der Werth $\cot\delta = \pm \frac{a\sqrt{(c^2-b^2)}}{b\sqrt{(a^2+c^2)}}$ übrig, der ſo lange möglich bleibt, als $c^2 > b^2$ iſt. Weil derſelbe $\text{tang}\,\delta^2 = \frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2(c^2-b^2)} > \frac{b^2}{a^2}$ giebt, ſo bleibt derſelbe ebenfalls brauchbar, wenn anders $\cot\psi$ möglich bleibt. Man ſuche alſo zuförderſt $\text{tang}\,\varepsilon = \frac{a^2\,\text{tg}\,\delta - b^2\cot\delta}{a^2+b^2}$, ſo giebt

 ſich

ſich $\dfrac{a^2 \operatorname{tg}\delta}{a^2+b^2} = \dfrac{ab\sqrt{(a^2+c^2)}}{(a^2+b^2)\sqrt{(c^2-b^2)}}$,

$\dfrac{b^2 \cot\delta}{a^2+b^2} = \dfrac{ab\sqrt{(c^2-b^2)}}{(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+c^2)}}$,

alſo $\operatorname{tang}\varepsilon = \dfrac{a^3 b - ab^3}{(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+c^2)(c^2-b^2)}}$,

oder $\operatorname{tang}\varepsilon = \dfrac{ab}{\sqrt{(a^2+c^2)(c^2-b^2)}}$.

Das giebt $\cot\varepsilon = \dfrac{\sqrt{(a^2+c^2)(c^2-b^2)}}{ab}$,

$\operatorname{coſec}\varepsilon = \sqrt{\dfrac{a^2b^2+(a^2+c^2)(c^2-b^2)}{a^2b^2}} =$
$\dfrac{c\sqrt{(a^2+c^2-b^2)}}{ab}$ und $\operatorname{ſin}\varepsilon = \dfrac{ab}{c\sqrt{(a^2+c^2-b^2)}}$.

Ferner hat man $p^2 = \dfrac{a^4 \operatorname{tg}\delta^2 + b^4}{a^2 \operatorname{tg}\delta^2 - b^2}$, und
$q^2 = \dfrac{a^2 b^2 \operatorname{ſec}\delta^2}{a^2 \operatorname{tg}\delta^2 - b^2}$; weil nun $\operatorname{tg}\delta^2 =$
$\dfrac{b^2(a^2+c^2)}{a^2(c^2-b^2)}$, und $\operatorname{ſec}\delta^2 = \dfrac{c^2(a^2+b^2)}{a^2(c^2-b^2)}$,
ſo findet man $p^2 = \dfrac{a^2b^2(a^2+c^2)+b^4(c^2-b^2)}{b^2(a^2+c^2)-b^2(c^2-b^2)}$
$= \dfrac{a^2(a^2+c^2)+b^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}$

$$= \frac{(a^2+b^2)c^2+a^4-b^4}{a^2+b^2} = c^2 + \frac{a^4-b^4}{a^2+b^2},$$

oder $p^2 = a^2+c^2-b^2$, und $q^2 = \frac{a^2 b^2 (\mathrm{tg}\delta^2+1)}{a^2 \mathrm{tg}\delta^2 - b^2}$

$$= \frac{a^2 b^2 (b^2(a^2+c^2)+a^2(c^2-b^2))}{a^2 b^2 (a^2+c^2) - a^2 b^2 (c^2-b^2)}$$

$$= \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = c^2;$$ mithin auch $\sin\varepsilon = \frac{ab}{cp}$.

Aus dem 416. §. aber hat man $\cot\psi = \pm \frac{\sin\varepsilon \surd (\nu^2-\mu^2)(1+\mu^2 \sin\varepsilon^2)}{1+\mu^2 \sin\varepsilon^2} = \pm \sin\varepsilon \surd \frac{\nu^2-\mu^2}{1+\mu^2\sin\varepsilon^2)}$ und $\nu^2-\mu^2 = \frac{p^2(q^2-c^2)}{c^2 q^2}$, ſo wie $1+\mu^2\sin\varepsilon^2 = \frac{q^2+p^2\sin\varepsilon^2}{q^2}$. Demnach wird $\cot\psi = \pm \sin\varepsilon \surd \frac{p^2(q^2-c^2)}{c^2(q^2+p^2\sin\varepsilon^2)}$, und weil $q^2 = c^2$ gefunden iſt, ſo hat man $\cot\psi = 0$, $\psi = 90$. Was nun in der allgemeinen Formul $Q = \frac{q(B-\delta)}{\surd(p^2\sin\varepsilon^2 - B^2)}$ (412. 415. §.) B heiſt, das iſt hier $c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta) = 0$, mithin der Halbmeſſer des Kreiſes $= -\frac{\delta q}{p\sin\varepsilon}$, und wenn der bisherigen Rechnung gemäß $q = c$, $p\sin\varepsilon = \frac{ab}{c}$ ge-

geſetzt wird, ſo findet man den Halbmeſſer $= - \frac{\delta c^2}{ab}$. Die eben erwehnte Vorausſetzung $B = D + \delta = 0$ giebt auch $\delta = -D$, alſo iſt der Halbmeſſer des Bildes $= \frac{Dc^2}{ab}$. Daß δ hier negativ iſt, rührt daher, weil der Mittelpunct der abzubildenden Hyperbel nun auf eben der Seite der Tafel liegt, wo das Auge ſteht. Noch wird die Stelle des Mittelpuncts der Projection durch die Gleichung $Ff = \frac{p^2 \sin \varepsilon^2 - B\delta}{p^2 \sin \varepsilon - B^2}$. L beſtimmt (412. §.) alſo hier $Ff = L = c$.

Dies leitet auf folgenden in der Perſpectiv merkwürdigen Satz: wenn das Auge in der Höhe lothrecht über dem Mittelpunct einer Hyperbel ſteht, deren Zwergaxe die Grundlinie der auf der Ebene der Hyperbel ſenkrechten Tafel unter einem Winkel ſchneidet, deſſen Tangente $= \pm \frac{b\sqrt{(a^2+c^2)}}{a\sqrt{(c^2-b^2)}}$ iſt, ſo iſt das Bild der Hyberbel ein Kreis, deſſen Mittelpunct in der Gränzlinie der Ebene der Hyperbel liegt, und zwar in dem Vereinigungspunct der Bilder aller mit der Zwergaxe parallelen Linien. Jedoch wird erfordert, daß die Höhe des Auges c nicht kleiner als b ſey; und wenn $c = b$ iſt, ſo muß die Grundlinie der Tafel die Zwergaxe ſenkrecht ſchneiden, da dann der Mittelpunct des kreisförmigen Bildes in den Hauptaugenpunct fällt, und der

Halb-

Halbmeſſer $= \frac{bD}{a}$ wird.

418. §.

Die Grundlinie der Neigungsebene der Axe des ſchiefen hyperboliſchen Kegels fällt mit der Zwergaxe der Grundfläche zuſammen: man ſucht die Lage der Ebene des kreisförmigen Schnitts.

Aufl. 1.) Weil $\vartheta = 0$, mithin tang$\vartheta = 0$ angenommen iſt, wie im 398. §. bey der Ellipſe, ſo ergiebt die Vergleichung mit der dortigen Rechnung, daß einmahl $z = \cot\delta^2 = 0$ mithin $\delta = 90$ gefunden werde, daß aber auch z ein Paar andre Werthe haben könne, welche die Gleichung

$$z^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}(\text{tg}\beta^2 + \frac{a^2}{c^2}\sec\beta^2) - \frac{a^2-b^2}{b^2}\right)\cdot z$$

$$+ \frac{a^2+b^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\sec\beta^2 - \frac{a^2}{b^2}\text{tg}\beta^2\right)$$

$$- \frac{a^2}{b^2} = 0$$ beſtimmt, wobey zu bemerken iſt,

daß die im 398. §. gefundene Gleichung in dieſe verwandelt wird, wenn man $-bb$ ſtatt $+bb$ ſchreibt. In dem letzten völlig bekannten Gliede dieſer Gleichung iſt der poſitive Theil kleiner, der negative Theil gröſſer, als im Coefficienten des zweyten Gliedes, wenn alſo das letzte Glied poſitiv iſt, ſo iſt es

auch das zweyte, und dann hat die Gleichung zwey negative Wurzeln, wenn beyde möglich ſind, mithin giebt es in dieſem Fall für $\cot\delta$ weiter keinen möglichen Werth. In den übrigen Fällen hat die quadratiſche Gleichung allemahl eine poſitive, und eine negative Wurzel, und es kann nur noch ein Paar gleich groſſe einander entgegen geſetzte mögliche Werthe für $\cot\delta$ geben. Aus jedem möglichen Werth von $\cot\delta$ laſſen ſich nun die Winkel ε und $\eta = 180° - (\vartheta + \delta)$, ſo wie auch p und q, und daraus ferner $\cot\psi$ finden.

2.) Der erſte Werth $\cot\delta = 0$, giebt $\delta = 90°$, $\varepsilon = 90°$, und $\eta = 180° - (\vartheta + \delta) = 90°$, weil $\vartheta = 0$ iſt; und ſo findet man $\cot\psi =$

$$\frac{-\cot\beta \pm \sqrt{(\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2 (1+\mu^2) - \mu^2(\operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2))}}{1+\mu^2}$$

$$= -\frac{\cot\beta}{1+\mu^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2}{1+\mu^2} - \frac{\mu^2(\operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2}{(1+\mu^2)^2}\right)}.$$

Ferner iſt $p = a$, $q = b$, also $\mu = \frac{a}{b}$, $\nu = \frac{a}{c}$, $1 + \mu^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}$,

$$\frac{\nu^2 \operatorname{coſec}\beta^2}{1+\mu^2} = \frac{a^2 b^2 \operatorname{coſec}\beta^2}{c^2(a^2+b^2)}, \quad \operatorname{coſec}\beta^2 + \mu^2 =$$

$$\frac{a^2 + b^2 \operatorname{coſec}\beta^2}{b^2}, \quad \frac{\mu^2}{(1+\mu^2)^2} = \frac{a^2 b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

alſo die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen =

$$\frac{a^2 b^2 \operatorname{coſec}\beta^2}{c^2(a^2+b^2)} - \frac{a^2(a^2 + b^2 \operatorname{coſec}\beta^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

$$= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2) \operatorname{coſec}\beta^2 - a^2 c^2 (a^2 + b^2 \operatorname{coſec}\beta^2)}{c^2 (a^2 + b^2)^2},$$

mithin $\cot\psi = - \frac{b^2 \cot\beta}{a^2 + b^2} \pm$

$$\frac{a \sqrt{(b^2 (a^2 + b^2) \operatorname{coſec}\beta^2 - c^2 (a^2 + b^2 \operatorname{coſec}\beta^2))}}{c (a^2 + b^2)},$$

und die Bedingung der Möglichkeit iſt, daß $\cot\beta^2$ nicht kleiner ſey, als $\frac{(c^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{b^2 (a^2 + b^2 - c^2)}$.

419. §.

Die Grundlinie der Axe des ſchiefen hyperboliſchen Kegels fällt mit der zugeordneten Axe der Grundfläche zuſammen: man ſucht die Lage der Ebene des kreisförmigen Schnitts.

Aufl. Die Aufgabe nimmt $\vartheta = 90°$, alſo $\operatorname{tang}\vartheta$, $\sec\vartheta$, unendlich groß an, und ſo verwandelt ſich im 416. §. die für z gefundene Gleichung in folgende, $z^3 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{(a^2 + b^2) \operatorname{tg}\beta^2}{b^2} + \right.$

$$\left. \frac{a^2 (a^2 + b^2) \sec\beta^2}{b^2 c^2} \right) \operatorname{tang}\vartheta^2 . z^2$$

$$+ \left(\frac{(a^2 + b^2) a^2 \sec\beta^2}{b^2 c^2} - \frac{a^2 (a^2 + b^2) \operatorname{tg}\beta^2}{b^4} \right.$$

$$\left. - \frac{(a^2 - b^2) a^2}{b^4} \right) \operatorname{tg}\vartheta^2 . z - \frac{a^4}{b^4} \operatorname{tg}\vartheta^2 = 0.$$

Dieſemnach iſt zuerſt ein Werth von $z = \cot\delta^2$ mithin auch $\cot\delta$ unendlich groß, und $\delta = 0$. Weil aber der Schnitt keine Ellipſe werden kann, wenn $\tan g\delta^2 < \frac{b^2}{a^2}$ iſt, und der Kreis in die Claſſe der Ellipſen gehört, ſo kann dieſer Werth nicht gebraucht werden: er würde auch für $\cot\psi$ ein Paar unmögliche Werthe geben, wie man gleich ſiehet, wenn im 399. §. in der daſelbſt für $\cot\psi$ gefundenen Formul $-bb$ ſtatt bb geſchrieben wird. Dividirt man nun alles mit $\mathrm{tg}\vartheta^2$, ſo findet man

$$(a^2b^2c^2 + (a^2+b^2)b^2c^2\,\mathrm{tg}\beta^2 + a^2b^2(a^2+b^2)\,\mathrm{ſec}\beta^2)z^2$$
$$+ (a^2b^2(a^2+b^2)\,\mathrm{ſec}\beta^2 - a^2c^2(a^2+b^2)\,\mathrm{tg}\beta^2 - (a^2-b^2)a^2c^2)z - a^4c^2 = 0,$$

und dieſe Gleichung giebt noch ein Paar andre Werthe von z. Man ſetze $\frac{a^2}{a^2+b^2} = m$, ſo erhält man

$$z^2 + \frac{a^2(b^2\,\mathrm{ſec}\beta^2 - c^2\,\mathrm{tg}\beta^2) - mc^2(a^2-b^2)}{mb^2c^2 + b^2(c^2\,\mathrm{tg}\beta^2 + a^2\,\mathrm{ſec}\beta^2)}$$
$$\cdot z - \frac{ma^2c^2}{mb^2c^2 + b^2(c^2\,\mathrm{tg}\beta^2 + a^2\,\mathrm{ſec}\beta^2)} = 0.$$

Wenn beyde Wurzeln dieſer Gleichung möglich ſind, ſo iſt allemahl nur eine poſitiv, die andre negativ, mithin kann es nur ein Paar mögliche Werthe für $\cot\delta$ geben. Man ſetze noch $\frac{a^2}{b^2} = n$, ſo hat man

$$z^2 + \frac{b^2\,\mathrm{ſec}\beta^2 - c^2\,\mathrm{tg}\beta^2 - (1:n)mc^2(a^2-b^2)}{c^2(m+\mathrm{tg}\beta^2) + a^2\,\mathrm{ſec}\beta^2}\,.$$

$nz = \frac{mc^2}{c^2(m+\text{tg}\beta^2)+a^2 \sec\beta^2} \cdot n$. Es ſey

$\frac{mc^2}{c^2(m+\text{tg}\beta^2)+a^2 \sec\beta^2} = N$, was in nz multiplicirt iſt $= M$, ſo hat man $z^2 + nM.z = n.N$, und $z = -\frac{1}{2}nM \pm \surd(\frac{1}{4}n^2M^2 + nN)$ oder $z = \frac{1}{2}n(\surd(M^2+(4N:n))-M)$, weil die poſitive Wurzel nur gebraucht werden kann. Hiebey iſt nun noch zu bemerken, daß $\text{tang}\delta^2 > \frac{b^2}{a^2}$, oder

$\frac{1}{\cot\delta^2} > \frac{b^2}{a^2}$, miehin $\cot\delta^2 < \frac{a^2}{b^2}$, d. i.

$z < n$ ſeyn muß, folglich wird erfordert, daß $\frac{1}{2}(\surd(M^2+4(N:n))-M) < 1$ ſey. Aus $\text{tang}\delta$ werden alsdenn die Winkel ε und $\eta = 180° - (\vartheta + \delta)$ imgleichen p und q, mithin auch $\cot\psi$ leicht gefunden.

420 §.

Die Ebene des Schnitts iſt auf der Neigungsebene der Axe des hyperboliſchen Kegels ſenkrecht: man ſucht, unter welchen Umſtänden der Schnitt ein Kreis werden könne.

Aufl. Die cubiſche Gleichung, (416. §.) welche $z = \cot\delta^2$ aus a, b, c, ϑ, β, beſtimmt, iſt einerley mit derjenigen, die im 396. §. am Ende des num. 3. gefunden iſt, wenn in derſelben q^2 negativ angenommen wird, da ſie ſich denn in folgende verwandelt: $\cos\eta^2 + \frac{p^2}{q^2}\sin(\eta+\varepsilon)^2 = \frac{p^2\cos\varepsilon^2}{c^2\cos\beta^2}$

$- \frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2 \cot\beta^2}$. Nun nimmt die Aufgabe an, daß $\eta = 90°$ ſey, und ſo erhält man $\frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2 q^2} - \frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{c^2 \cos\beta^2} + \frac{p^2 \cos\varepsilon^2}{q^2 \cot\beta^2} = 0$; mithin entweder $\cos\varepsilon = 0$, oder $\frac{1}{q^2} - \frac{\sec\beta^2}{c^2} + \frac{\tan\beta^2}{q^2} = 0$.

Die erſte Vorausſetzung giebt $\varepsilon = 90°$, mithin entweder auch $\delta = 90°$, oder $\delta = 0$, weil $\tan\varepsilon = \frac{a^2 \operatorname{tg}\delta - b^2 \cot\delta}{a^2 + b^2}$ iſt. Die zweyte Vorausſetzung giebt $\frac{1 + \operatorname{tg}\beta^2}{q^2} = \frac{\sec\beta^2}{c^2}$, oder $\frac{\sec\beta^2}{q^2} = \frac{\sec\beta^2}{c^2}$, mithin $q^2 = c^2$, d. i. $\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\delta^2 - b^2 \cos\delta^2} = c^2$, und $a^2 \sin\delta^2 - b^2 (1 - \sin\delta^2) = \frac{a^2 b^2}{c^2}$.

Daraus folgt $(a^2 + b^2) \sin\delta^2 = \frac{(a^2 + c^2) b^2}{c^2}$, und $\sin\delta = \frac{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}{c\sqrt{(a^2 + b^2)}}$; alſo $\cos\delta = \frac{a\sqrt{(c^2 - b^2)}}{c\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, mithin $\tan\delta = \frac{b\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a\sqrt{(c^2 - b^2)}}$.

Die Vorausſetzung $\delta = 0$ kann nicht beſtehen, wie bekannt iſt, weil $\operatorname{tg}\delta^2$ nicht kleiner als

als $\frac{b^2}{a^2}$ ſeyn kann, wohl aber die beyden andern Vorausſetzungen $\delta = 90^\circ$ und $\text{tang}\,\delta = \frac{b\sqrt{(a^2+c^2)}}{a\sqrt{(c^2-b^2)}}$.
Weil nun allemahl $\eta + \vartheta + \delta = 180^\circ$, und hier $\eta = 90^\circ$ iſt, ſo hat man $\vartheta + \delta = 90$; alſo entweder $\vartheta = 0$, da dann die Grundlinie der Axe des Kegels mit der Zwergaxe der Grundfläche zuſammen fällt, welches der im 418. §. betrachtete Fall war: oder $\cot\vartheta = \text{tang}\,\delta = \frac{b\sqrt{(a^2+c^2)}}{a\sqrt{(c^2-b^2)}}$, oder auch $\text{tang}\,\vartheta = \frac{a\sqrt{(c^2-b^2)}}{b\sqrt{(a^2+c^2)}}$. In dem Fall $\delta = 90^\circ$ oder $\cot\delta = 0$, wird erfordert, daß $\cot\psi = -\frac{b^2\cot\beta}{a^2+b^2} \pm \frac{a\sqrt{(b^2(a^2+b^2-c^2)\text{coſec}\,\beta^2 - a^2c^2)}}{c(a^2+b^2)}$ ſey, wie im 418. §. ſchon gefunden iſt.

Der Fall $\cot\delta = \frac{a\sqrt{(c^2-b^2)}}{b\sqrt{(a^2+c^2)}}$ giebt $\text{ſin}\,\varepsilon = \frac{ab}{c\sqrt{(a^2+c^2-b^2)}}$, $p^2 = a^2+c^2-b^2$, ſo wie $q^2 = c^2$, wie ſchon im 417. §. gefunden ward. Wird alſo $\eta = 90^\circ$ angenommen, ſo findet man

$$\cot\psi = \frac{\cot\beta}{1+\mu^2\,\text{ſin}\,\varepsilon^2} \pm \frac{\text{ſin}\,\varepsilon\sqrt{(\nu^2\,\text{coſec}\,\beta^2(1+\mu^2\,\text{ſin}\,\varepsilon^2) - \mu^2(\text{coſec}\,\beta^2 + \mu^2\,\text{ſin}\,\varepsilon^2)}}{1+\mu^2\,\text{ſin}\,\varepsilon^2}.$$

Ueber-

Ueberdem iſt hier $\mu = \nu$, weil $c = q$, alſo wird $\cot\psi = \frac{\cot\beta}{1 + \mu^2 \sin\varepsilon^2} = \frac{q^2 \cot\beta}{q^2 + p^2 \sin\varepsilon^2}$. Weil ferner $\sin\varepsilon = \frac{ab}{cp}$ iſt, alſo $p \sin\varepsilon = \frac{ab}{c}$, ſo findet man $\cot\psi = \frac{c^4 \cot\beta}{c^4 + a^2 b^2}$.

420. §.

Die Lage der Tafel gegen die Ebene einer Hyperbel iſt gegeben, nebſt der Lage der Haúptdurchmeſſer der Hyperbel gegen die Grundlinie der Tafel: man ſucht, wo das Auge ſtehen muß, damit das Bild der Hyperbel kreisförmig ausfalle.

Aufl. Die Winkel δ und ψ werden als gegeben angenommen, mithin auch γ, ε, p und q; die Winkel η oder ϑ und β aber ſind die geſuchten. Soll übrigens die Aufgabe möglich bleiben, ſo muß $\tan\delta^2$ gröſſer als $\frac{b^2}{a^2}$ angenommen oder gegeben ſeyn, wie ſchon bekannt iſt. Die Rechnung ſelbſt für die Hyperbel zu wiederhohlen iſt deswegen nicht nöthig, weil die Auflöſung dieſer Aufgabe für die Ellipſe im 402. §. ſchon gefunden iſt, und beyde dort herausgebrachte Gleichungen werden auf die Hyperbel angewandt, wenn man vor $\mu^2 = \frac{p^2}{q^2}$ das entgegen geſetzte Zeichen annimmt, da ſich dann beyde in folgende verwandeln:

$$\operatorname{tg}\eta = -\frac{\operatorname{tg}\varepsilon(\nu^2\sin\psi^2-\mu^2)}{\nu^2-\mu^2} \pm \surd \left(\frac{\operatorname{tg}\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2-\mu^2)^2}{(\nu^2-\mu^2)^2} + \frac{(\nu^2\operatorname{tg}\varepsilon^2+\sec\varepsilon^2-\nu^2)\cos\psi^2}{\nu^2-\mu^2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\eta\cos\psi \pm \surd(\sin\eta^2\cos\psi^2+\sin\psi^2(\sin\eta^2-\nu^2\sin\varepsilon^2)(\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2-\mu^2)-\cos\psi^2))}{\sin\varepsilon^2(\nu^2\sin\psi^2-\mu^2)-\cos\psi^2}.$$

Nachdem η und β ſolchergeſtalt gefunden ſind, erhält man die Höhe des Auges $A = c\sin\beta$, den Abſtand des Auges $D = (c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta\sin\eta) - \delta)\sin\psi$, ſo wie den Abſtand der Ebene des Auges vom Mittelpunct der Hyperbel $\Delta = c.\cos\beta\cos\eta$.

421. §.

1.) Wenn die Zwergaxe auf der Grundlinie der Tafel ſenkrecht angenommen wird, ſo hat man $\delta = 90°$, $\varepsilon = 90°$, alſo auch $\eta = 90°$ und $\operatorname{tang}\beta =$

$$\frac{\cos\psi \pm \surd(\cos\psi^2+\sin\psi^2(1-\nu^2)(\nu^2\sin\psi^2-\mu^2)-\cos\psi^2))}{\nu^2\sin\psi^2-\mu^2-\cos\psi^2},$$

da dann $\nu^2 = \frac{a^2}{c^2}$, und $\mu^2 = \frac{a^2}{b^2}$ iſt. Weiter iſt $A = c\sin\beta$, $D = (c(\sin\beta\cot\psi + \cos\beta) - \delta)\sin\psi$, und $\Delta = 0$: wegen der letzten Beſtimmung muß der Mittelpunct der Hyperbel in der Ebene des Auges liegen, oder das Auge muß in einer Ebene ſtehen, die

die durch die Zwergaxe auf der Ebene der Hyperbel ſenkrecht geſetzt wird.

2.) Wenn die Tafel auf der Ebene der Hyperbel ſenkrecht, alſo $\psi = 90^\circ$ angenommen iſt, ſo hat man entweder $\text{tang}\,\eta = -2\,\text{tang}\,\varepsilon$, oder $\text{tang}\,\eta = 0$. Der letzte Werth giebt für $\text{tang}\,\beta$ was unmögliches. Wenn aber der zweyte gebraucht wird, ſo findet man

$$\text{ſin}\,\eta^2 = \frac{4}{4 + \cot\varepsilon^2}, \quad \text{alſo} \quad \text{tang}\,\beta = \pm\sqrt{\frac{\text{ſin}\,\eta^2 - \nu^2\,\text{ſin}\,\varepsilon^2}{\text{ſin}\,\varepsilon^2\,(\nu^2 - \mu^2)}} = \pm\sqrt{\frac{(4 - \nu^2\,\text{ſin}\,\varepsilon^2\,(4 + \cot\varepsilon^2)}{(\text{ſin}\,\varepsilon^2\,(\nu^2 - \mu^2)(4 + \cot\varepsilon^2)}}, \quad \text{oder}$$

$$\text{tang}\,\beta = \pm\sqrt{\frac{1 - \nu^2\,(\text{ſin}\,\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\,\text{coſ}\,\varepsilon^2)}{(\nu^2 - \mu^2)\,(\text{ſin}\,\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\,\text{coſ}\,\varepsilon^2)}}.$$

3.) Wird mit der Vorausſetzung n. 2. die erſte n. 1. verbunden, ſo hat man noch $\varepsilon = 90^\circ$, alſo $\eta = 90^\circ$, und

$$\text{tang}\,\beta = \pm\sqrt{\frac{1 - \nu^2}{\nu^2 - \mu^2}} = \pm\frac{b^2\sqrt{(c^2 - a^2)}}{a\sqrt{(b^2 - c^2)}}, \quad \text{oder } \text{tg}\,\beta = \frac{b\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a\sqrt{(c^2 - b^2)}}.$$

Druckfehler
und einige Verbeſſerungen.

4 S. 10 Z. ſehen, wie l. ſehen wir

32 S. 10 Z. OED l. EOD.

34 S. 5 Z. ſin r l. ſin v.

37 S. 3. Z. tang COF l. tang EOF.

70 S. 5. Z. von unten ſetze man nach coſφ ein Comma.

3. Z. von unten $c-u$ſinφ l. $c+u$ſinφ.

71 S. 1 Z. L in O l. L in C.

74 S. 11. und 12 Z. muß am Ende dieſer beyden Zeilen das Multiplications-Zeichen ſtehen.

78 S. 4 Z. von unten FAC l. FABC.

90 S. 12. und 13 Z. $\sqrt{(a^2+\varrho^2)}$ l. $a^2+\varrho^2$.

97 S. letzte Z. cot. 161. l. cot 16′.

98 S. 2 Z. WZ l. Wz.

6 Z. $-WZ-WZ$ l. $=WZ-Wz$.

101 S. 8 Z. $(a-\delta)$ l. $(\alpha-\delta)$.

102 S. 2 Z. $\frac{2}{215}$ l. $\frac{1}{215}$.

5 Z. von unten ſ$C\sigma=e\delta h$ l. $fC\sigma=eSh$.

103 S. 11 Z. $\mu=FG$ l. $\nu\mu=FG$.

106 S. 11 Z. $\cot\alpha=\cot(\alpha+\delta)$ l. $\cot\alpha-\cot(\alpha+\delta)$.

5 Z. von unten $\alpha-0$ l. $\alpha=0$.

115 S. 18 Z. CRT l. ORT.

122 S. 4 Z. $RTI\upsilon NIG$ l. $RTI \backsim NIG$.

126 S. 4 Z. von unten Nd l. $N\vartheta$.

127 S. 4 Z. in eben das l. in eben dem.

137 S. 11 Z. FG l. AG.

3 Z. von unten: Linie l. Linie CD.

138 S. letzte Z. $-\eta NAF$ l. $-NAF$.

139 S. 9 Z. gleiche l. ziehe.

141 S. 8 Z. von unten $D\cot\eta > f$ l. $D\cot\eta < f$.

145 S. 6 Z. von unten $90°(\eta+\varphi)$ l. $90°-(\eta+\varphi)$.

146 S. 8 Z. AP l. RP.
9 Z. Bp l. Rp.
9 Z. von unten um Af l. nun Af.
151 S. 13 Z. da dann $fP = \sqrt{(a^2 + (f + (D - \delta)\cot\eta)^2)}$ iſt l. da dann auch $fP = \frac{D}{D+\delta} L$ iſt, und $L = \sqrt{(a^2 + (f + D\cot\eta)^2)}$.
155 S. 8 Z. $\sqrt{(a^2+\Delta^2)}$ l. $\frac{D}{D+\delta}\sqrt{(a^2+\Delta^2)}$.
2 Z. von unten D(D+G) FG l. D(D+δ) FG.
156 S. 1 Z. $fP = \sqrt{(a^2 + (f + (D - \delta)\cot\eta)^2)}$ l. $fP = \frac{D}{D+\delta}\sqrt{(a^2+(f+D\cot\eta)^2)}$.
14 Z. $\Delta - \delta tg(90° - \eta)$ l. $\Delta + \delta tg(90° - \eta)$.
157 S. 16 Z. $R\Pi = -tg\,15°$ l. $= -Dtg.\,15°$.
161 S. 10 Z. *bay* l. *baq*,
162 S. 14 Z. *fh* l. *fn*.
16 Z. abzuſcheiden l. abzuſchneiden.
6 Z. von unten 30 Fuß l. 20 Fuß.
164 S. 12 Z. Tr.Nf l. Tr:Nf.
165 S. 20 Z. εξ l. εζ.
3 Z. von unten μ mit der l. β mit der.
letzte Z. *l*H l. CH.
169 S. 12 Z. 50ſten l. 40ſten.
22 Z. ET l. EF.
174 S. 13 Z. *fh* l. *f*L.
176 S. 2 Z. von unten: abgemacht l. gemacht.
177 S. 15 Z. Tf l. Ff.
19 Z. ACE*e* l. ACE∽.
179 S. 10 Z. Cϑ l. C*d*.
18 Z. Seiten=Ecks l. Siebenecks.
180 S. 6 Z. auch l. auf.

185 S. 9 Z. von 21 l. von 23.
10 Z. 21 Fuß l. 9 Fuß.
übrigens muß hier allenthalben γ' ſtatt g ſtehen, und in der hieher gehörigen Kupfer-Tafel muß g' nicht an Af ſondern an Nf ſtehen.
186 S. 7 Z. von unten: Vorzugs l. Vortrags.
187 S. 5 Z. von unten: Egratio l. Egnazio.
192 S. 4 Z. z. E. 1. 5. l. z. E. 5, 15,
200 S. 11 Z. von g. l. von h.
12. u. 13 Z. von g l. von i.
202 S. 5 Z. von unten: fugante l. fuyante.
205 S. 2 Z. Deſibales l. Deſchales.
208 S. 6 Z. von unten D.tL l. D.t.L.
209 S. 9 Z. C.L l. c.L.
218 S. 5 Z. 55 Fig. l. 56 Fig.
11 Z. demnach l. dennoch.
17 Z. groſſen l. gröſten.
219 S. 12 Z. $\tau\xi = \varphi$ l. $\tau\xi = y$.
223 S. 8 Z. $\delta = r$ l. $\delta - r$.
228 S. 14 Z. AC, CB, l. AC $\doteq$ CB.
17 Z. AB $= x$, l. AP $= x$.
233 S. 14 Z. $\varepsilon\nu$, $\iota\nu$ l. $\varepsilon\upsilon$, $\iota\upsilon$,
242 S. 3 Z. von unten: nach df horizonl.
l. noch df horizontal.
245 S. 20 Z. AS l. AK.
247 S. 19 Z. 69ſten l. 59ſten.
249 S. 7 Z. GAL l. GRL.
11 Z. Ro l. RO.
261 S. 21 Z. $h$tangψ l. $h$tangφ.
264 S. 9 Z. nach: Horizontallinie iſt, ſetze man hinzu: worin ſelbige von einer horizontal liegenden Ebene geſchnitten wird.
271 S. 7 Z. von unten k l. K.
274 S. 17 Z. pL l. pl.
276 S. 4 Z. coſecε l. coſε.

277 S. 6 Z. muß es heiſſen: $lp = \frac{D\,coſec\,\psi}{D\,coſec\,\psi + \delta}\sqrt{}$
$(a^2\,coſec\,\psi^2 + (f + D\,coſec\,\psi\,cot\,\varepsilon)^2)$.
2 Z. von unten: $rB = a$, l. $rB = \alpha$.
279 S. 9 Z. von unten: herabgeloffenen
l. herabgelaſſenen.
281 S. 8 Z. TCFEZ l. TFEZ.
283 S. 4 Z. $\frac{a\,coſec\,\psi}{F}$ l. $\frac{a\,coſec\,\psi}{f}$.
285 S. 12 Z. FFE l. TFE.
6 Z. von unten $\alpha =$ l. $x =$
290 S. 3 Z. von unten GL l. CL.
291 S. 11 Z. läuft auf l. läuft auch.
292 S. 16 Z. $v\sqrt{}$ l. vS.
295 S. 20 Z. in h. l. in n.
298 S. 16 Z. über T l. über CT.
301 S. 18 Z. nx l. $n\alpha$.
303 S. 11 Z. mit T l. mit CT.
305 S. 14 Z. $O\varepsilon$ l. $o\varepsilon$.
308 S. 4 Z. nach r l. nach n.
310 S. 9 Z. unter O, l. unter Θ.
316 S. 1 Z. eO l. $e\Theta$.
9 Z. Ro = D auf eO l. RO = D auf $e\Theta$.
326 S. 15 Z. des Quadrats l. des Würfels.
330 S. 15 Z. $b\beta$ l. bB.
336 S. 5 Z. $\tau\zeta$ l. $\tau\xi$.
345 S. 9 Z. von unten: In l. Zu.
347 S. 10 Z. TQ = △ l. TQ = △′.
357 S. 6 Z. von unten: als π l. als Π.
374 S. nächſtletzte Z. der graden Linie l. die grade
Linie.
386 S. 10 Z. RM l. PM.
392 S. 9 Z. ſec. x l. ſec. α.
405 S. 1 Z. nach u. f. §§. ſetze man hinzu: vorgetragenen Regeln.

412 S. 1 Z. 2K—D l. 2k—D.
432 S. 20 Z. KC l. Kc.
434 S. 19 Z. liegende l. bringende.
435 S. 8 Z. vortical l. vertical.
439 S. 10 Z. von unten SO l. MO.
443 S. 4 Z. von unten und ω l. und a.
447 S. letzte Z. RG l. Rg.
449 S. 5 Z. 91. F. l. 90. F.
5 Z. von unten Af l. AF.
450 S. 6 Z. MR l. NR.
456 S. 20 Z. Pφ l. PG.
469 S. 2 Z. R$\surd$G l. RωG.
473 S. nächſtletzte Z. nach $\triangle$ ſetzt man ein Comma.
474 S. 3 Z. von unten Dcoſecψ ſecα l.
Dcoſecψ ſecα tangβ.
475 S. 4 Z. ſecζ l. ſecξ.
476 S. letzte Z. ſecψ l. ſecα.
489 S. 7 Z. oder LW l. oder lw.
10 Z. LW= l. lw=
490 S. 1 Z. Λ108 l. Λ(108. §.)
496 S. 6 Z. AGD l. ACD.
497 S. 2 Z. pCn l. pGn.
17 Z. pon l. pom.
504 S. 9 Z. Fe l. CFe.
21 Z. TeV l. TεV.
22 Z. die l. dieſe.
508 S. 17 Z. Fr l. Tr
18 Z. TS, Fg l. Ts=Fg
509 S. 16 Z. PN=α l. PN=u.
511 S. letzte Z. α=o, l. x=o.
513 S. 14 Z. Grundfläche, (α) l. Grundfläche (β)
517 S. 11 Z. WFC l. WCF
17 Z. CFr $\lessdot$ oder l. CFr $\lessdot$= oder
522 S. 1 Z. $x\alpha$ l. xx.
523 S. 13 Z. ſetze man vor q ein Comma.

524 S. 3 Z. von unten: aber 90° l. über 90°.
525 S. 12 Z. $\cot\beta$ l. $\cos\beta$.
532 S. 9 Z. zwar l. zwoer.
533 S. 5 Z. ſetze man nach $\delta^2 - r^2$ ein Comma.
536 S. letzte Z. $\frac{pp}{qq} qq - vv)$ l. $\frac{pp}{qq}(qq - vv)$.
538 S. 5 Z. nun aber l. um aber
544 S. 10 Z. $(2p - xx)$ l. $(2p - x)$
548 S. 1 Z. kl l. KL.
555 S. 12 Z. ep l. Ep.
569 S. 17 Z. zb l. $2b$.
588 S. 16 Z. $aa + bb$ l. $aa - bb$.
597 S. 15 Z. $\sin(\omega + \beta) = 0$ l. $\sin 2(\omega + \beta) = 0$.
598 S. 15 Z. was $\sin\omega$ l. was hier ω
599 S. 2 Z. ſtatt x leſe man das Multiplications-zeichen $\bowtie$.
12 Z. FTe l. ETe.
602 S. 4 Z. gleich groß iſt l. gleich iſt.
604 S. 5 Z. von unten: ep l. $2p$.
611 S. 4 Z. keine l. kleine.
613 S. 1 Z. CTa l. CT$=a$.
614 S. 2 Z. FCT l. FT.
2 Z. von unten $\frac{y^2}{b^2} =$ l. $\frac{y^2}{b^2} \bowtie$.
617 S. 16 Z. $\surd(aa + bb)$ l. $\surd(aa - bb)$
619 S. 7 Z. GMT 180° l. GMT $=$ 180°
622 S. 3 Z. von unten nun l. um.
635 S. 6 Z. von unten: μFυ l. μFν.
636 S. 6 Z. von unten: conjugata l. conjugatæ.
2 Z. von unten: $a^2 \cos\eta$ l. $a^2 \cos\eta^2$.
637 S. 6 Z. $\frac{2aa}{a}$ l. $\frac{2aa}{b}$.
646 S. 7 Z. CD$=$G$=\varrho$ l. CD$=\varrho$
13 Z. Gc l. Cc.

19 Z. OC=CK l. OC−CK

21 Z. cK, cotψ l. cK.cotψ.

649 S. 6 Z. $tK=\vartheta$ l. $tK=\delta$.

655 S. 12 Z. OS=CD l. OS−CD.

657 S. letzte Z. $c(1+$ cotψ^2 l. $c(1+$ cot$\psi^2)$.

661 S. 4 Z. c.cot$\psi+\delta$ l. c.cot$\psi-\delta$.

677 S. 12 Z. $\psi+\mu$ l. $\psi+\beta$.

687 S. 2. u. 3 Z. ſoll heiſſen $Tm = \frac{OT}{OT+TF} \cdot FM$

694 S. 7 Z. derſelbe f, l. derſelbe f'.

695 S. 20 Z. FP l. fP.

701 S. 9 Z. 15 l.. 25.

711 S. 5 Z. ſinε+ſinφ l. ſinε+ſinπ.

17 Z. $90°+\Lambda$ l. $90°+\pi$.

713 S. 22 Z. TR l. FR.

717 S. 4 Z. Zl l. ZL.

719 S. 17 Z. r.coſφ l. r:coſφ

720 S. 7 Z. $8°\,31'\,12''$ l. $8°\,45'\,36''$.

726 S. 3 Z. von unten ſec$(\varepsilon-\pi)^2$ l. ſec$\frac{1}{2}(\varepsilon-\pi)^2$.

728 S. 9 und 10 Z. ſoll ſtatt des Zeichens + das Multiplicationszeichen $\times$ ſtehen.

731 S. 19 Z. Nu l. Nn.

737 S. 5 Z. ϱ^2 coſπ ſinφ^2 l. ϱ^2 coſπ^2 ſinφ^2.

738 S. 15. 16 Z. gehört das tangφ noch in die 15 Zeile.

4 Z. von unten muß nach $\sqrt{}$ noch ein (ſtehen.

739 S. 3 Z. $90°-\gamma$ l. $90°-\varphi$.

9 Z. ſinε^2 l. ſinε.

741 S. 13 Z. ſecη^2 cotd^2 l. ſecη^2 cotϑ^2.

743 S. 21 Z. aRn l. aPμ.

744 S. 21 Z. $mekn$ l. meKn.

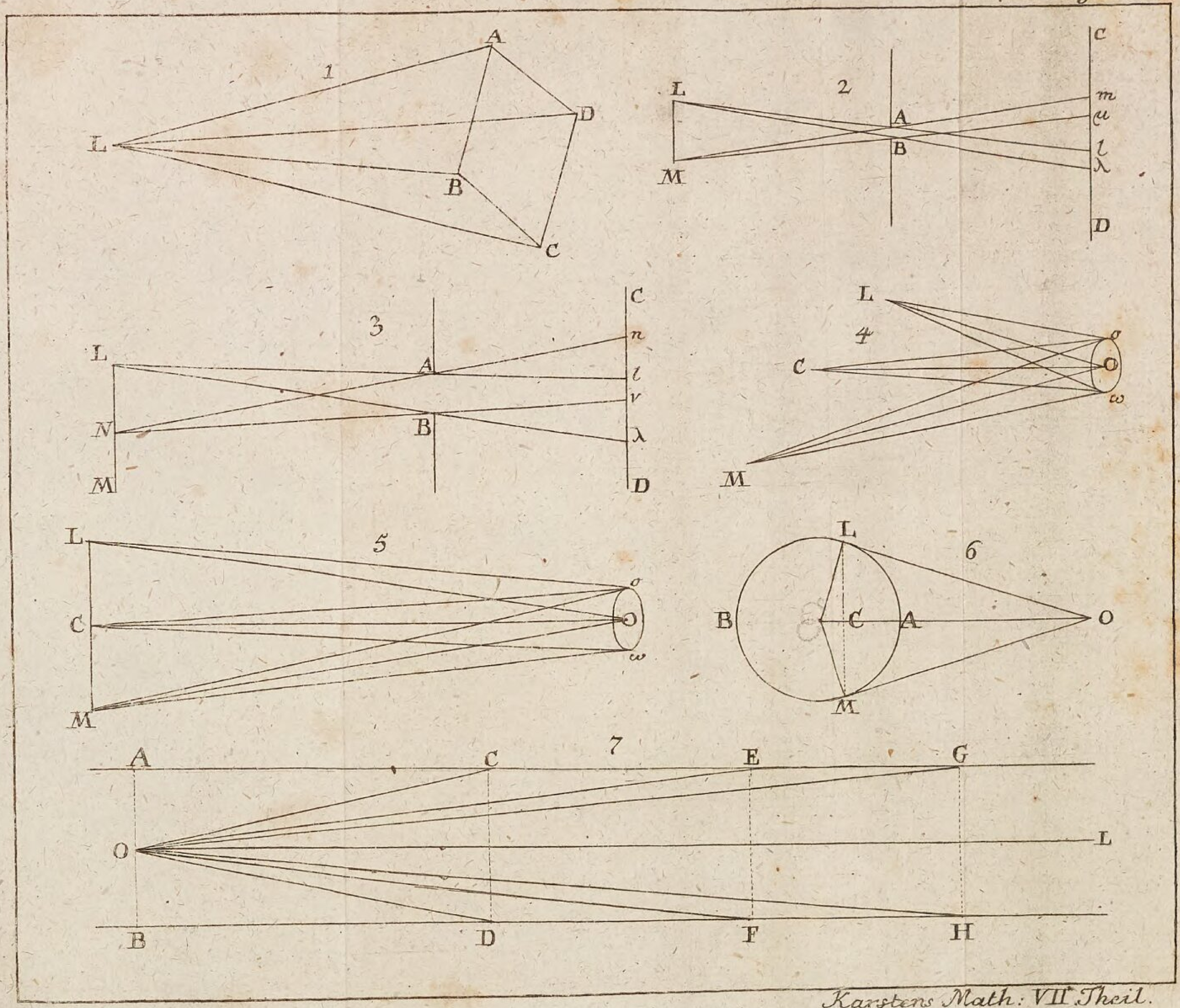
759 S. 2 Z. Ep l. Cp.

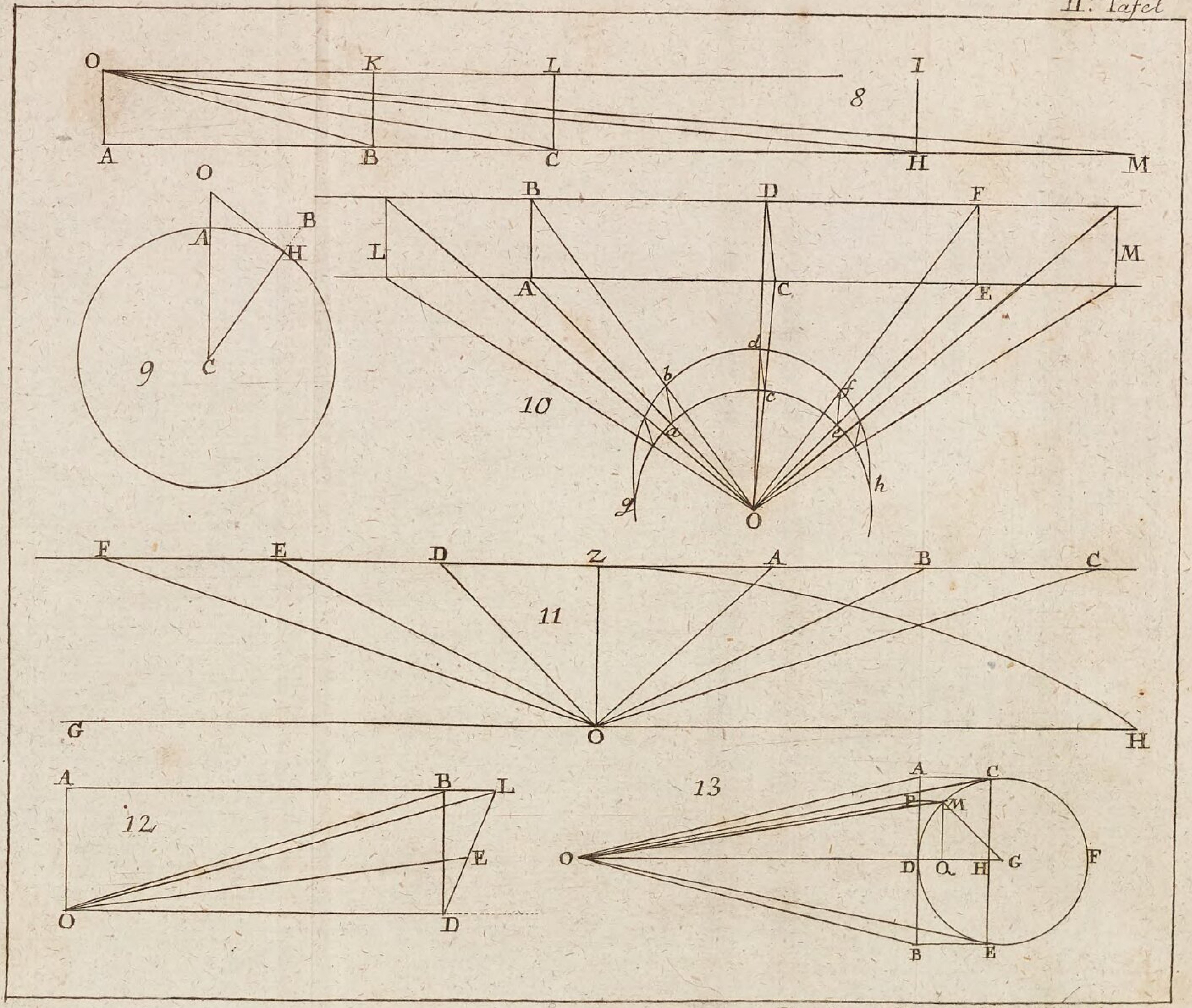
763 S. 7 Z. Bb' l. B$'b'$.

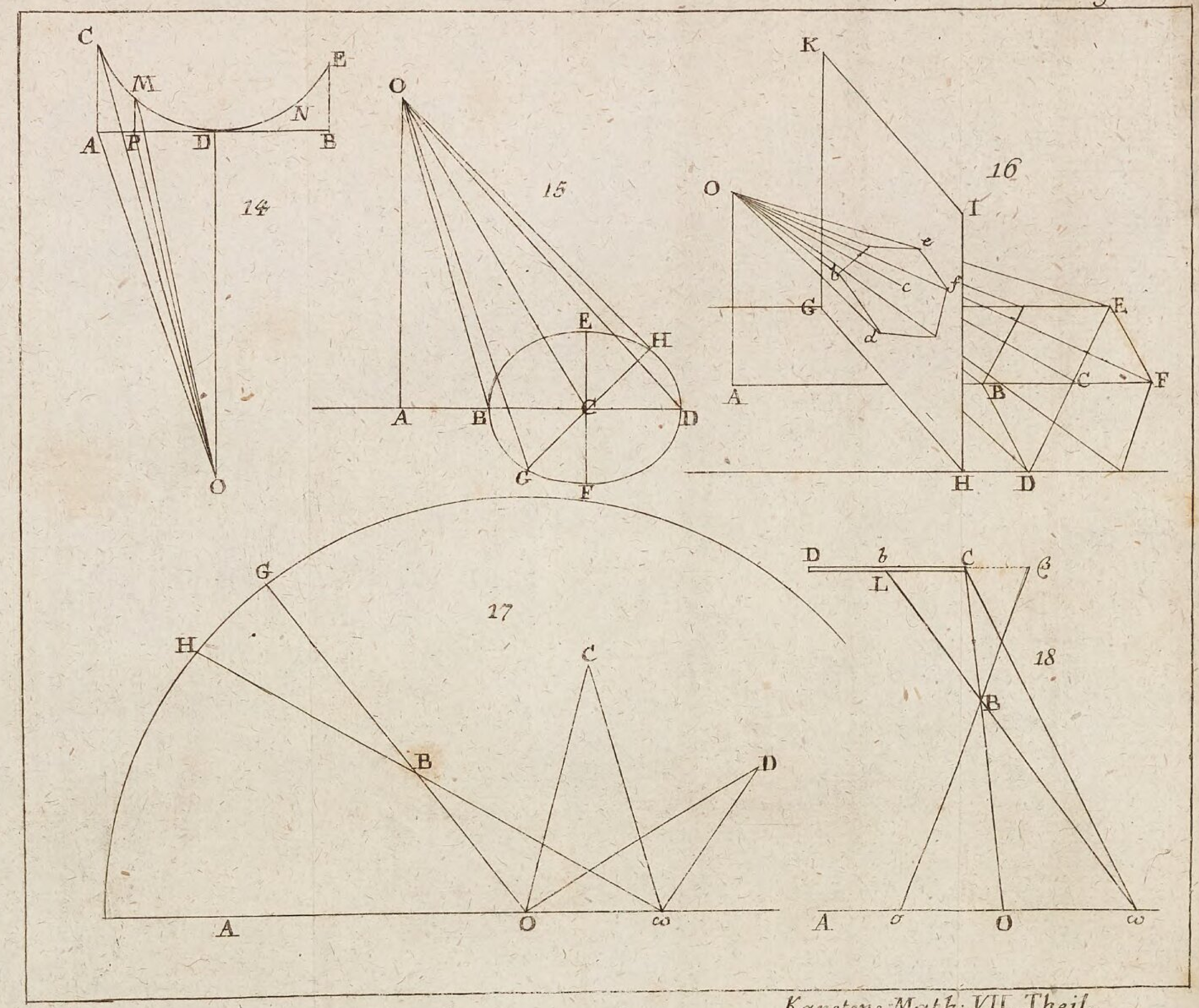
768 S. 11 Z. $b\vartheta$ l. $b\delta$.

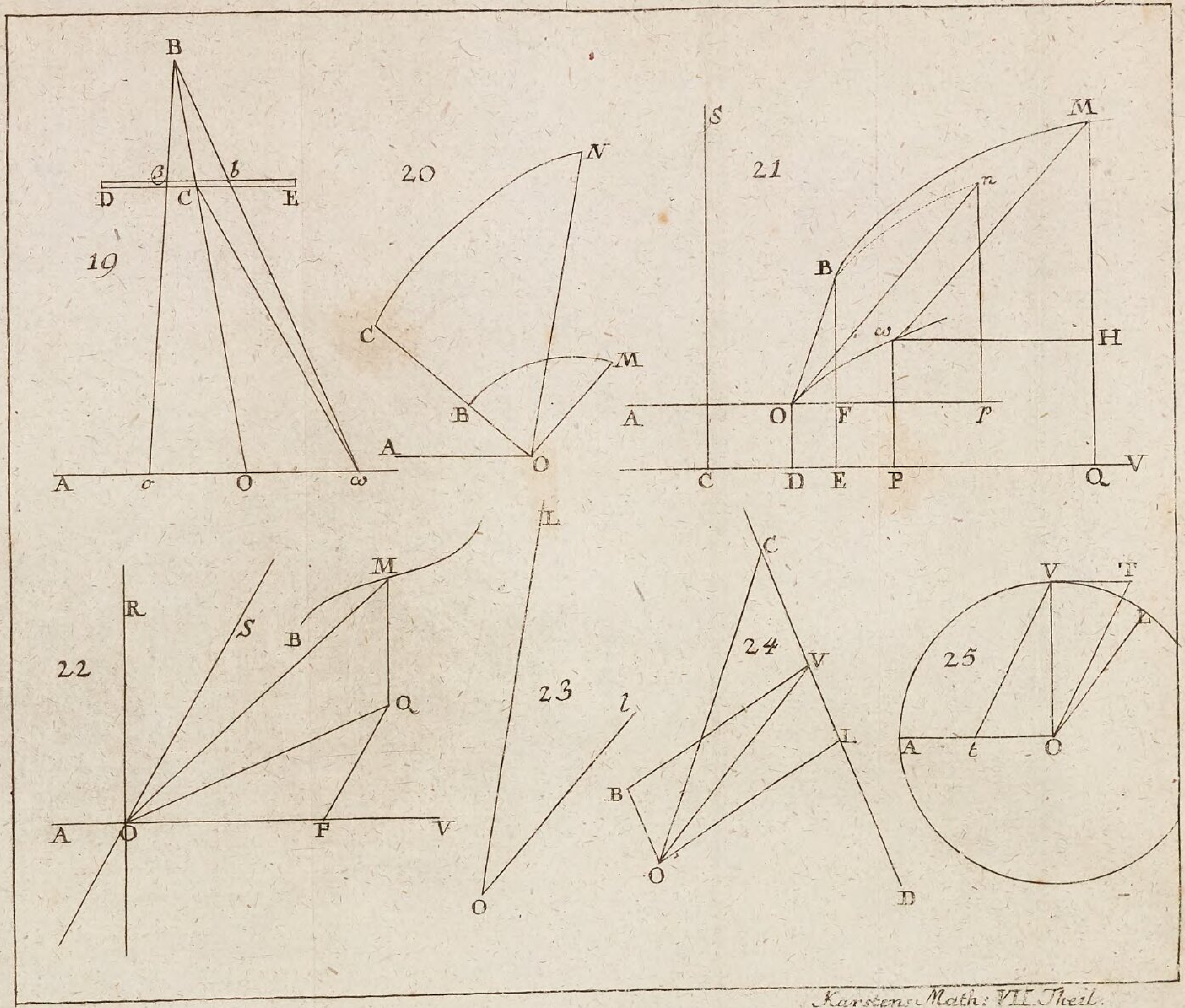
3 Z. von unten: ct l. $c't$.

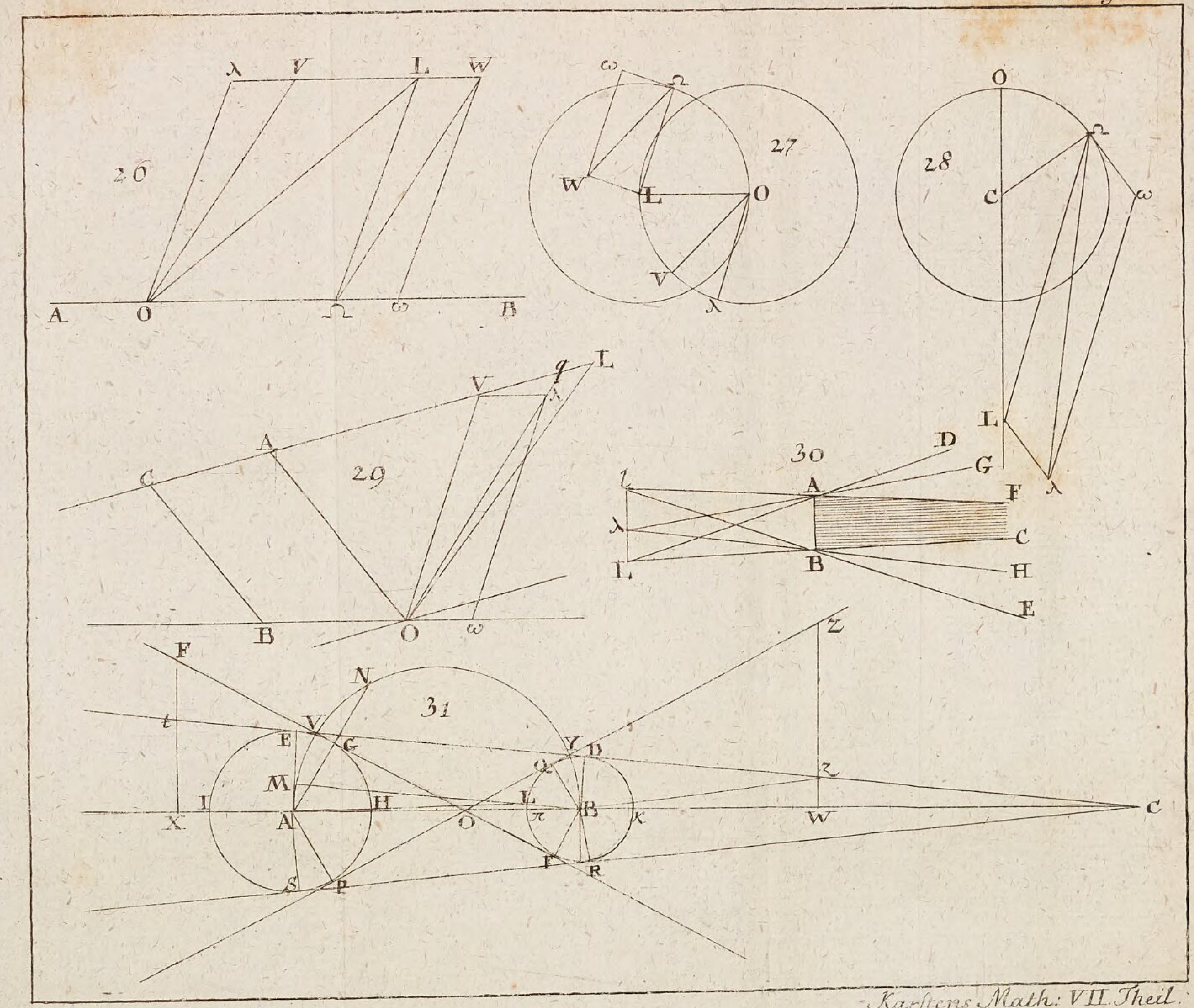
771 S. 5 Z. $\varepsilon=\varrho$ l. $e=\varrho$.
15 Z. muß am Ende des Zählers ein) ſtehen.
776 S. letzte Z. nach $b-\delta$ ſetze man $=$.
777 S. 8 Z. von unten ΩFr l. ΩTr.
778 S. 2 Z. am Ende des Zählers muß noch ein) ſtehen.
779 S. 20 Z. $h\varrho\cos\varepsilon$ l. $h\varrho\cos\xi$.
784 S. 15 Z. $RD=\varphi$ l. $RD=y$.
788 S. 13 Z. ſetzt man am Ende des Nenners einen).
791 S. 5 Z. muß $\sin\lambda$ unter $\sin\lambda^2$ weggelöſcht, und bey $4h\varrho(h^2+\varrho^2)$ $\sin\varepsilon$ als ein Factor geſetzt werden.
17 Z. $\lambda=180°$ l. $\lambda+180°$.
795 S. 17 Z. in ε l. in E.
796 S. 11 Z. $\sin e$ l. $\sin\varepsilon$.
799 S. 4 Z. von unten $\tan\xi$ l. $\tan\zeta$.
800 S. 8 Z. Fc' l. $F'c'$.
801 S. 2 Z. von unten C' l. c'.
809 S. 14 Z. $t\alpha'$ l. $t\alpha$.
813 S. 6 Z. $\pm\varrho\sqrt{}=1$ l. $\pm\sqrt{-1}$.
818 S. 5 Z. im 277 §. hies l. im 277 §. ζ hies.
6 Z. TCK l. FCK.
833 S. Am Ende der 9ten Zeile muß noch $\times$ ſtehen.
843 S. 14 Z. $\sin q^2$ l. $\sin\eta^2$.
5 Z. von unten muß am Ende des Zählers ein) ſtehen.
847 S. 1 Z. $\cot\psi\pm$ l. $\cot\psi=\pm$.
16 Z. 369 §. n. 6. l. 396 §. n. 6.
18 Z. durch $\cot\delta$ l. auch $\cot\delta$.
853 S. 15 Z. $(1+x)\frac{1}{2}$ l. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.
856 S. 10 Z. ſetzt man nach μ ein Comma.
859 S. 6 Z. $\sin\varphi=1$ l. $\sin\psi=1$.
863 S. 5 Z. $\frac{2QQ}{\delta}$ l. $\frac{2QQ}{P}$.

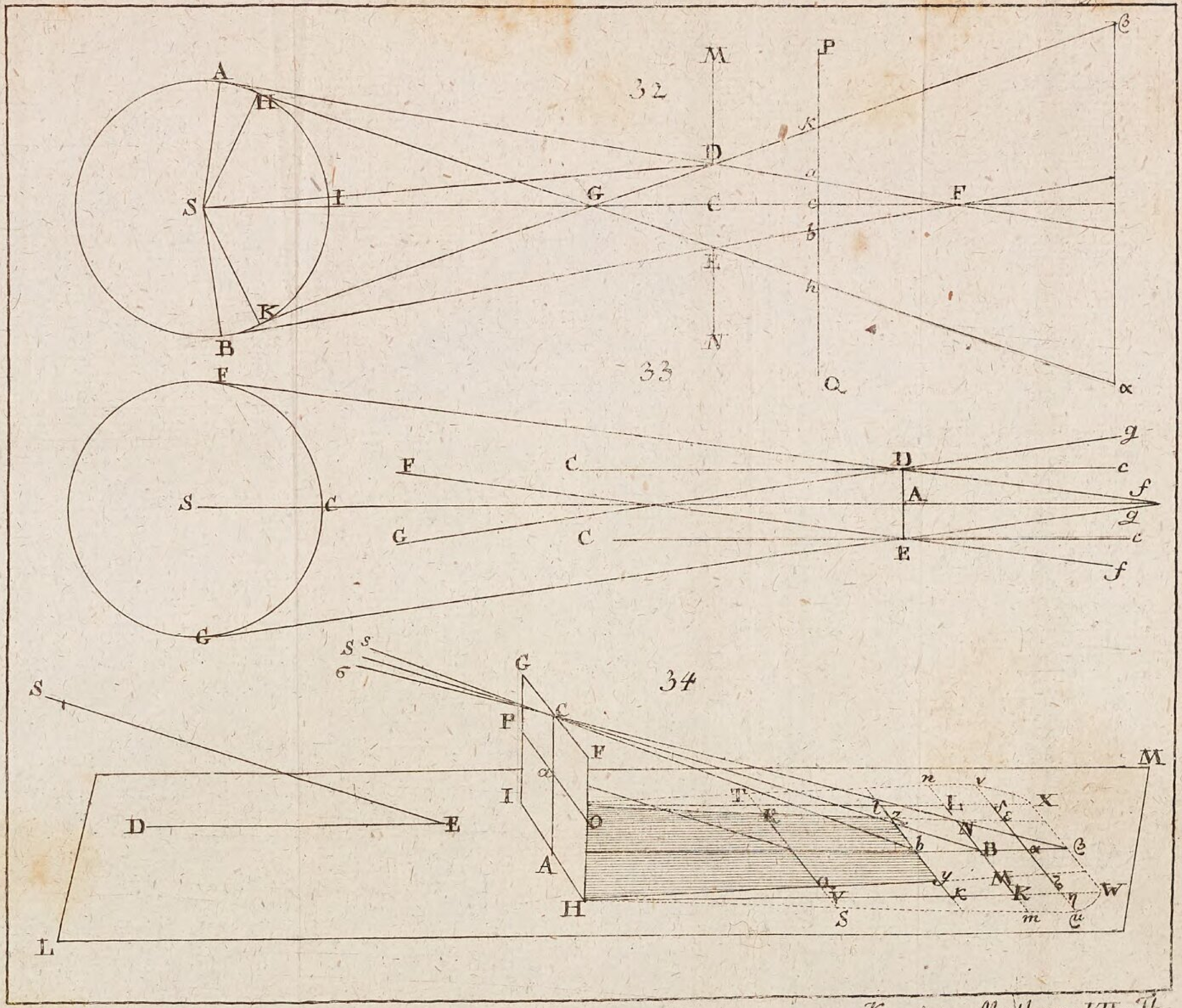

1
L
A
D
B
C
2
L
M
A
B
C
m
μ
l
λ
D
3
L
N
M
A
B
C
n
l
ν
λ
D
4
L
C
M
σ
O
ω
5
L
C
M
σ
O
ω
6
L
B
C
A
O
M
7
A
C
E
G
O
L
B
D
F
H

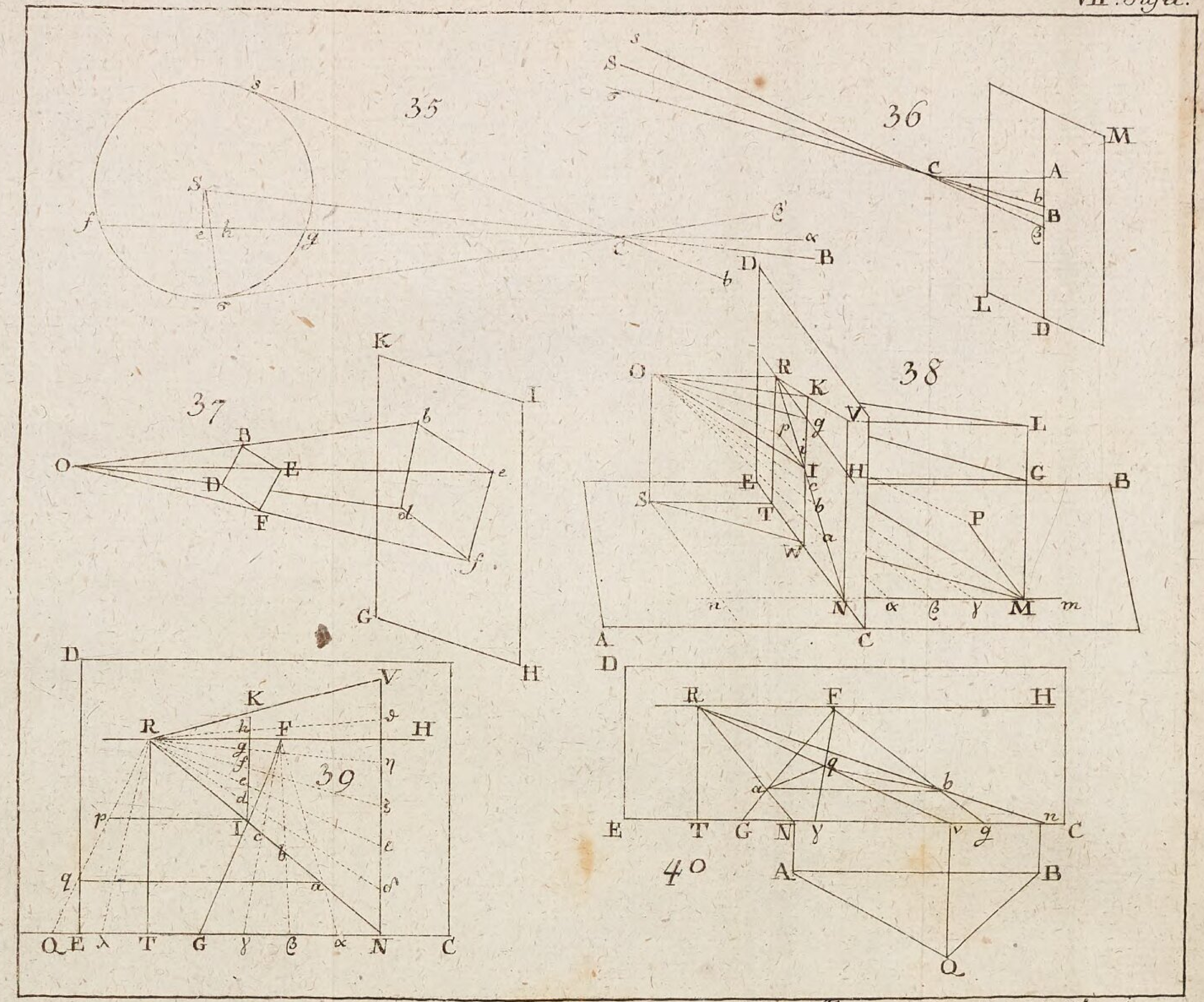

O K L I 8
A B C H M
O B A H 9 C
B D F L M A C E d b f c a e g O h 10
F E D Z A B C 11 G O H
A B L 12 E O D
13 A C P M O D Q H G F B E


14
C
M
E
N
A
P
D
B
O
15
O
E
H
A
B
C
D
G
F
16
K
I
O
e
b
c
f
G
E
d
A
B
C
F
H
D
17
G
H
C
B
D
A
O
ω
18
D
b
C
β
L
B
A
σ
O
ω

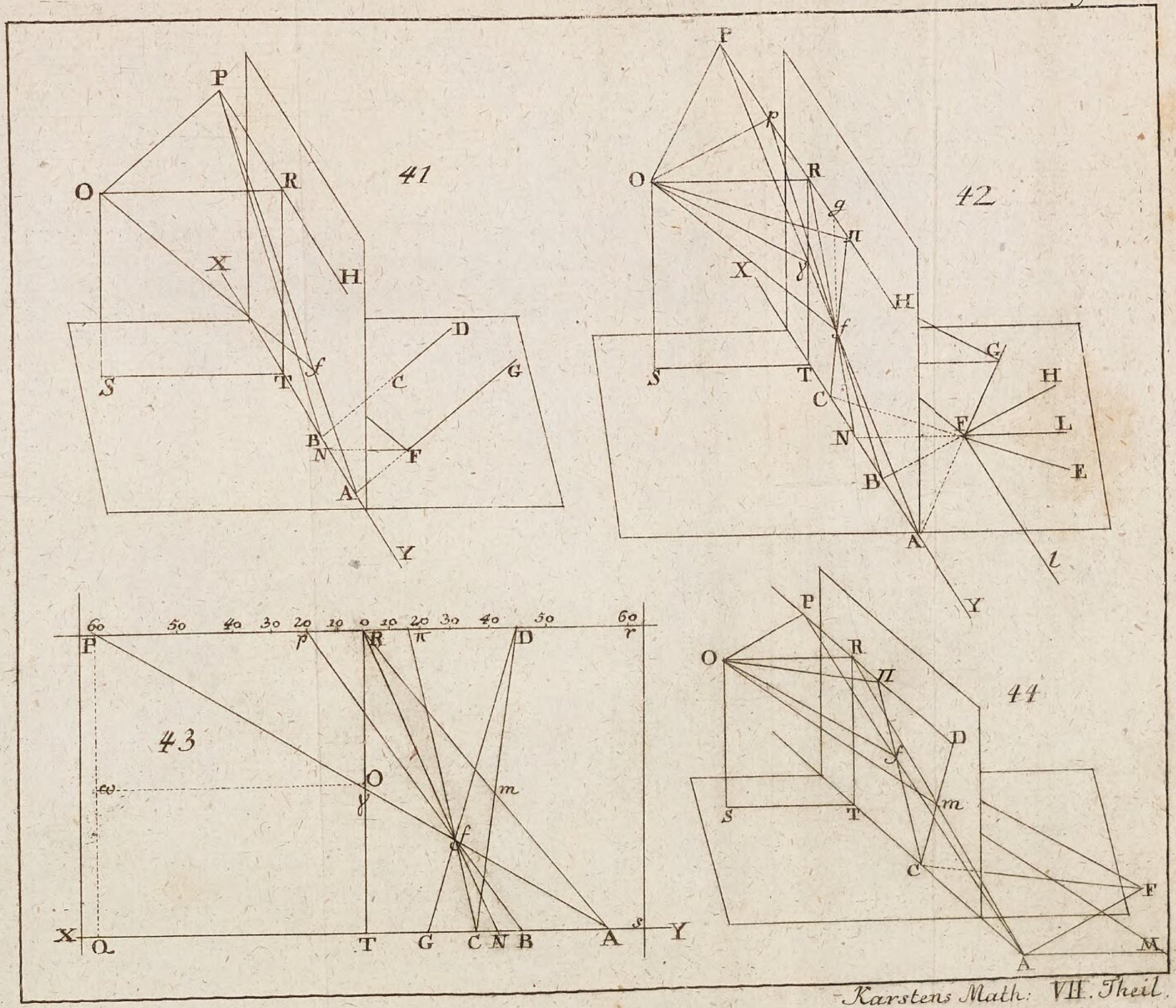

19
20
21
22
23
24
25

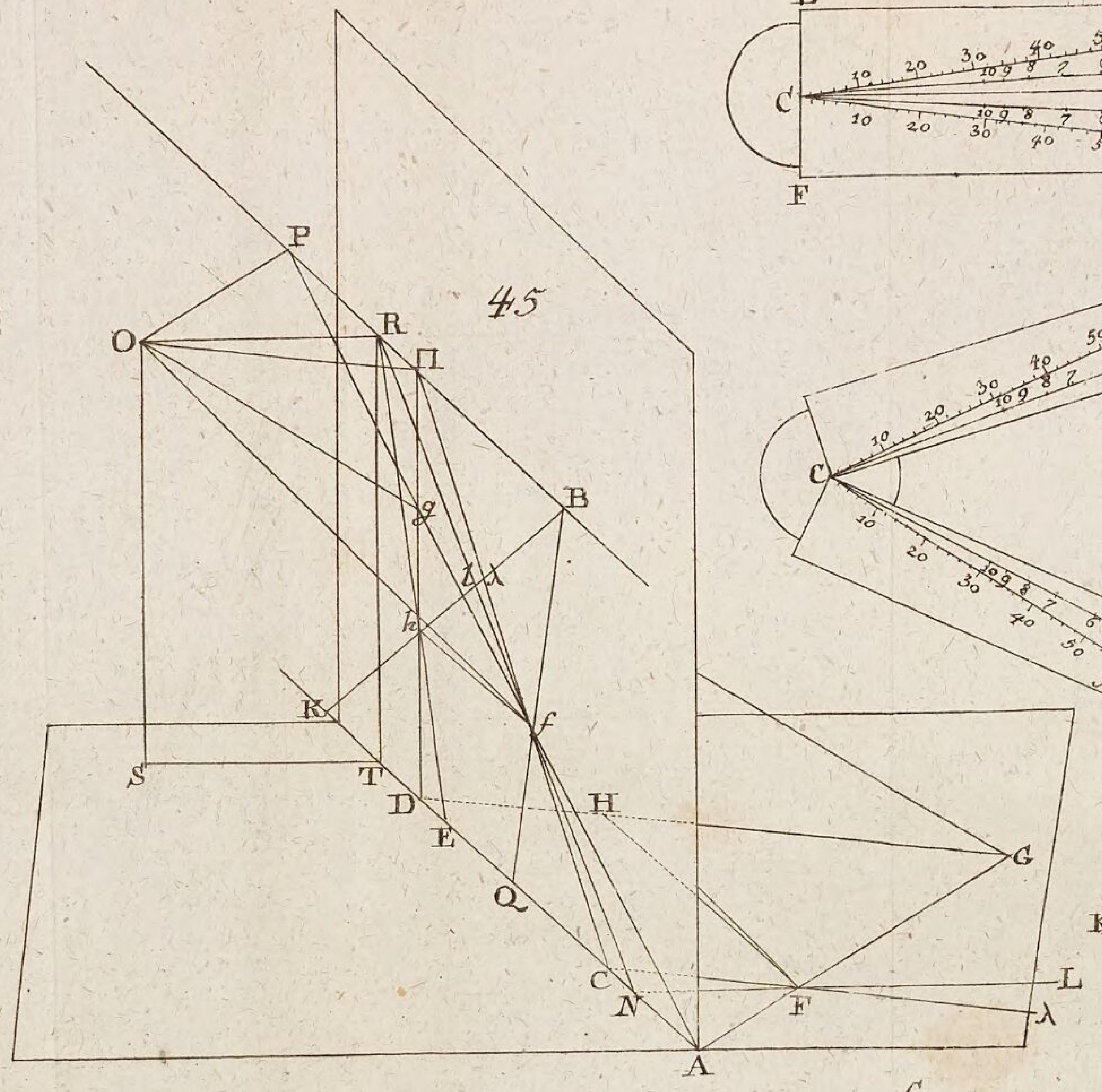

26
27
28
29
30
31

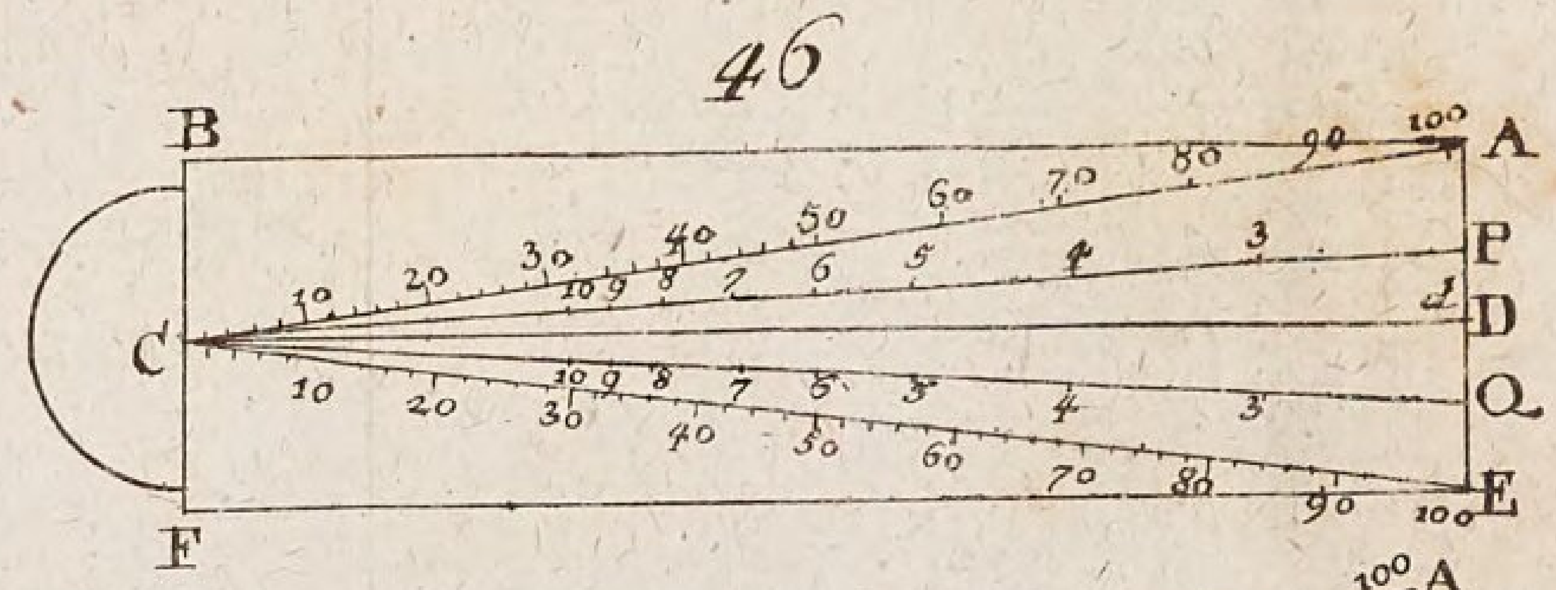

32
33
34

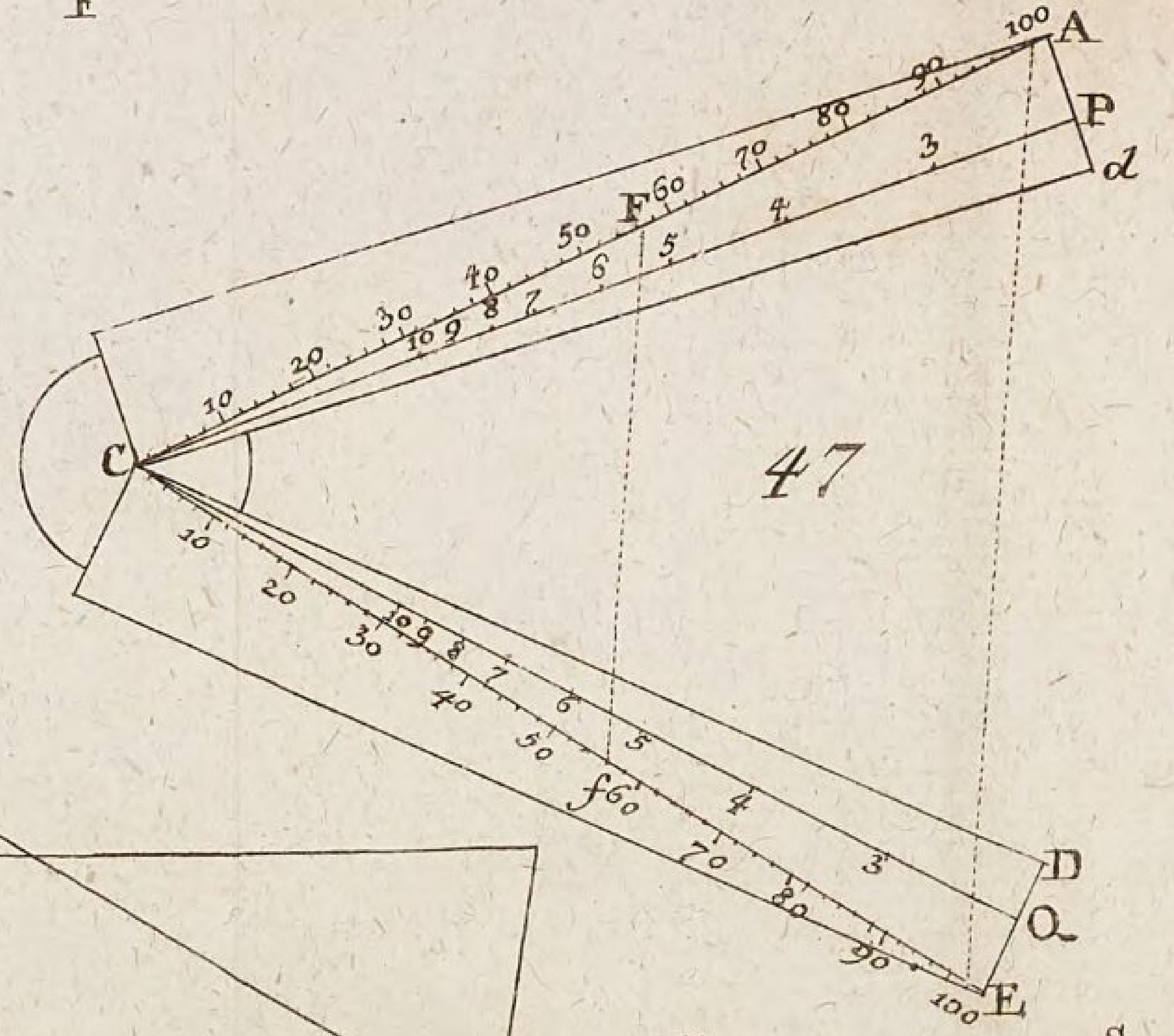

35
36
37
38
39
40

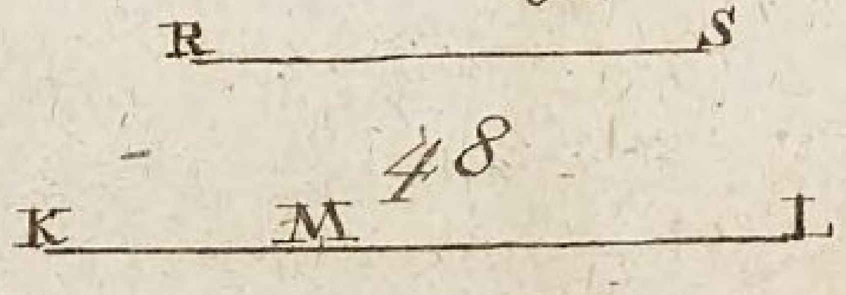
H
f
B
N
A
20

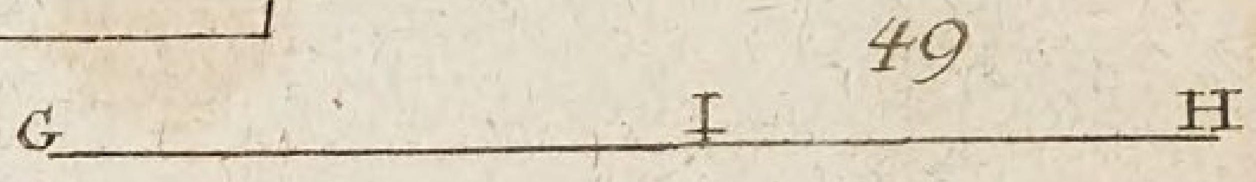

41
42
43
44

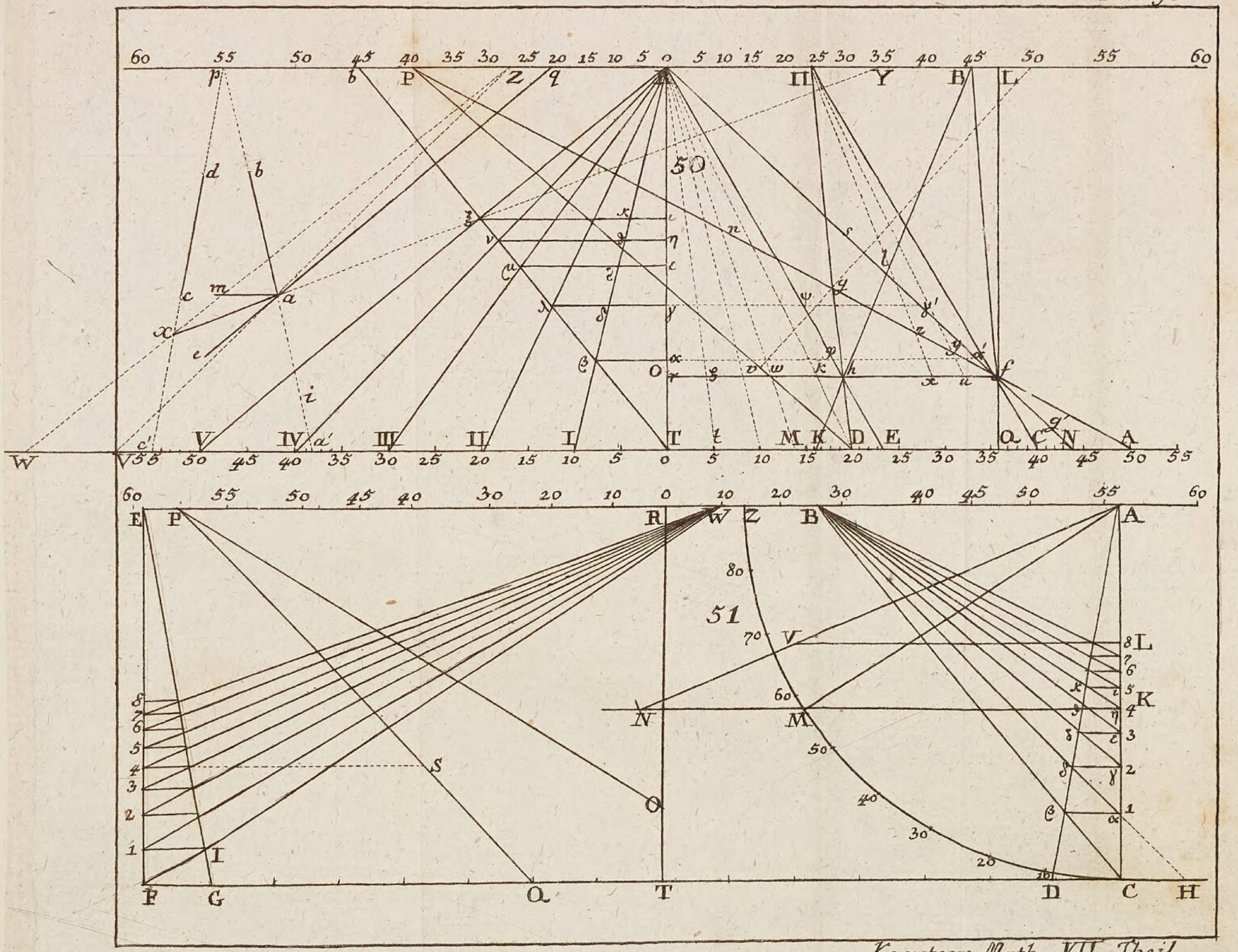

45
P
O
R
Π
g
B
t λ
h
K
f
S
T
D
H
E
G
Q
C
L
N
F
λ
A


46
B
A
P
D
C
Q
F
E

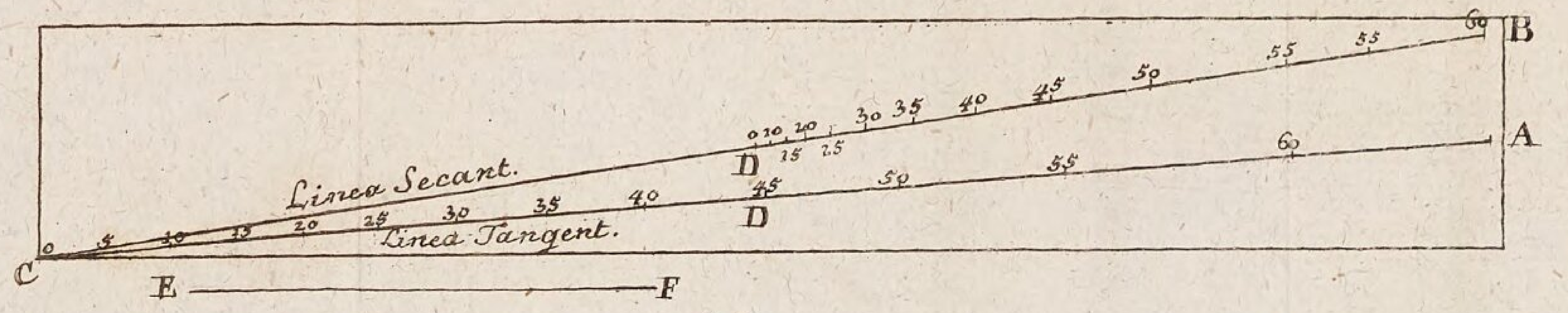

A
P
d
F
C
47
f
D
Q
E


R
S
48
K
M
L

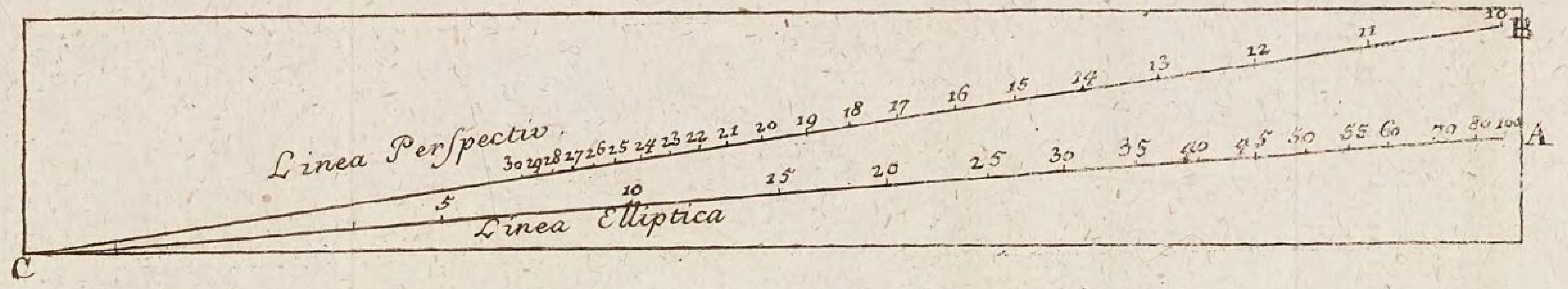

49
G
I
H

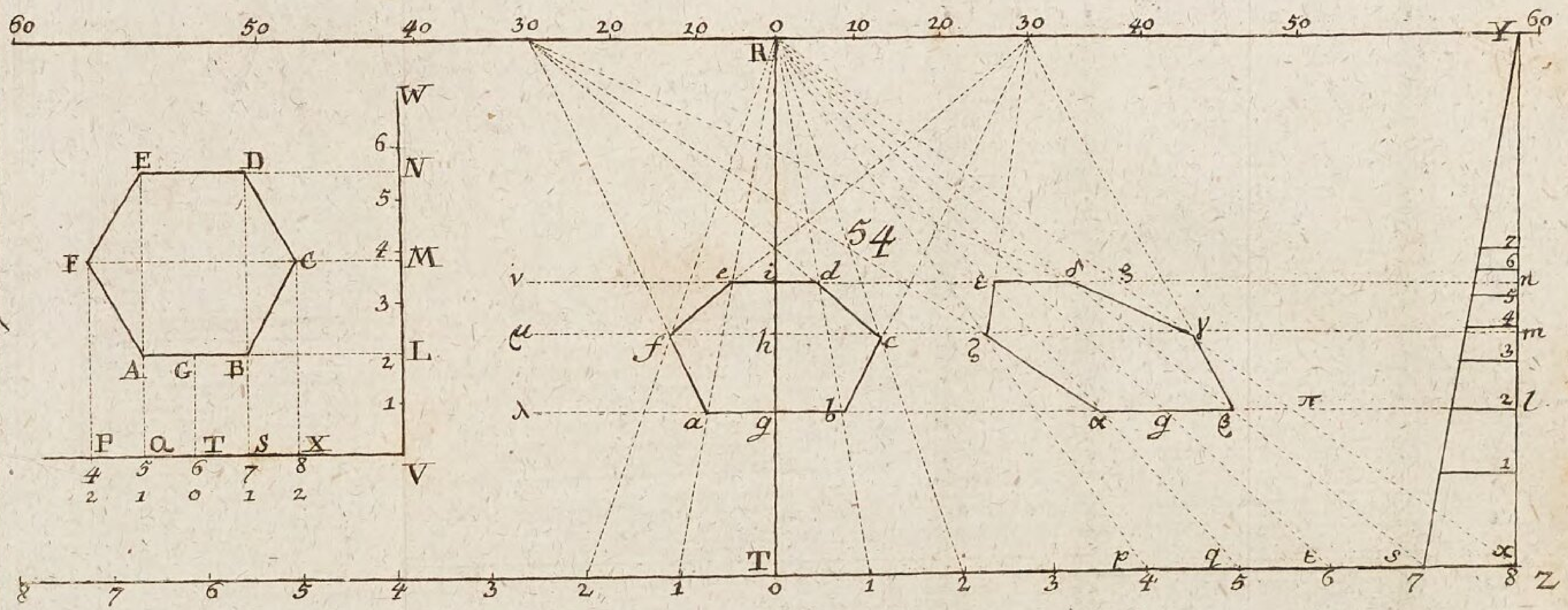

50
51

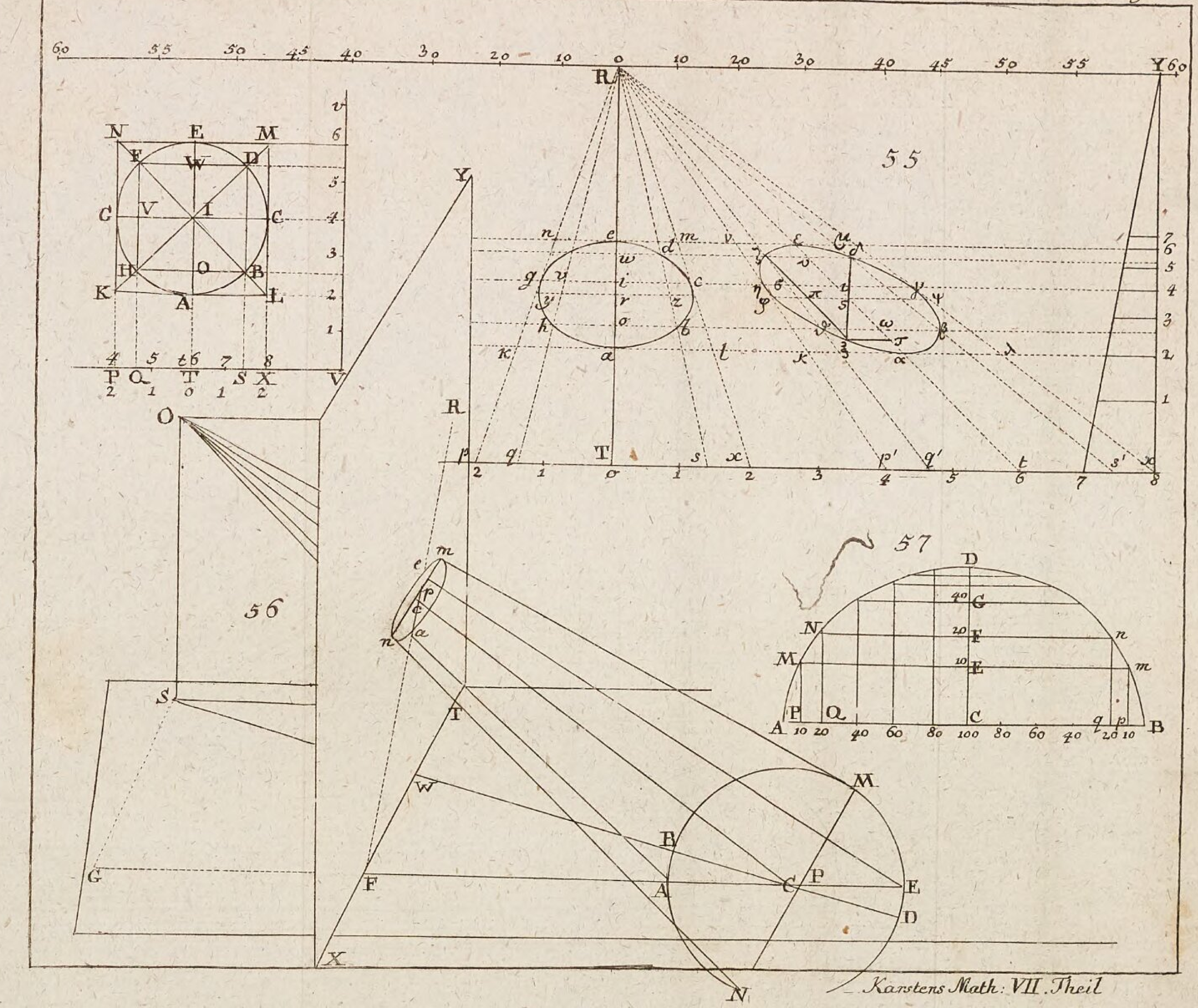
52

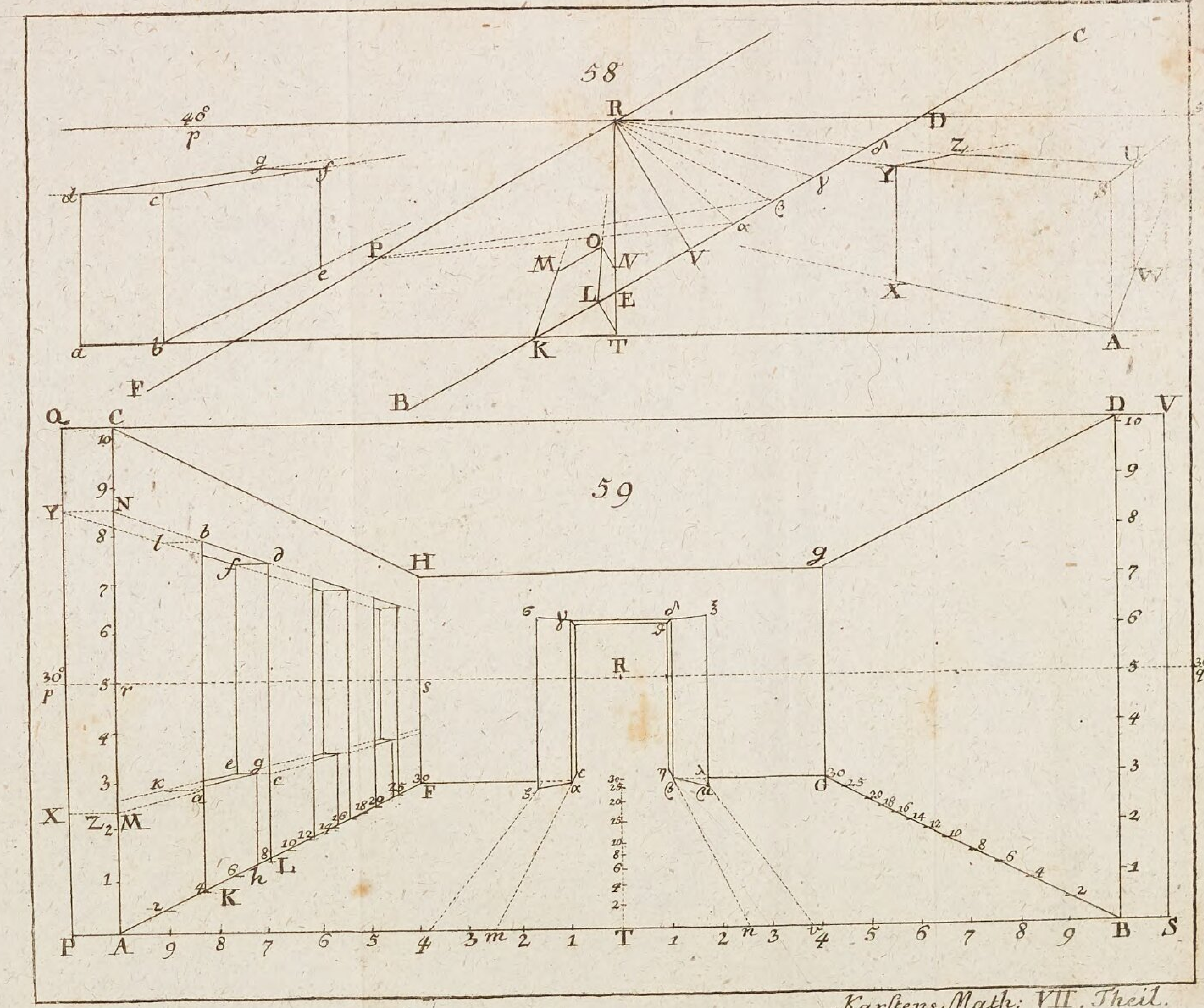

Linea Secant.
Linea Tangent.
C
E
F
D
A
B

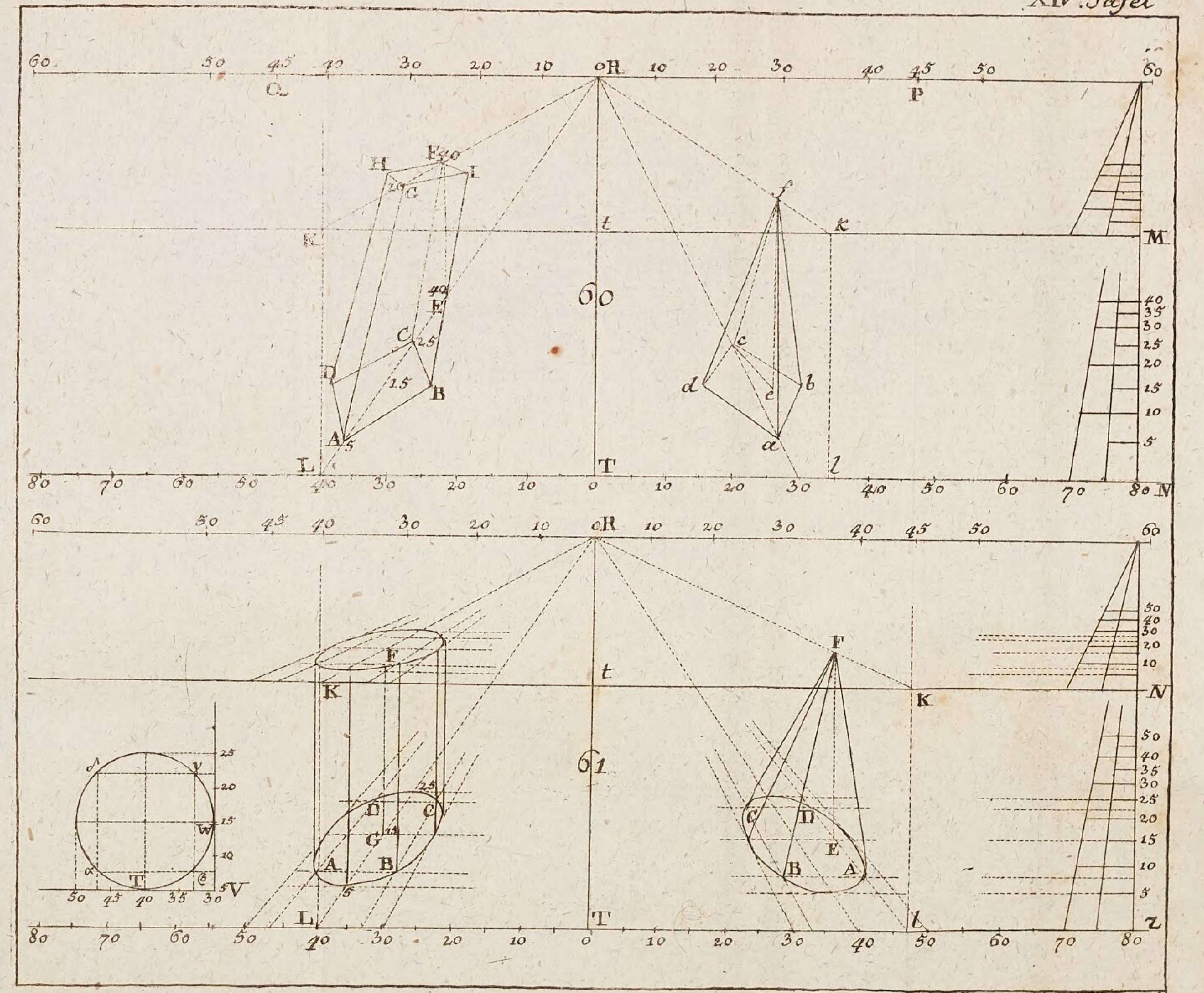
53

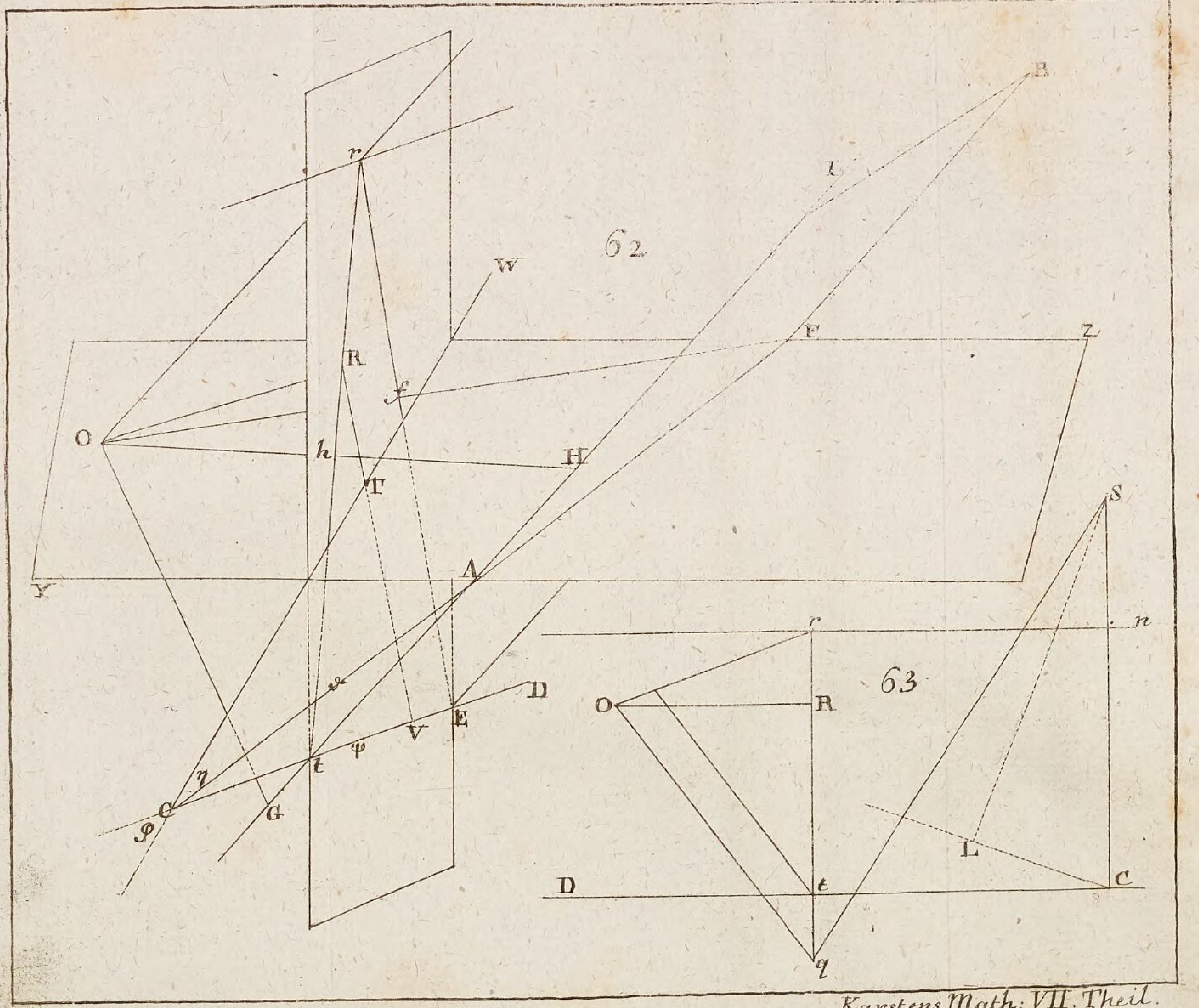

Linea Perſpectiv.
Linea Elliptica
C
A
B

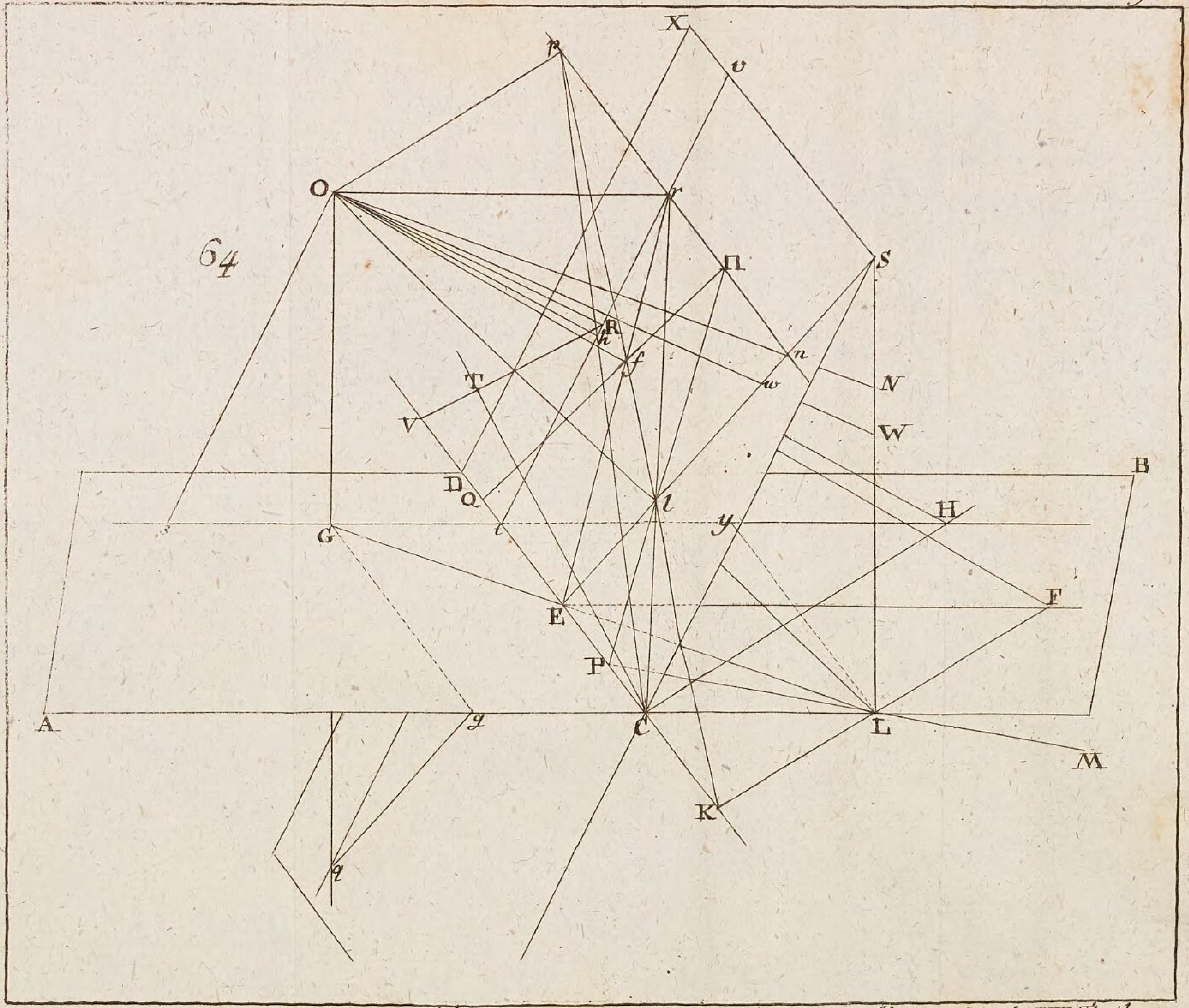

54
R
T
W
N
M
L
V
Y
Z

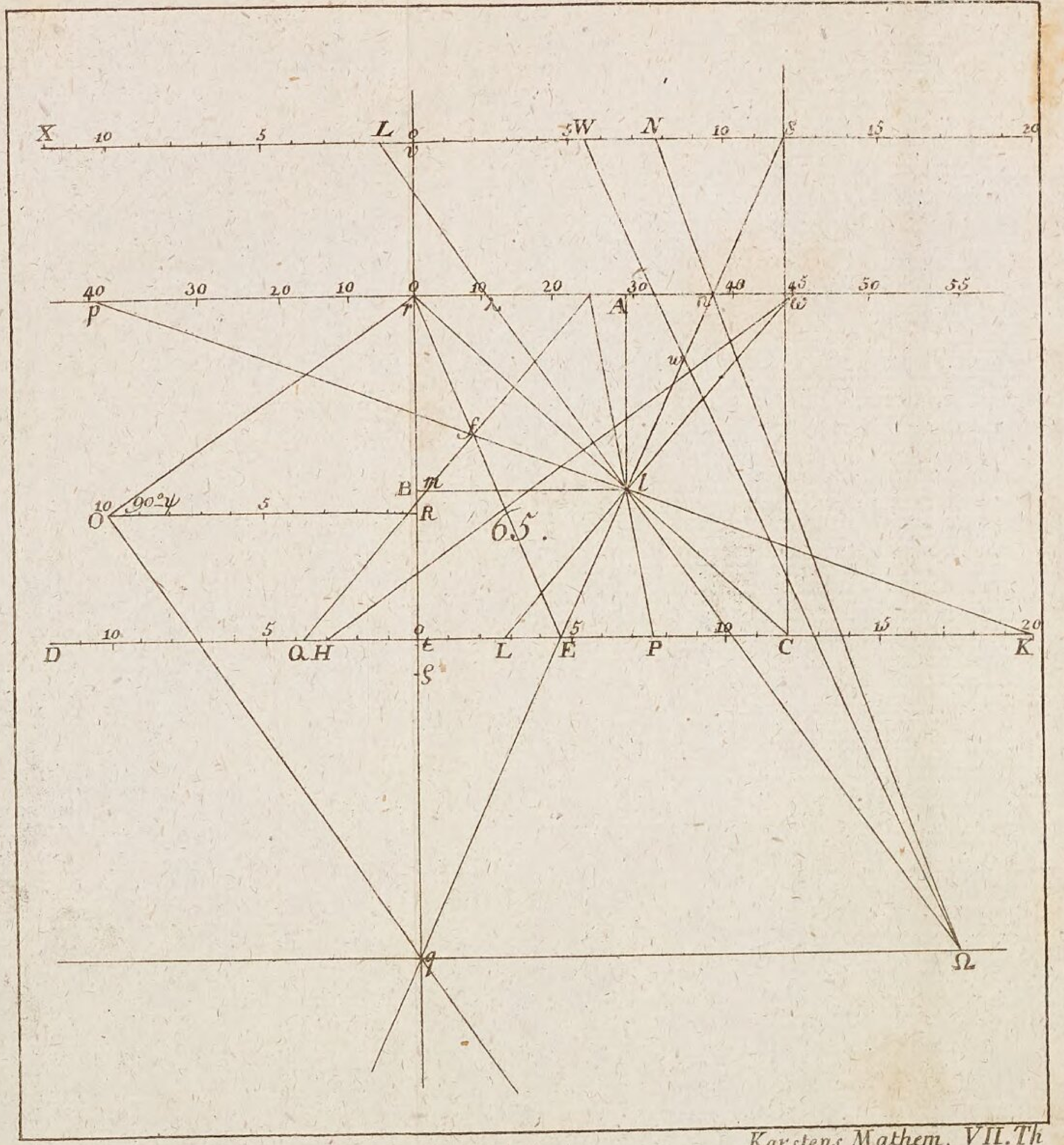

55
56
57


58
59

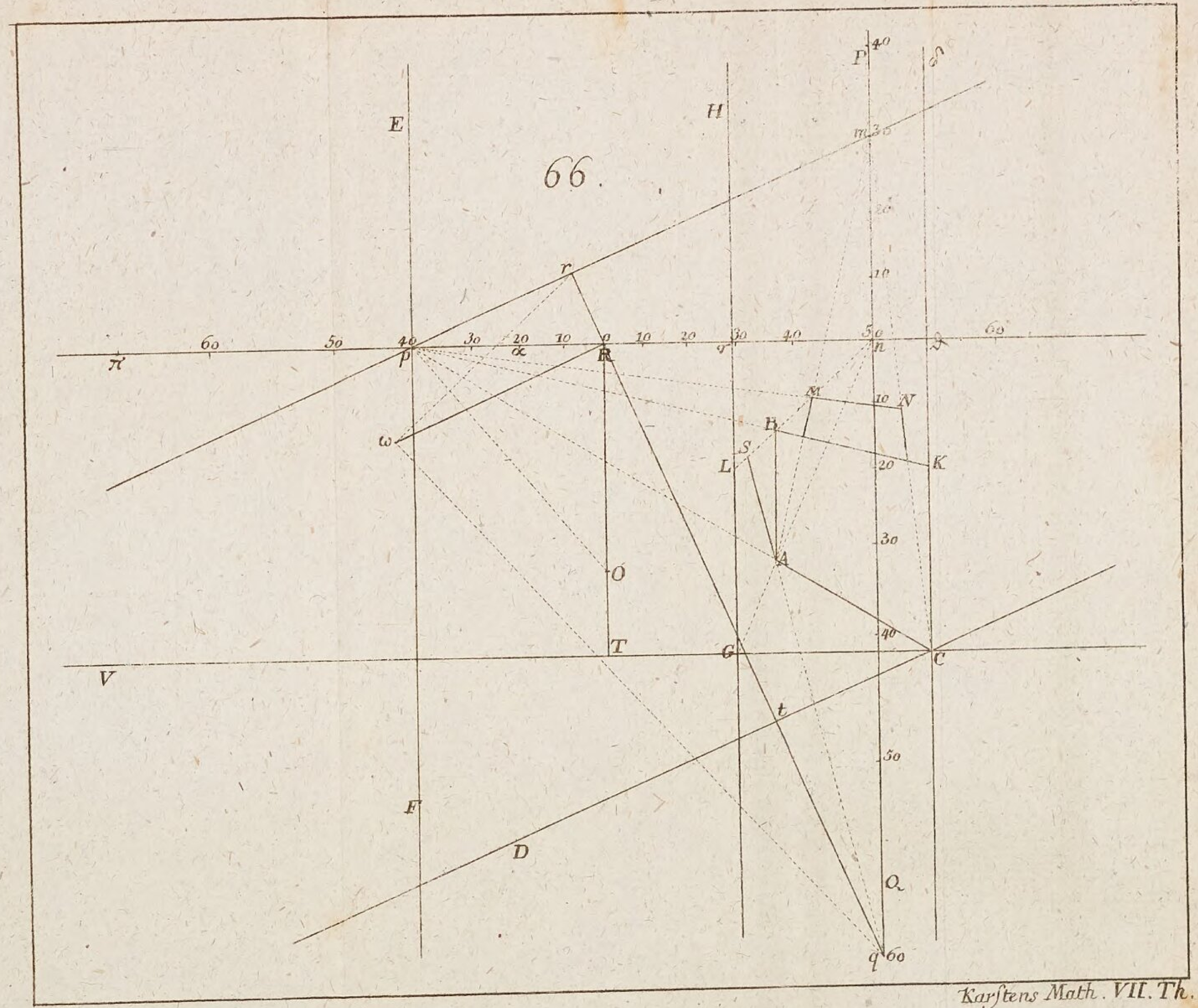

60
61

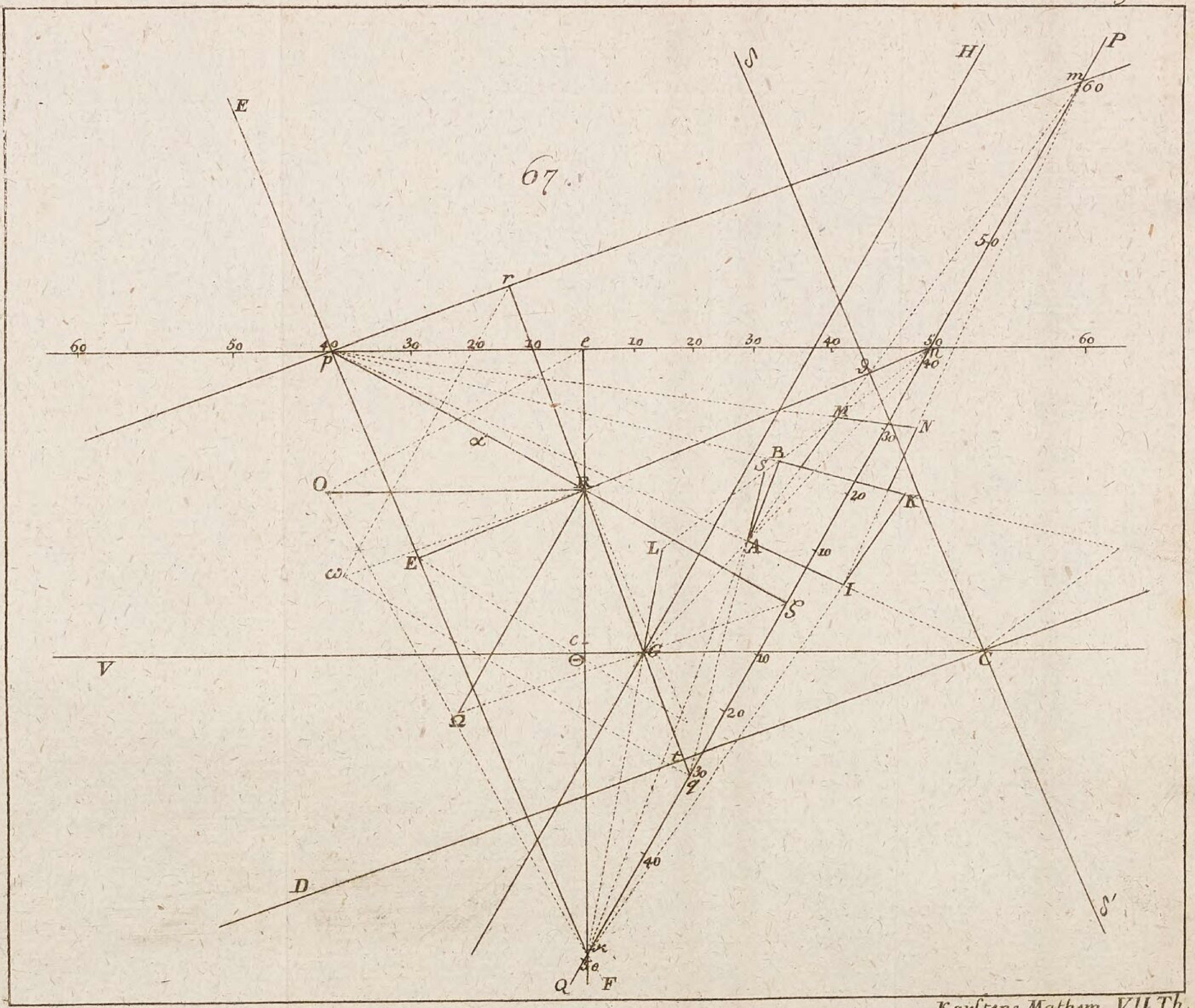

62
r
R
f
F
Z
B
l
W
O
h
H
T
S
A
Y
D
E
V
t
φ
ψ
η
C
G
63
r
n
O
R
D
t
L
C
q

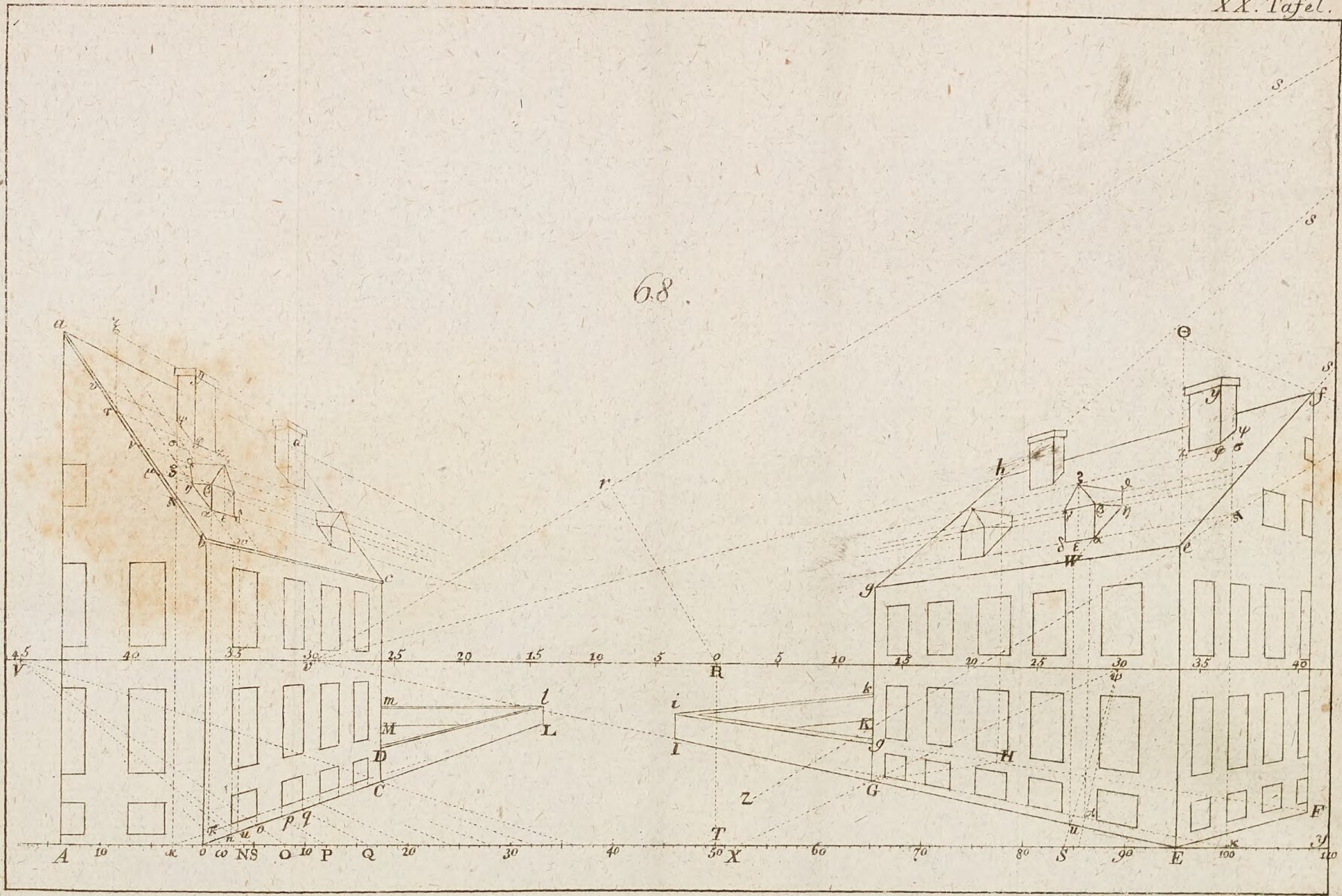

64
X
p
v
O
r
Π
S
R
h
f
n
T
w
N
V
W
B
D
Q
l
H
G
t
y
F
E
P
A
g
C
L
M
K
q

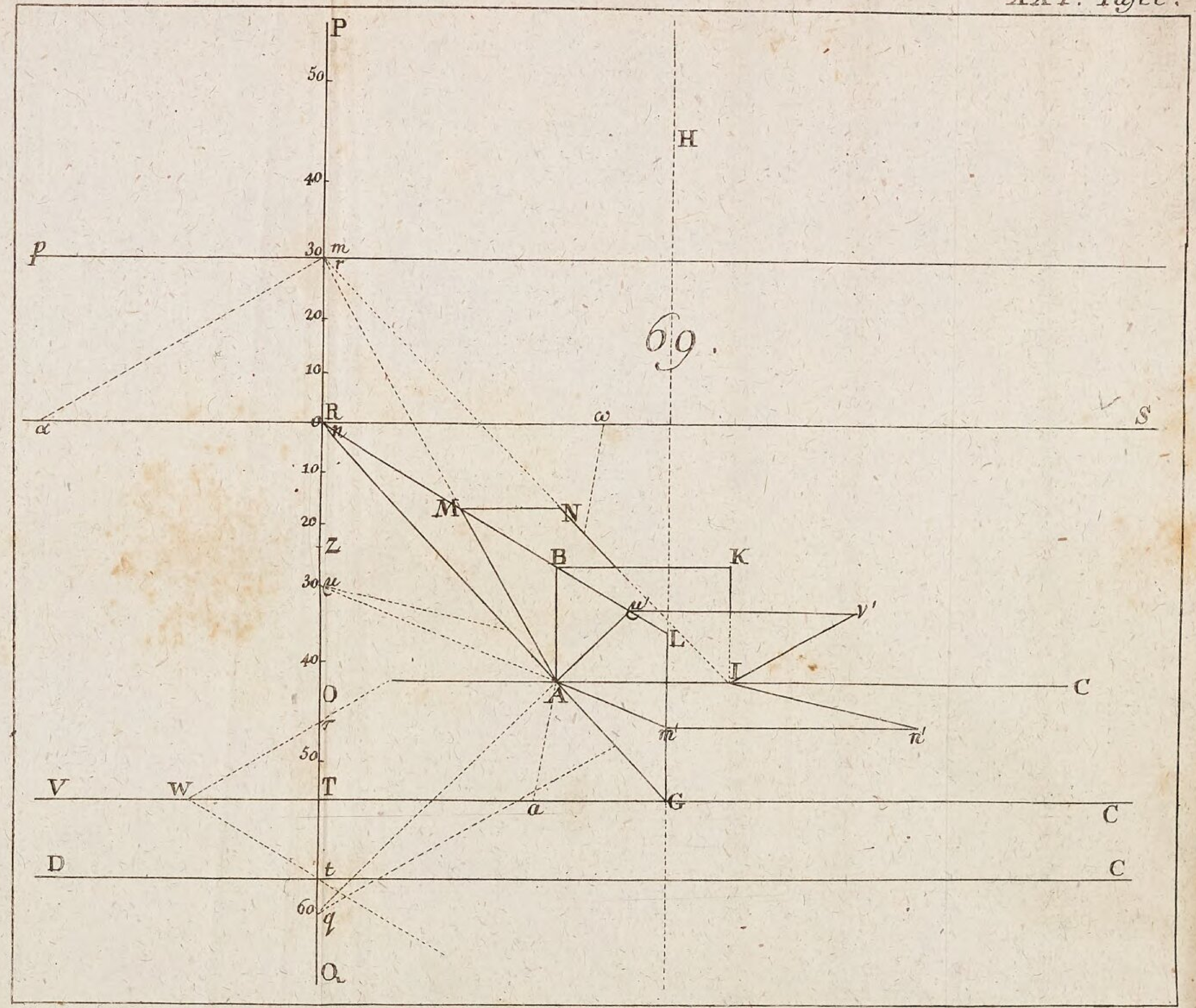


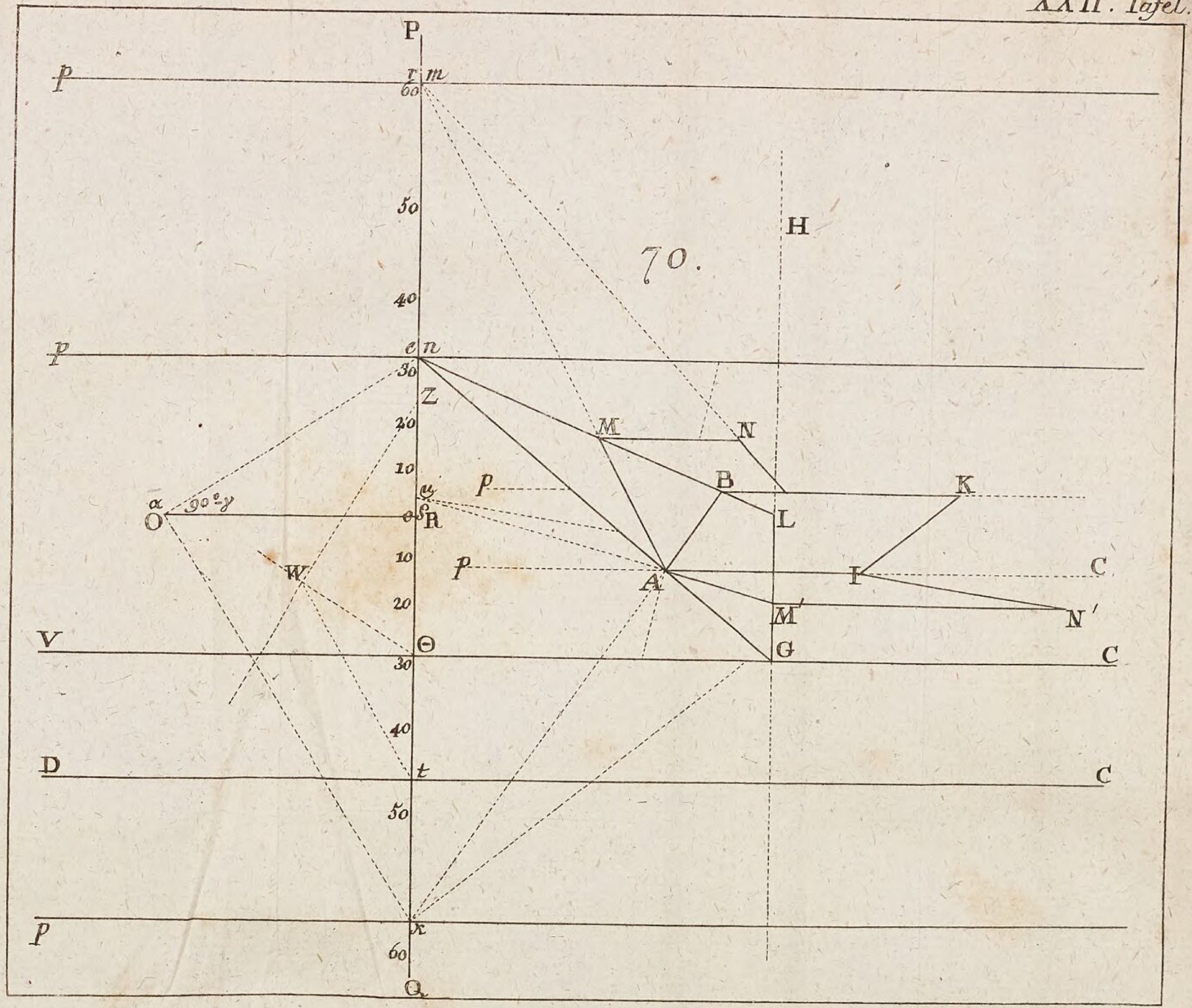
X
L
W
N
Z
40
30
20
10
0
5
15
20
45
50
55
p
r
A
n
ω
u
f
B
m
l
O
90°-ψ
R
65.
D
Q
H
t
ρ
E
P
C
K
q
Ω

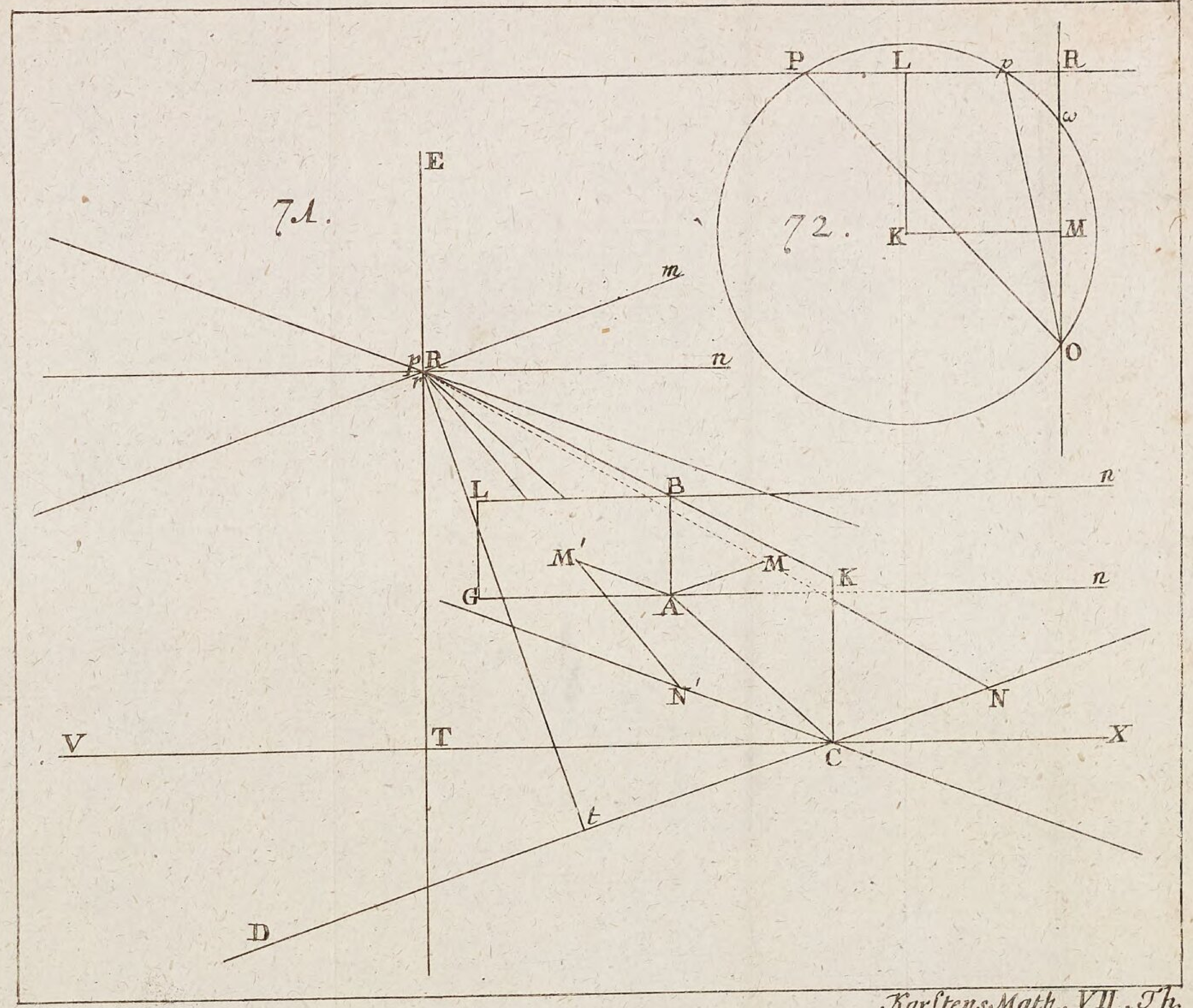

66.
E
H
P
r
π
p
α
R
n
ω
O
T
G
C
V
L
S
B
M
N
K
A
t
F
D
Q
q


67.
E
S
H
P
m
60
r
60
50
40
30
20
10
e
10
20
30
40
50
60
p
9
n
40
M
N
50
30
B
S
K
20
O
R
A
L
10
E
ω
α
ξ
I
V
c
Θ
G
10
C
20
Ω
t
30
q
40
D
S'
Q
F

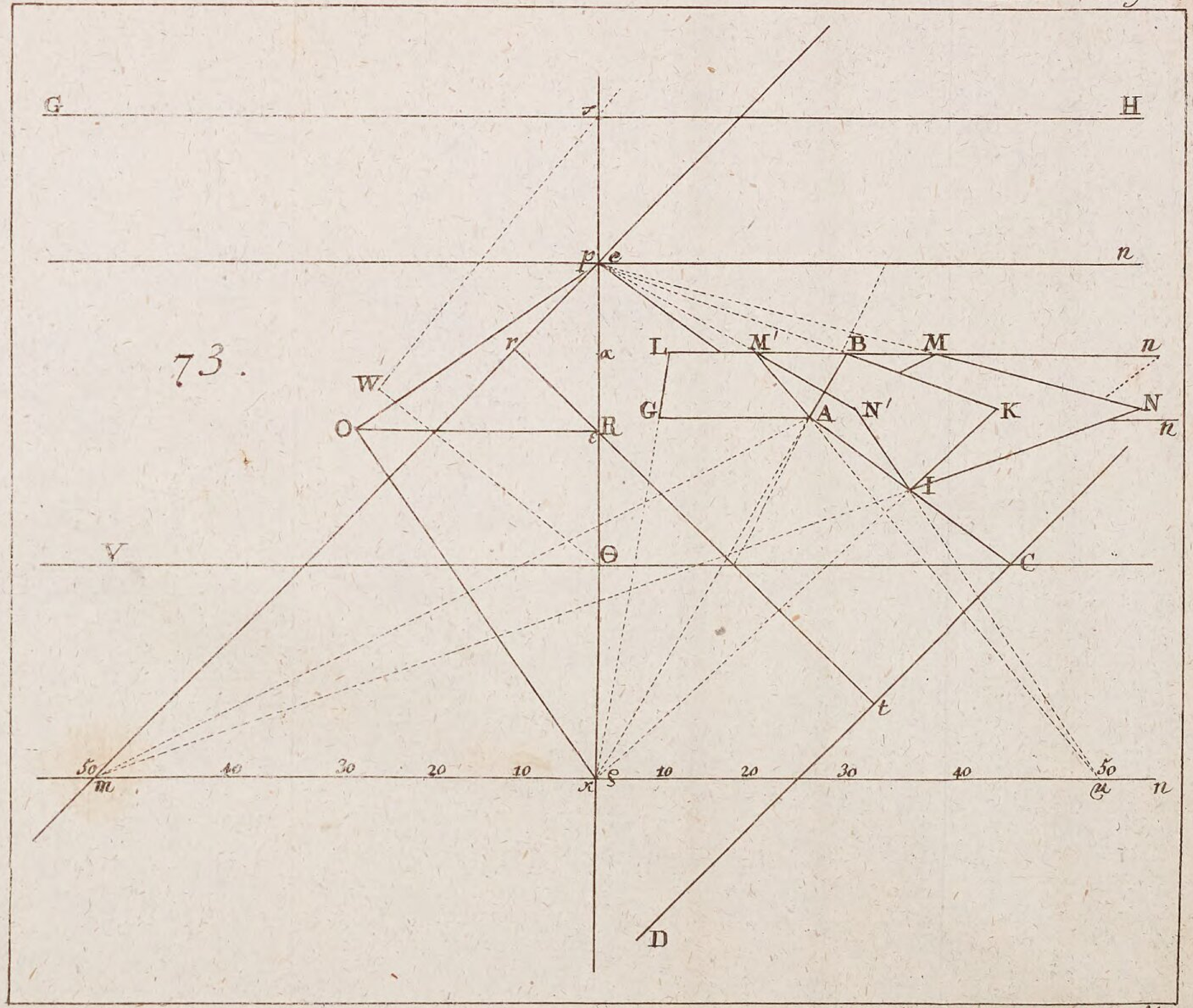

68.

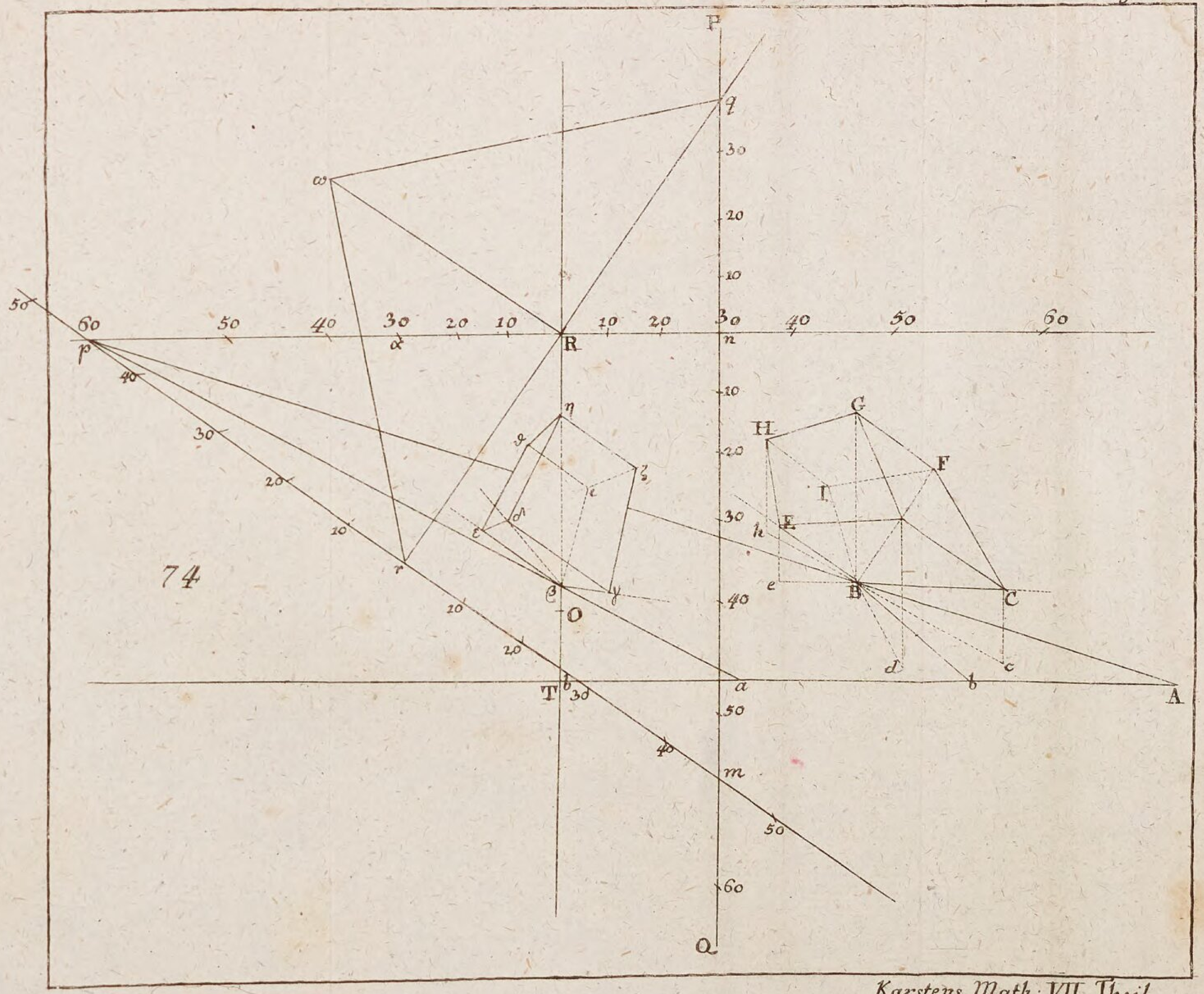

69.
P
H
p
m
r
S
ω
α
R
M
N
Z
B
K
L
I
C
A
O
V
W
T
G
a
D
t
q
Q

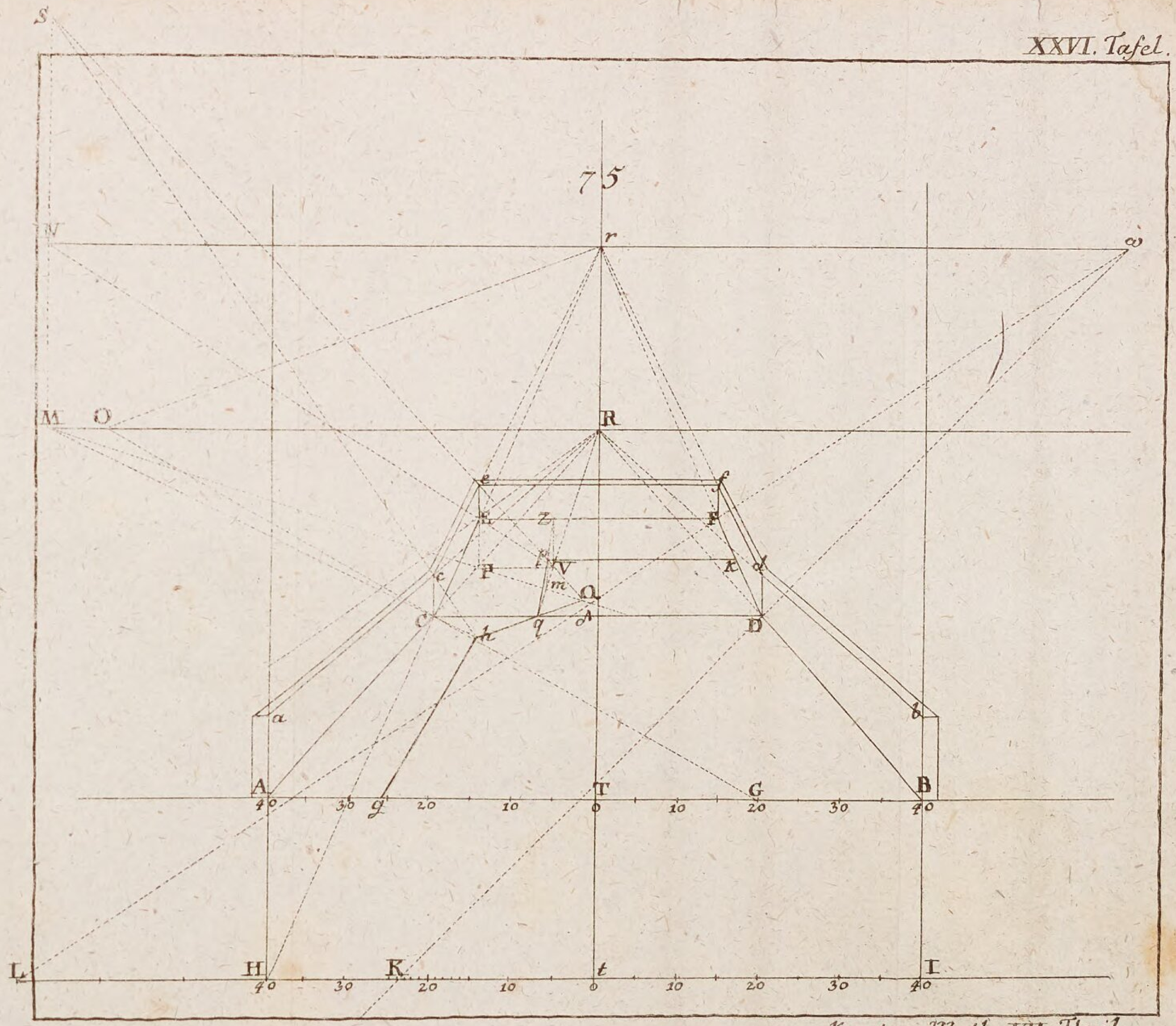

70.
P
Q
H
M
N
B
K
L
A
I
C
M′
N′
G
V
D
t
O
W
Z
R
Θ

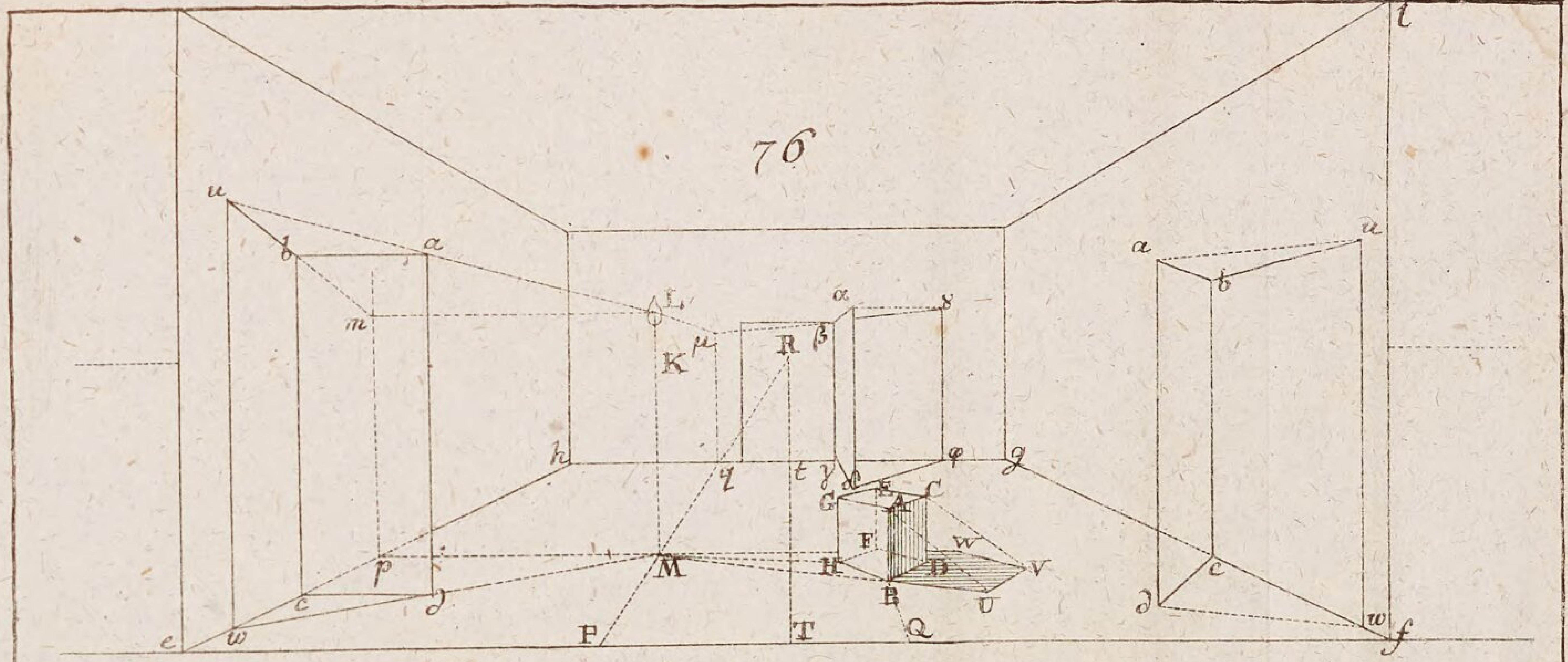

71.
E
m
p R
n
L
B
n
M'
M
K
G
A
n
N'
N
V
T
C
X
t
D
72.
P
L
p
R
ω
K
M
O

73.

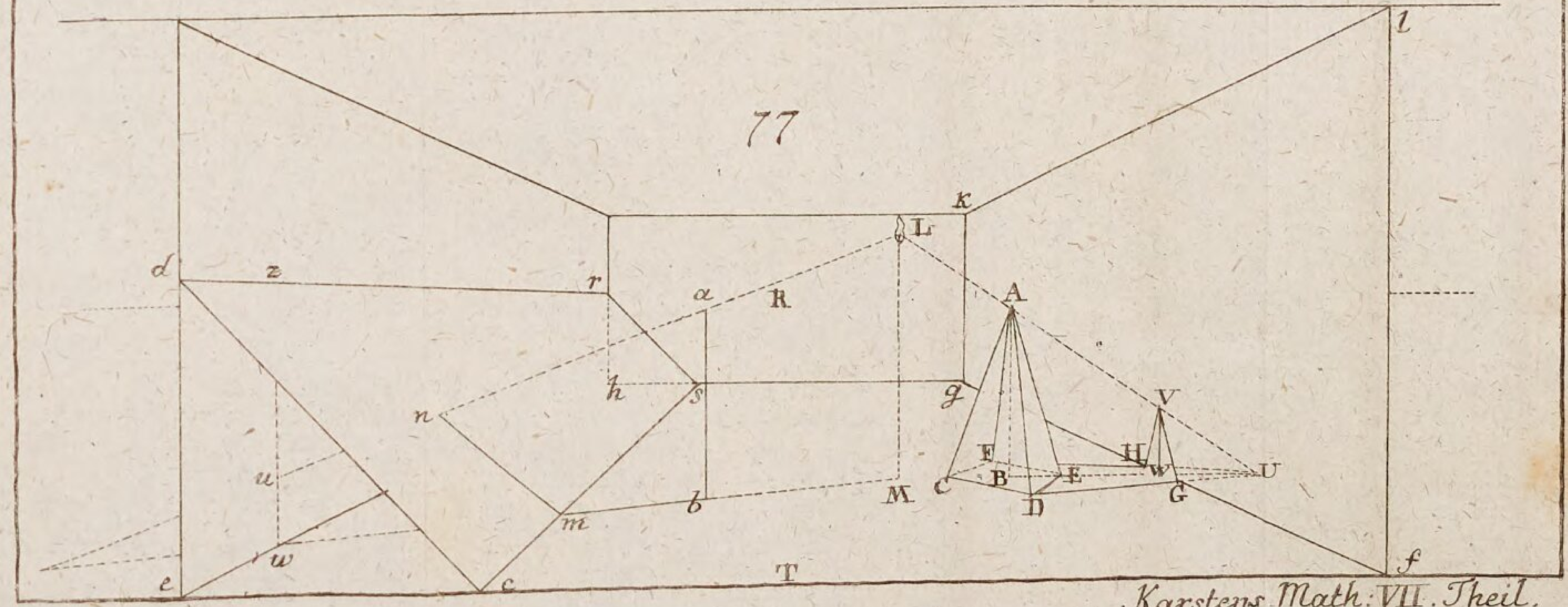

G
H
p e
n
L
M'
B
M
n
W
r
α
G
A
N'
K
N
O
R
n
I
V
Θ
C
t
50
40
30
20
10
m
x
S
10
20
30
40
50
n
D


74
P
Q
R
T
O
A
B
C
E
F
G
H
I
p
q
r
a
b
c
d
e
h
m
n

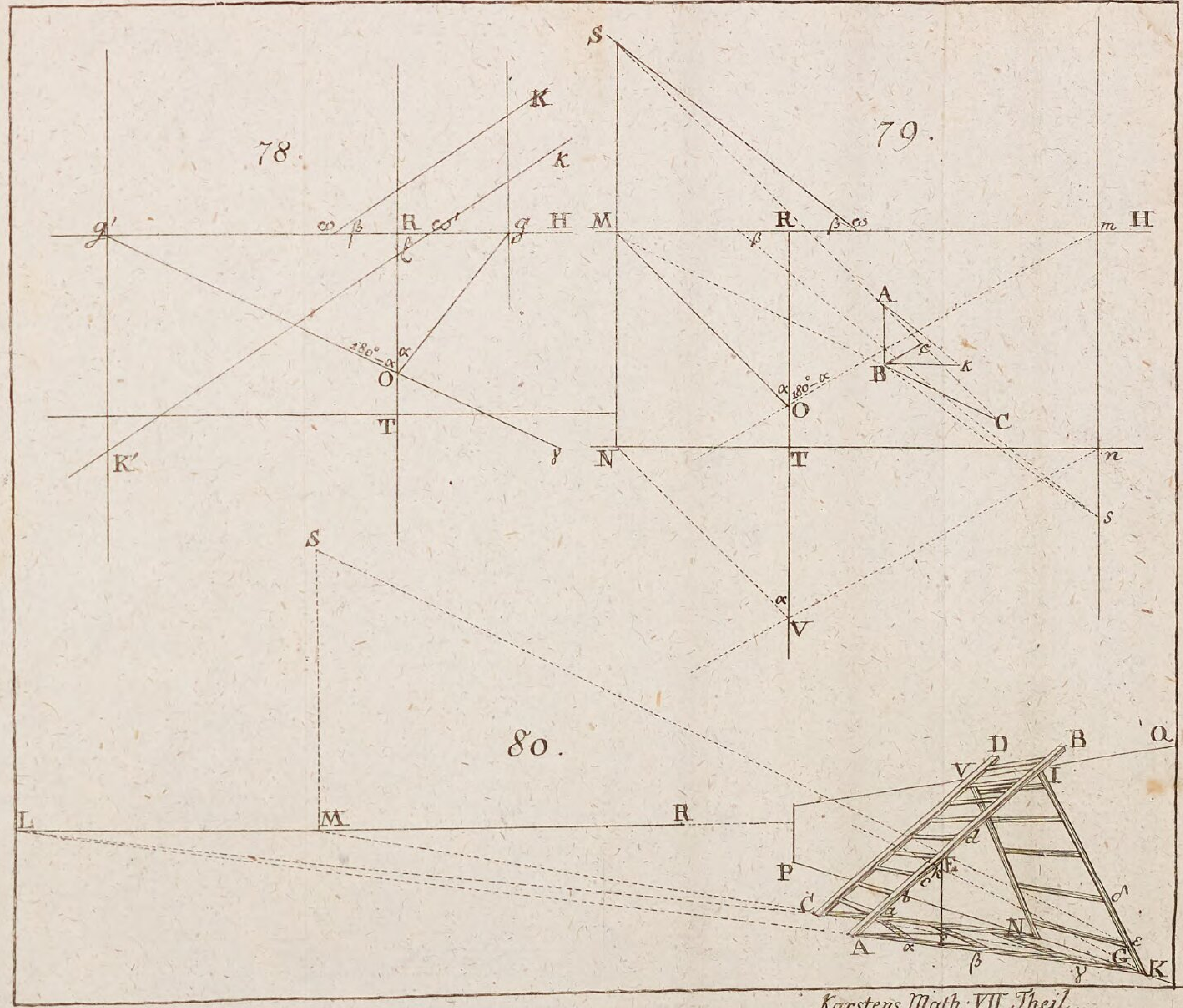

75
S
N
r
ω
M O
R
e
f
E
Z
F
c
P
V
K
d
m
Q
C
h
q
D
a
b
A
T
G
B
g
H
K
t
I
L
40 30 20 10 0 10 20 30 40

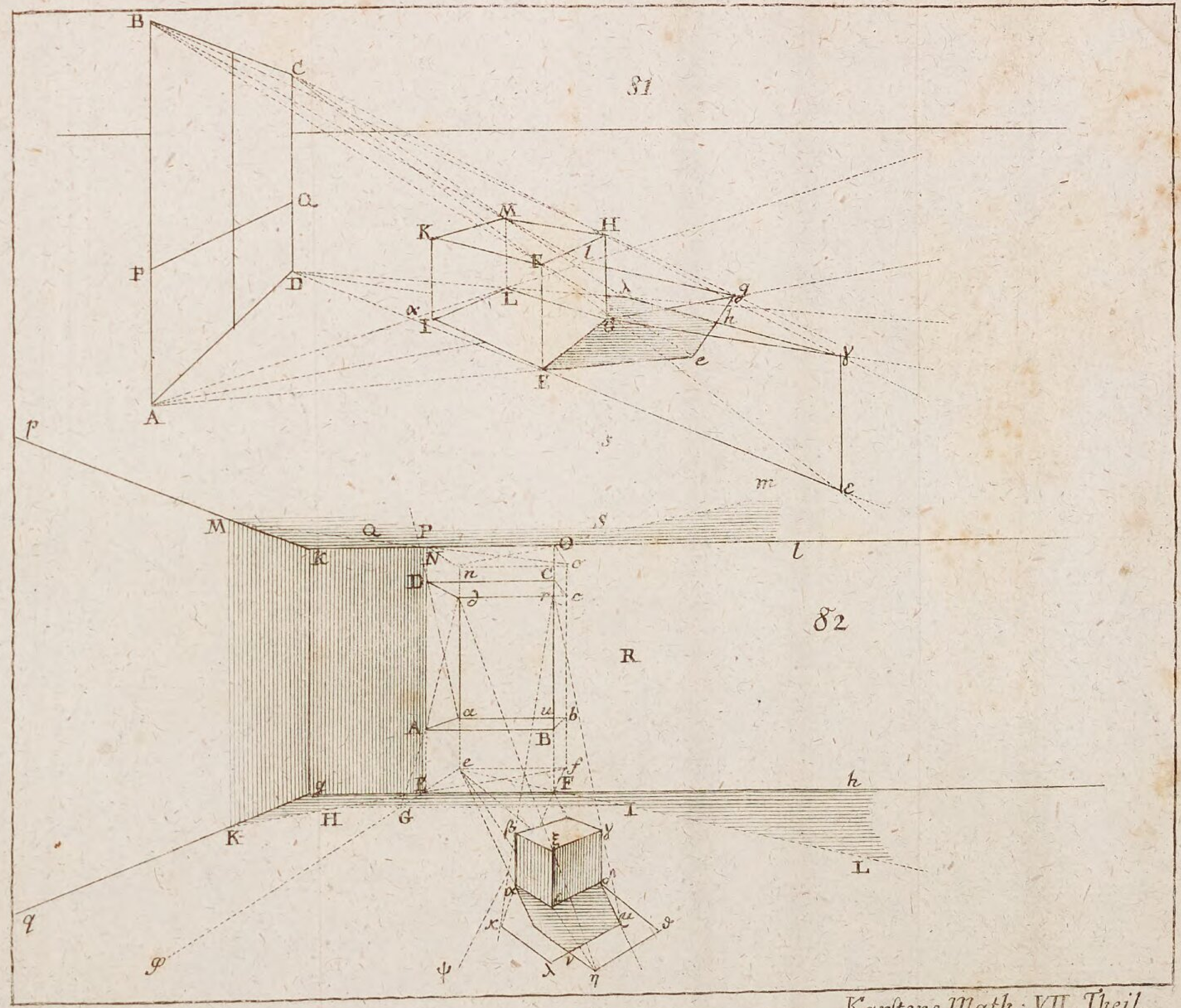


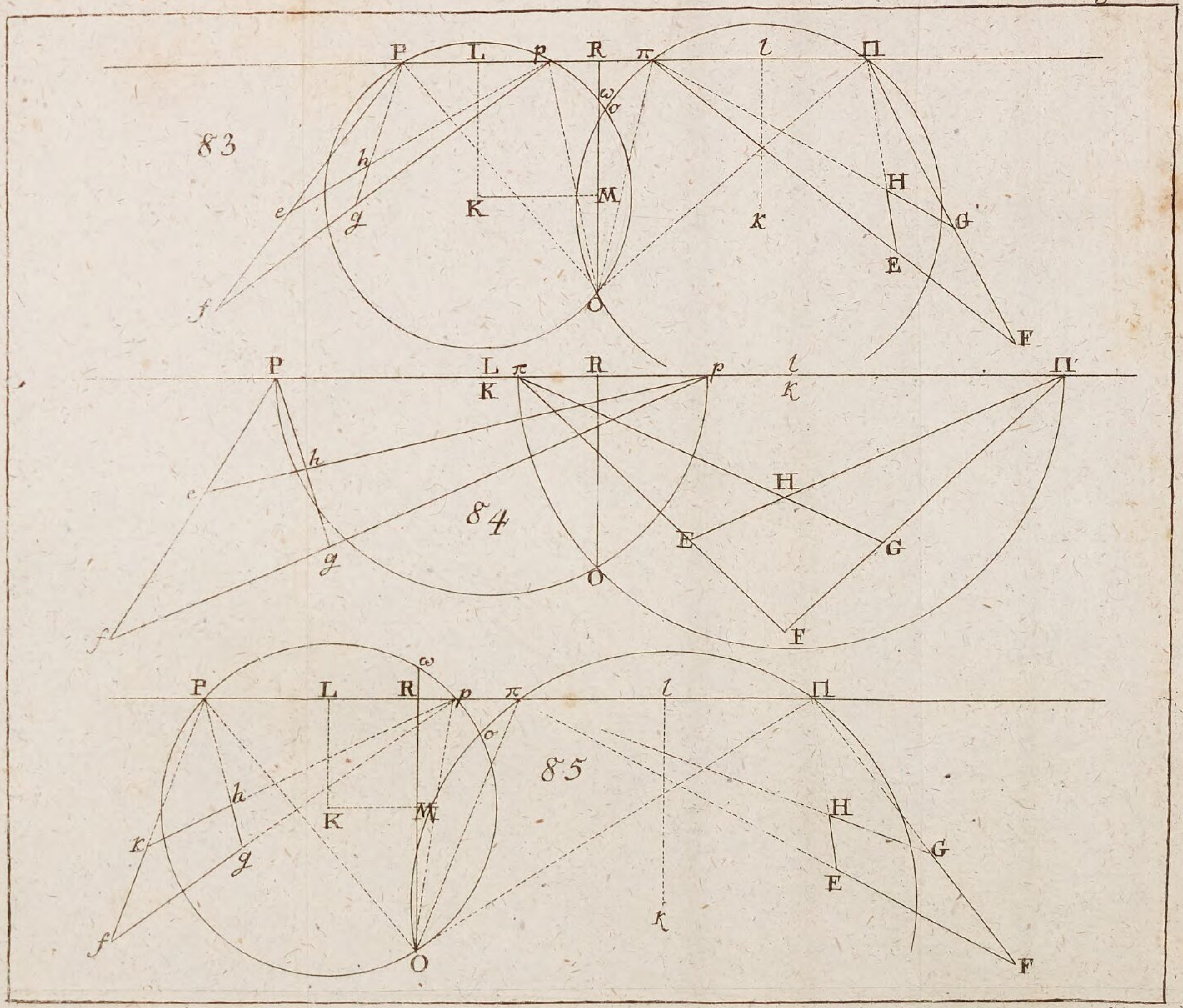
76

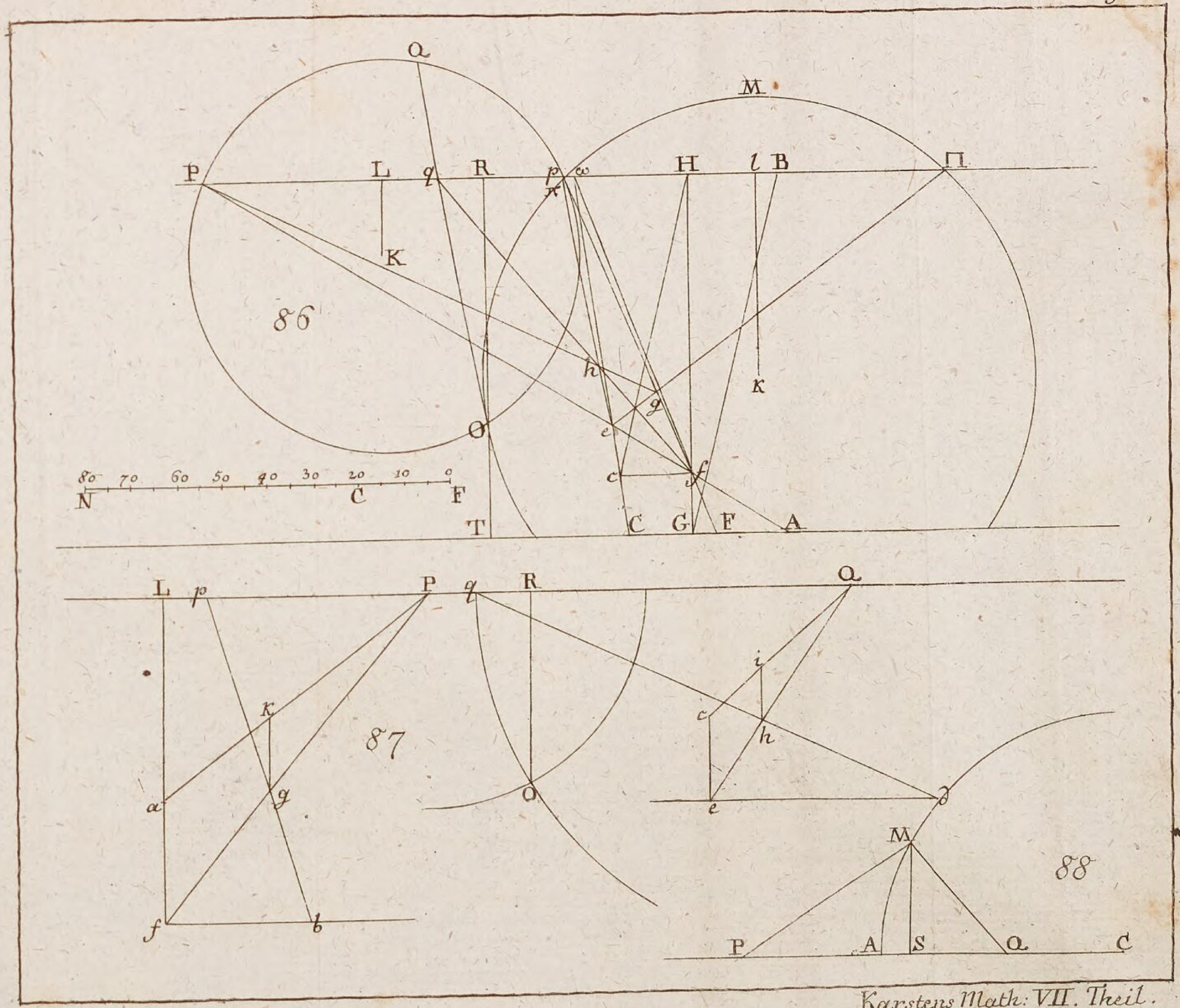


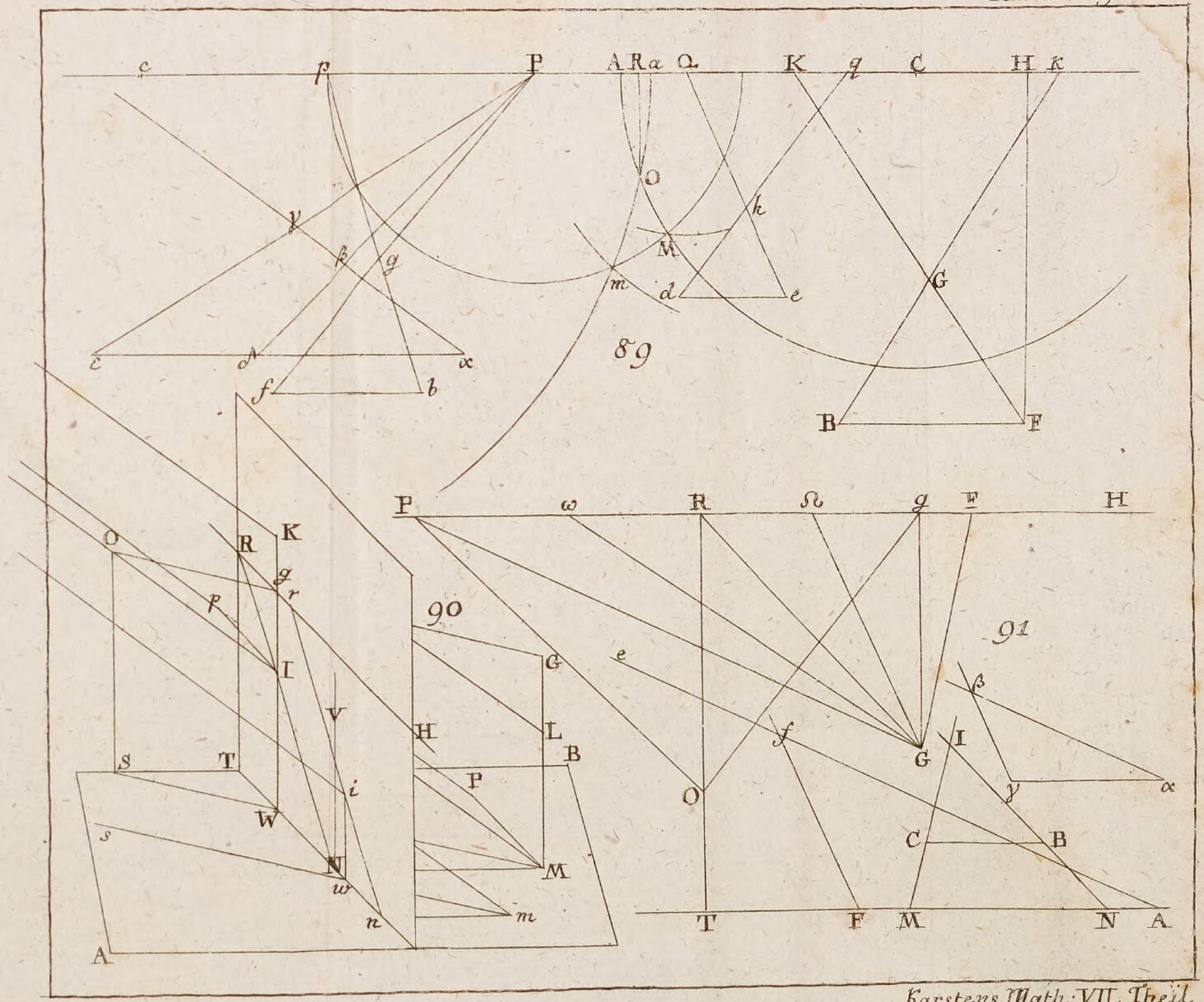
77

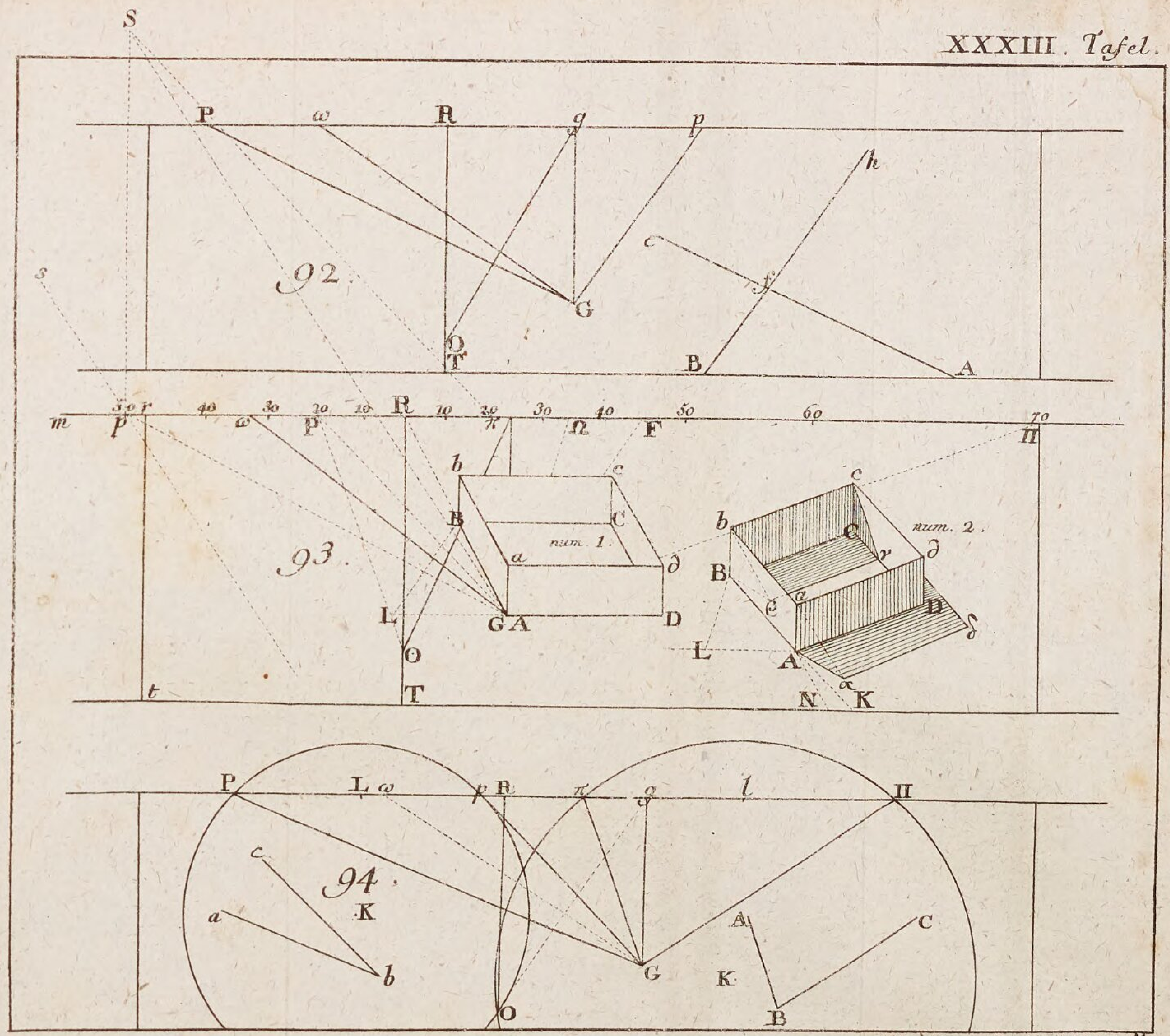

78.
79.
80.

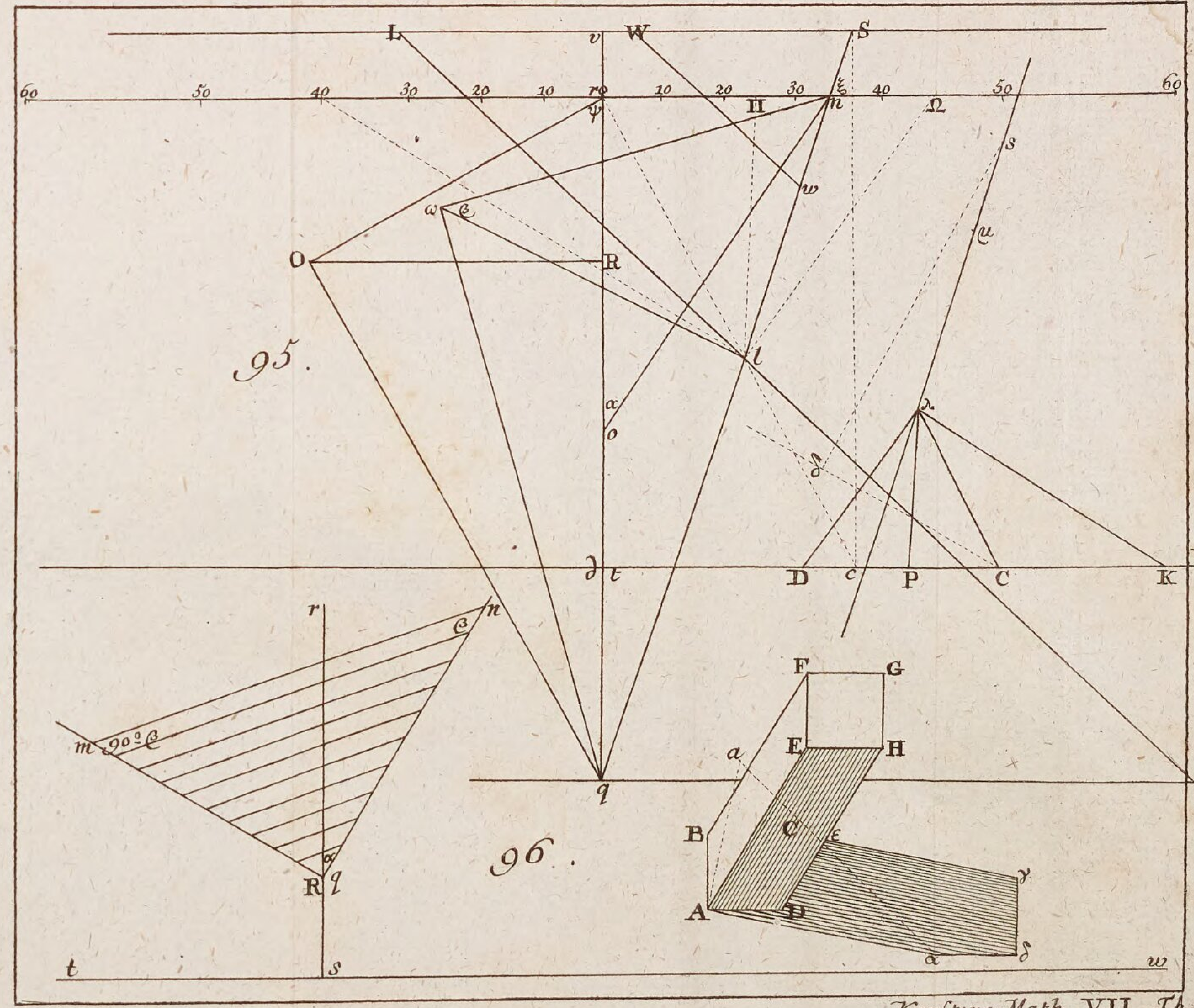

81
82


83
84
85


86
87
88
80 70 60 50 40 30 20 10 0
N
C
F

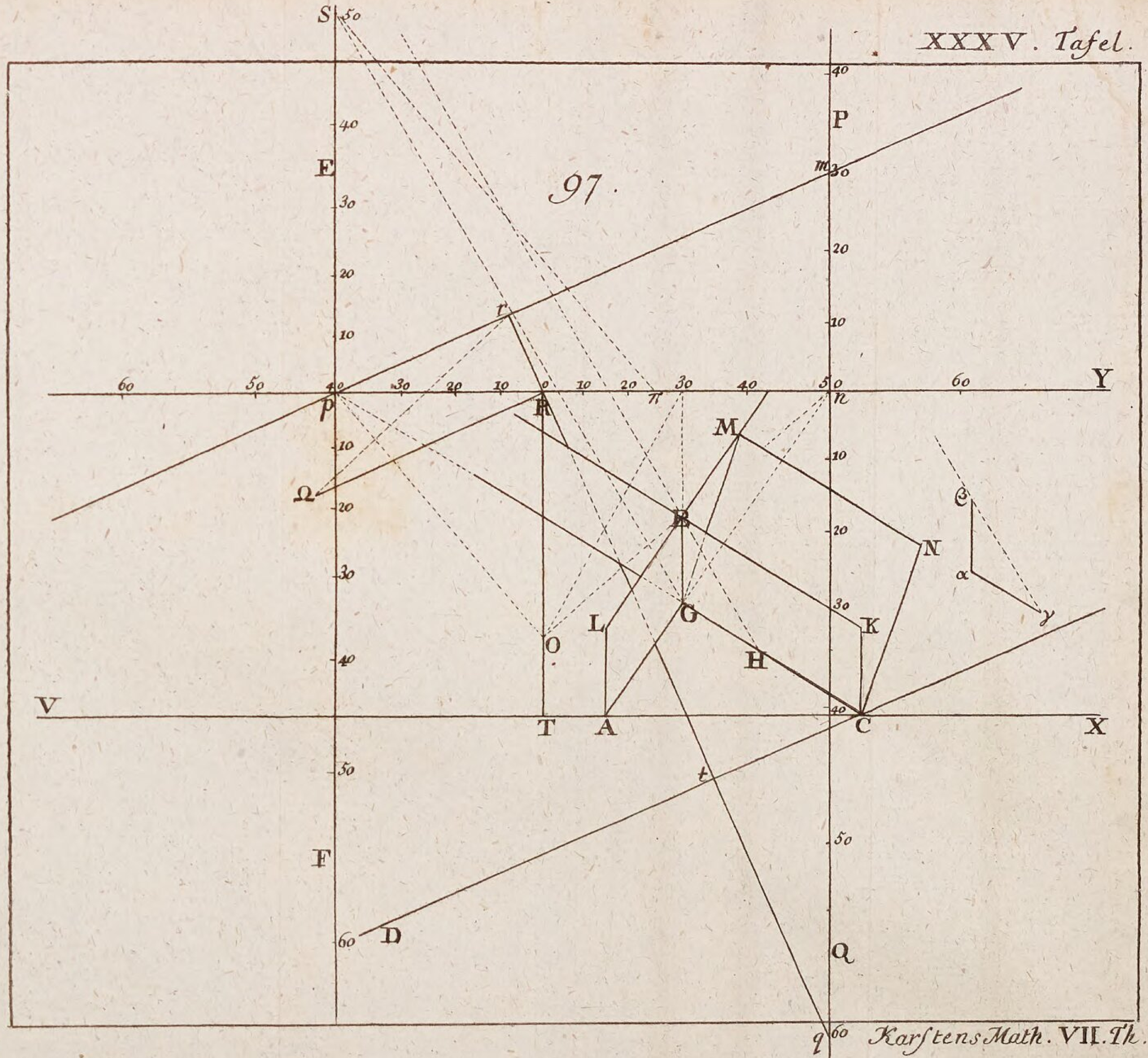

89
90
91

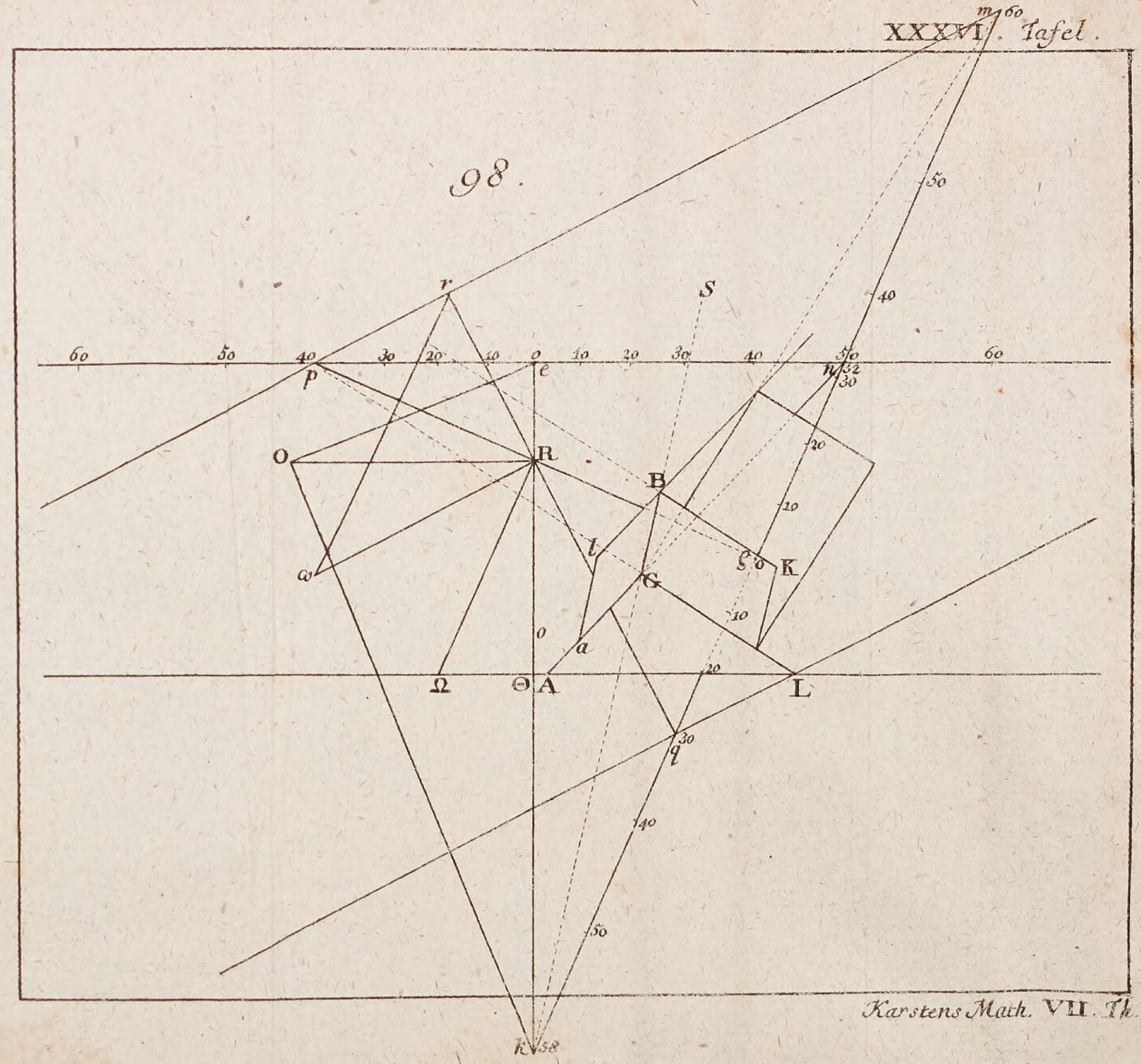

92.
93.
num. 1.
num. 2.
94.

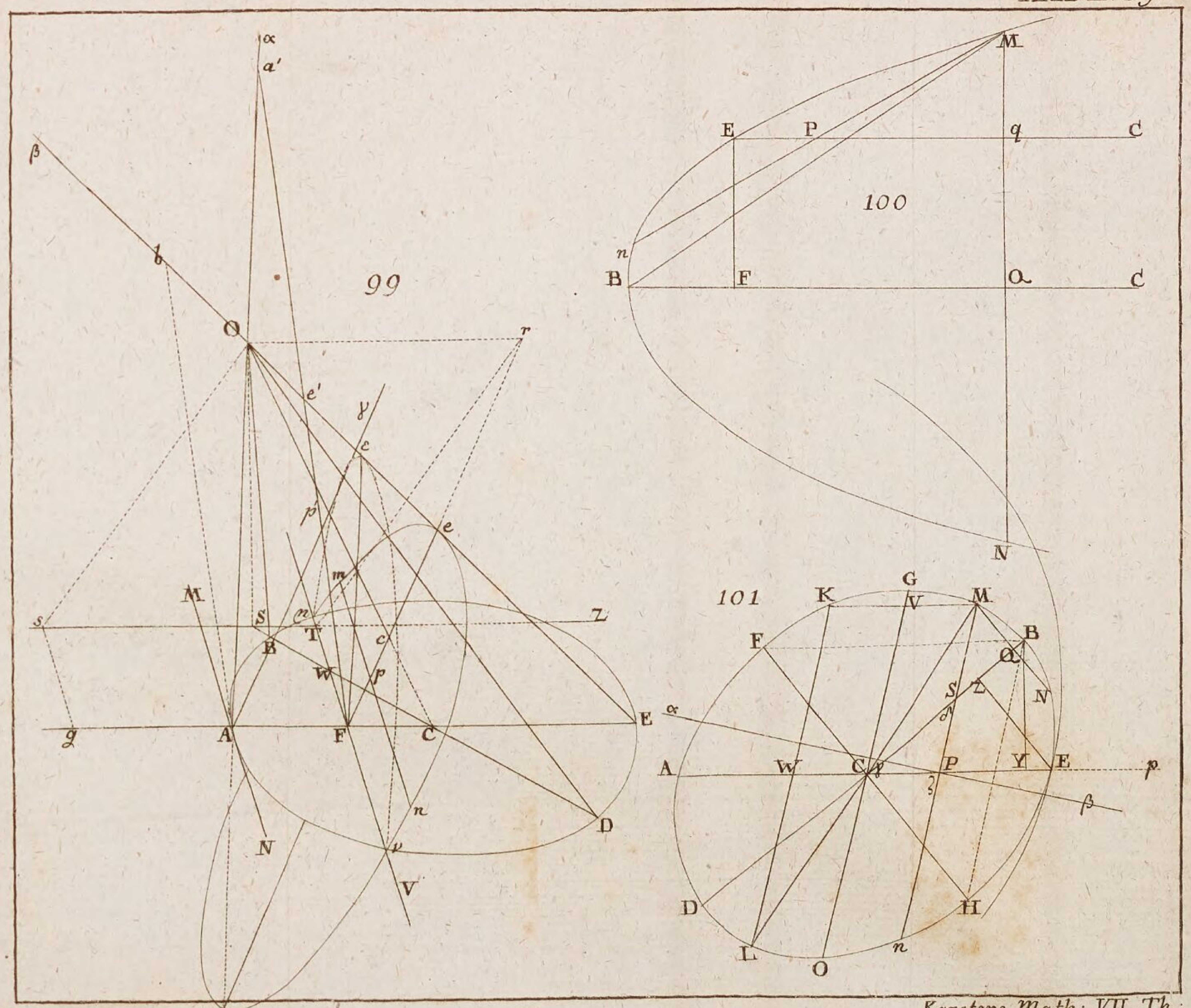

L
v
W
S
60
50
40
30
20
10
10
20
30
40
50
60
O
R
l
λ
o
D
c
P
C
K
Y
q
Q
r
n
m
R
t
s
w
F
G
E
H
a
B
C
A
D
α
δ
γ

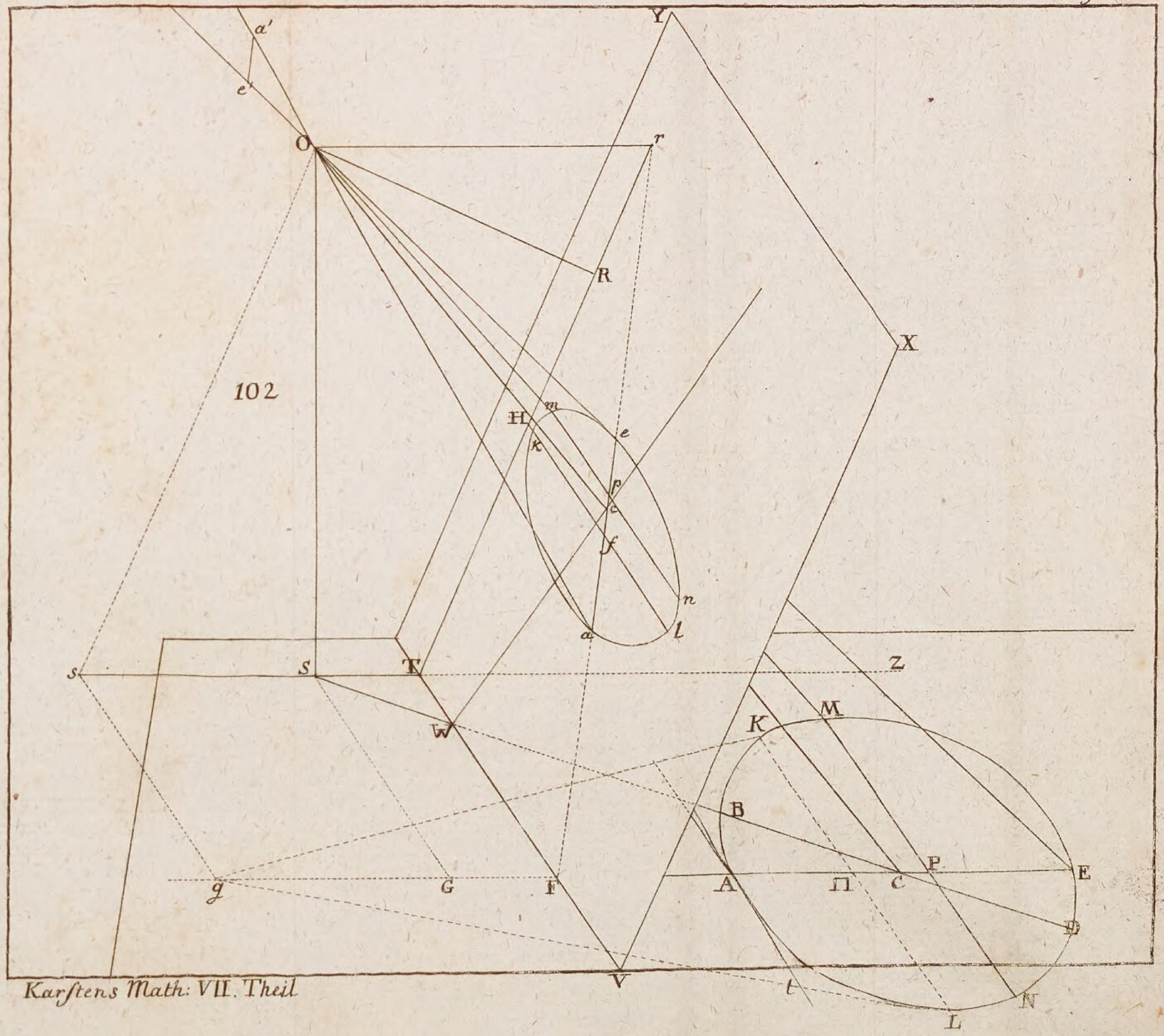
95.

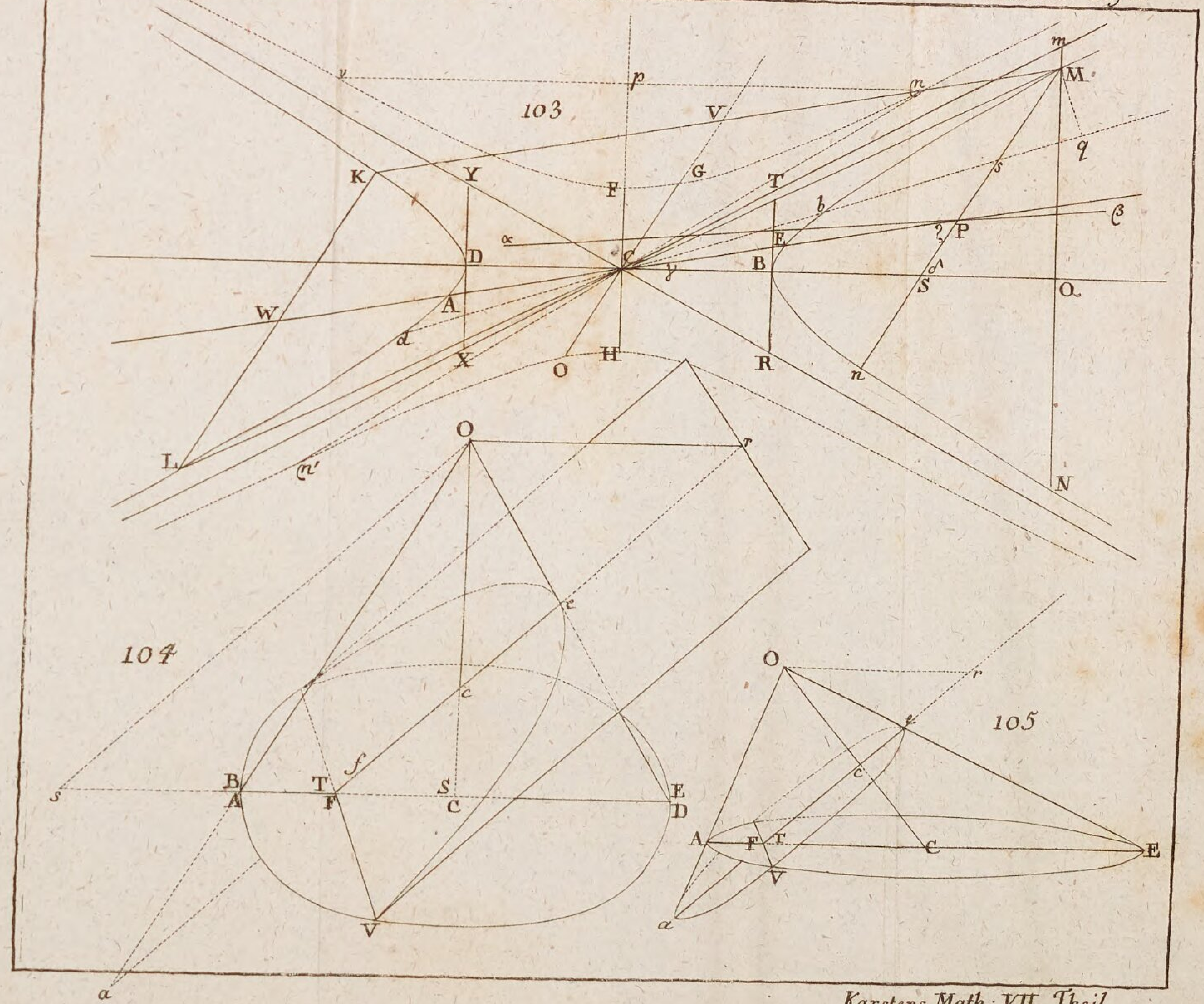
96.

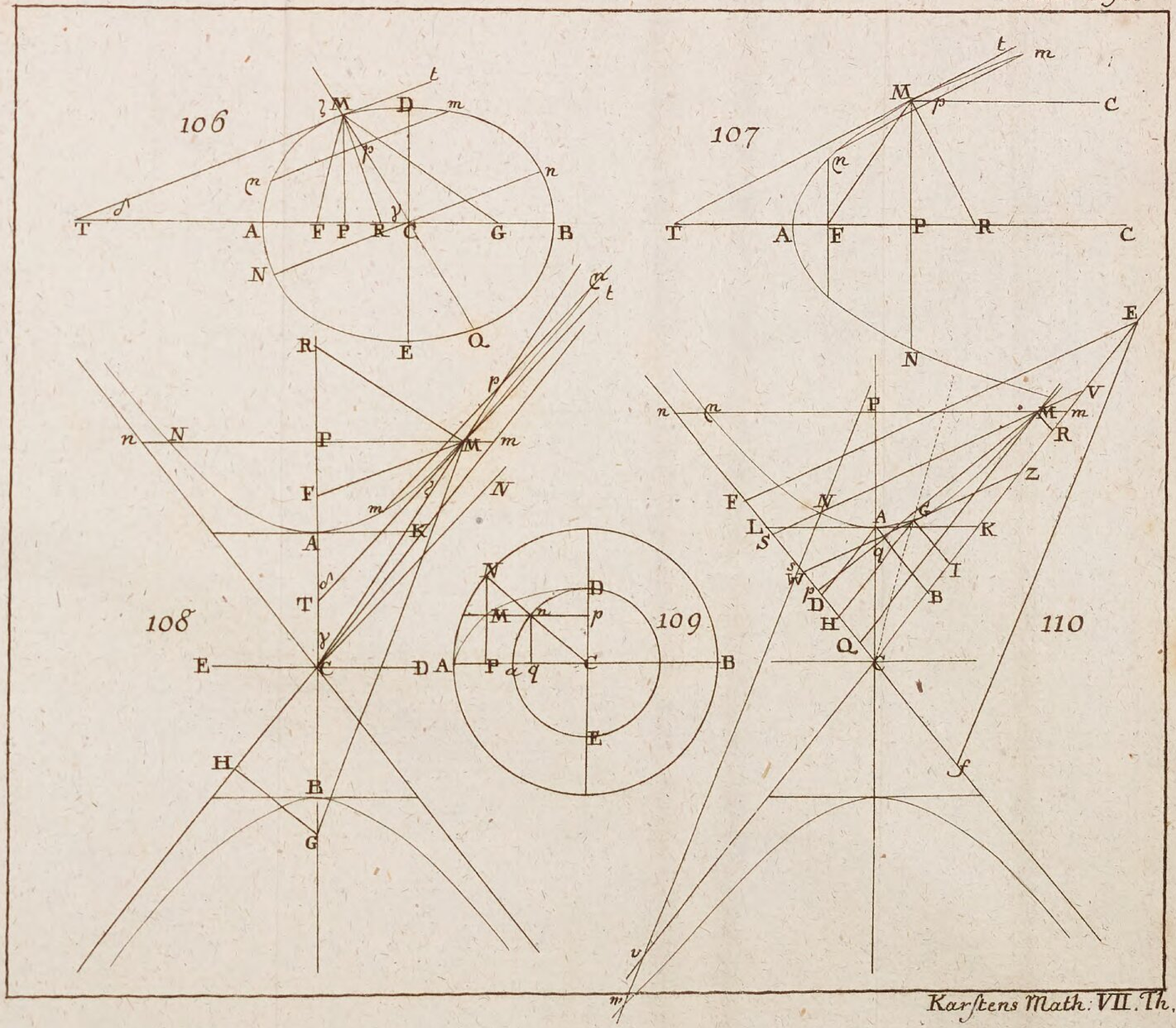

97.
S
E
F
P
Q
V
X
Y
A
B
C
D
G
H
K
L
M
N
O
R
T
Ω
α
β
γ
m
n
p
q
r
t
π

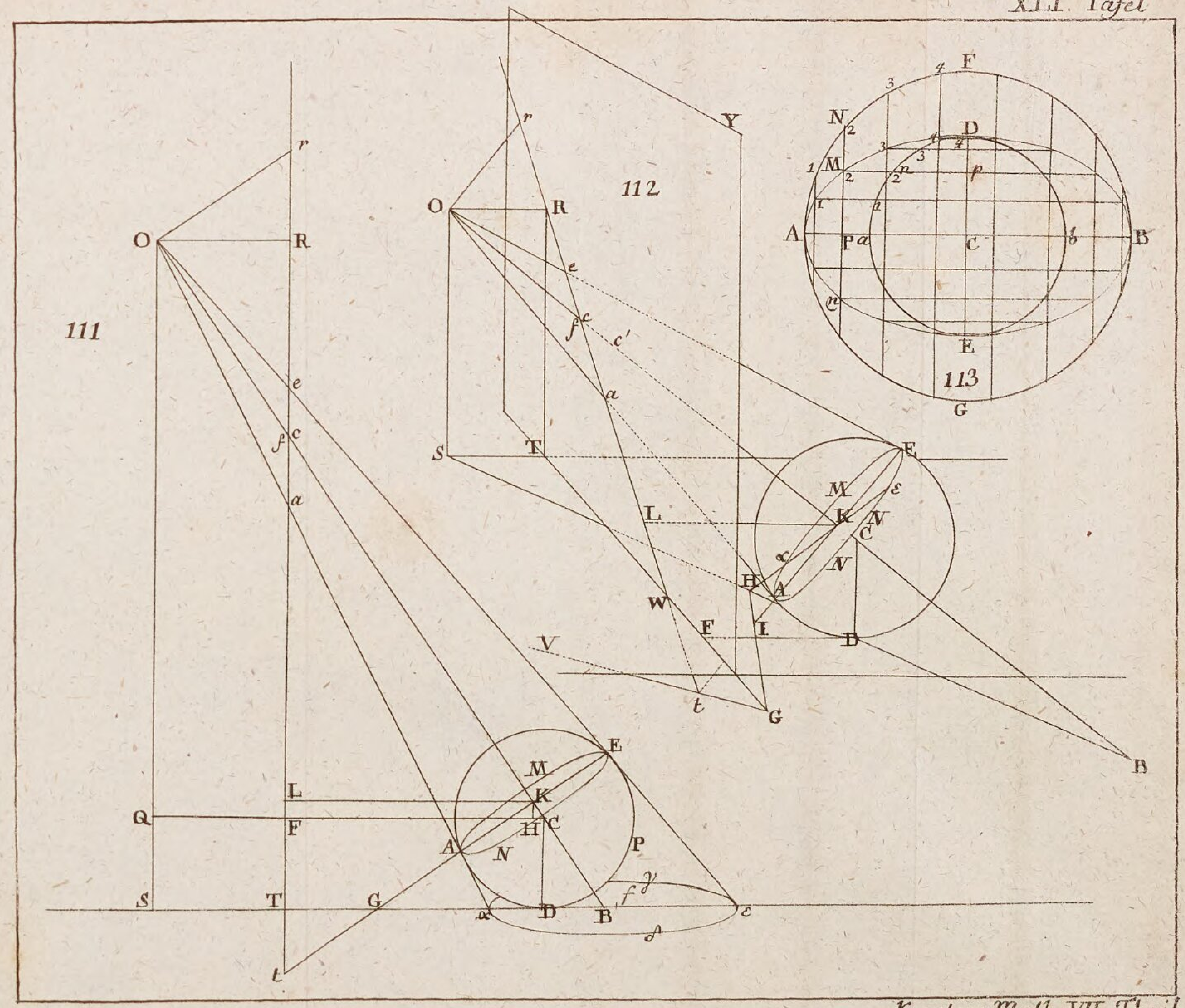

98.
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
p
e
r
S
O
R
B
l
ω
G
K
a
0
Ω
Θ
A
L
q
k
m
n
10
20
30
40
50

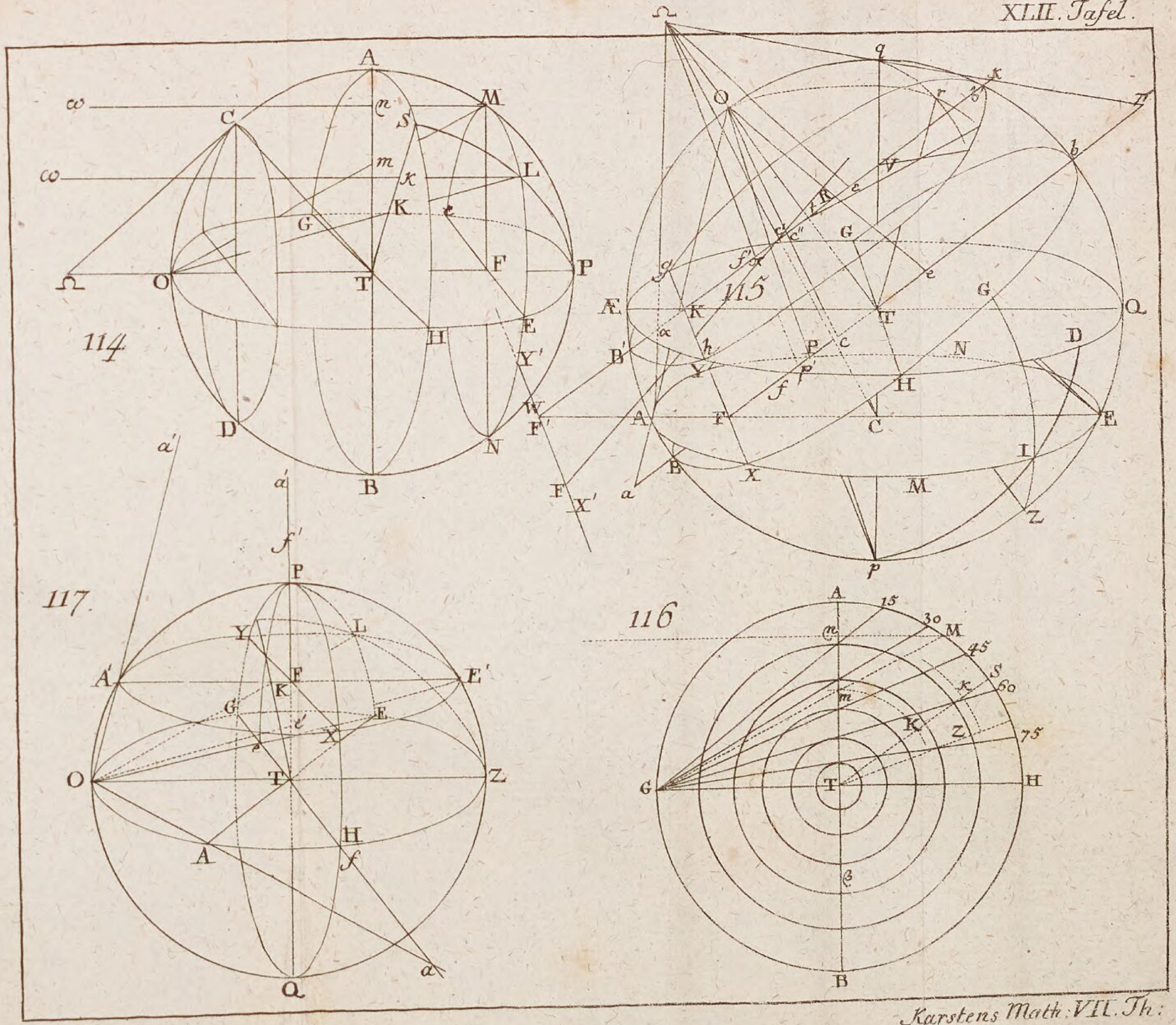

99
100
101

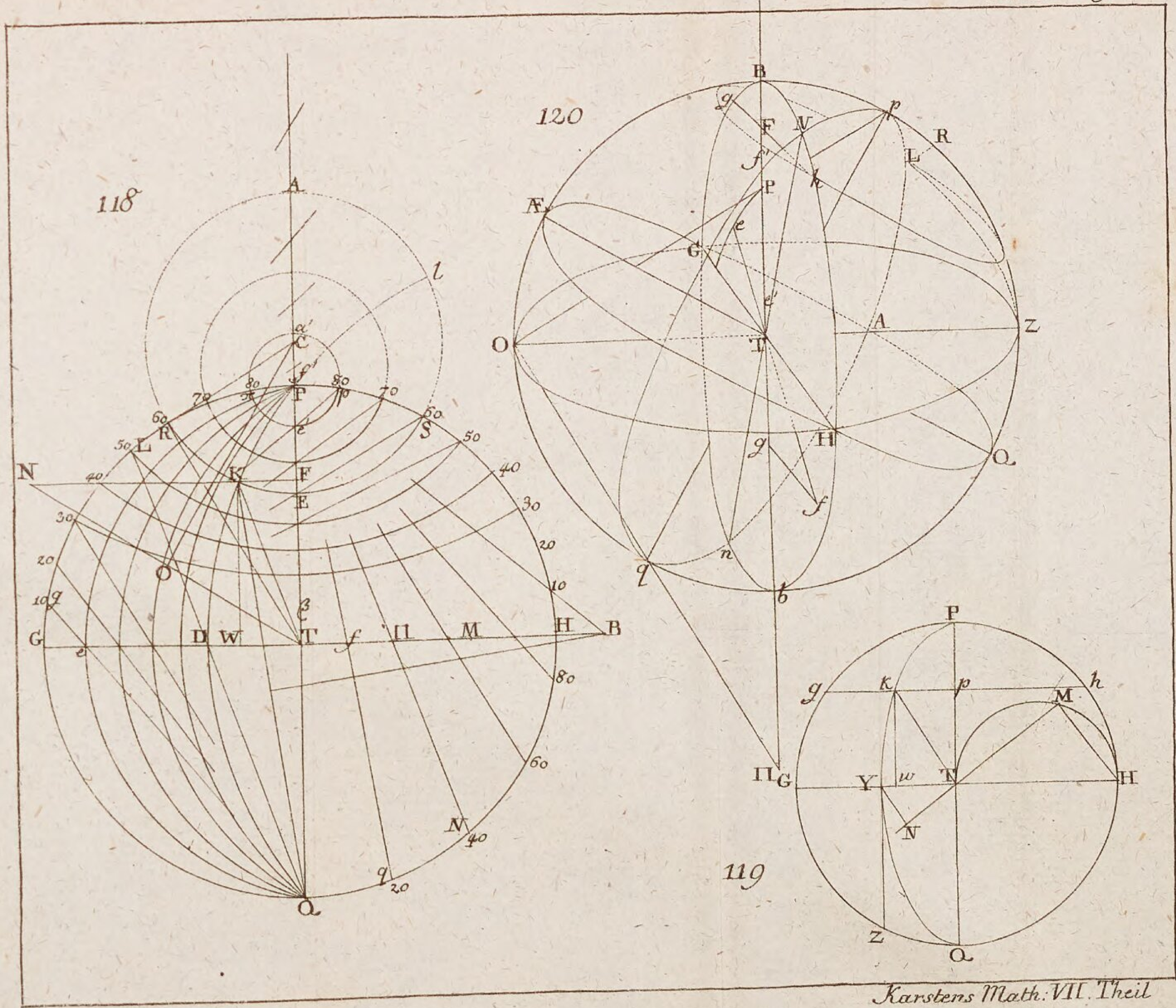

102
O
r
R
Y
X
a'
e'
H
m
k
e
p
c
f
n
l
a
s
S
T
Z
W
K
M
B
g
G
F
A
Π
C
P
E
D
V
t
L
N

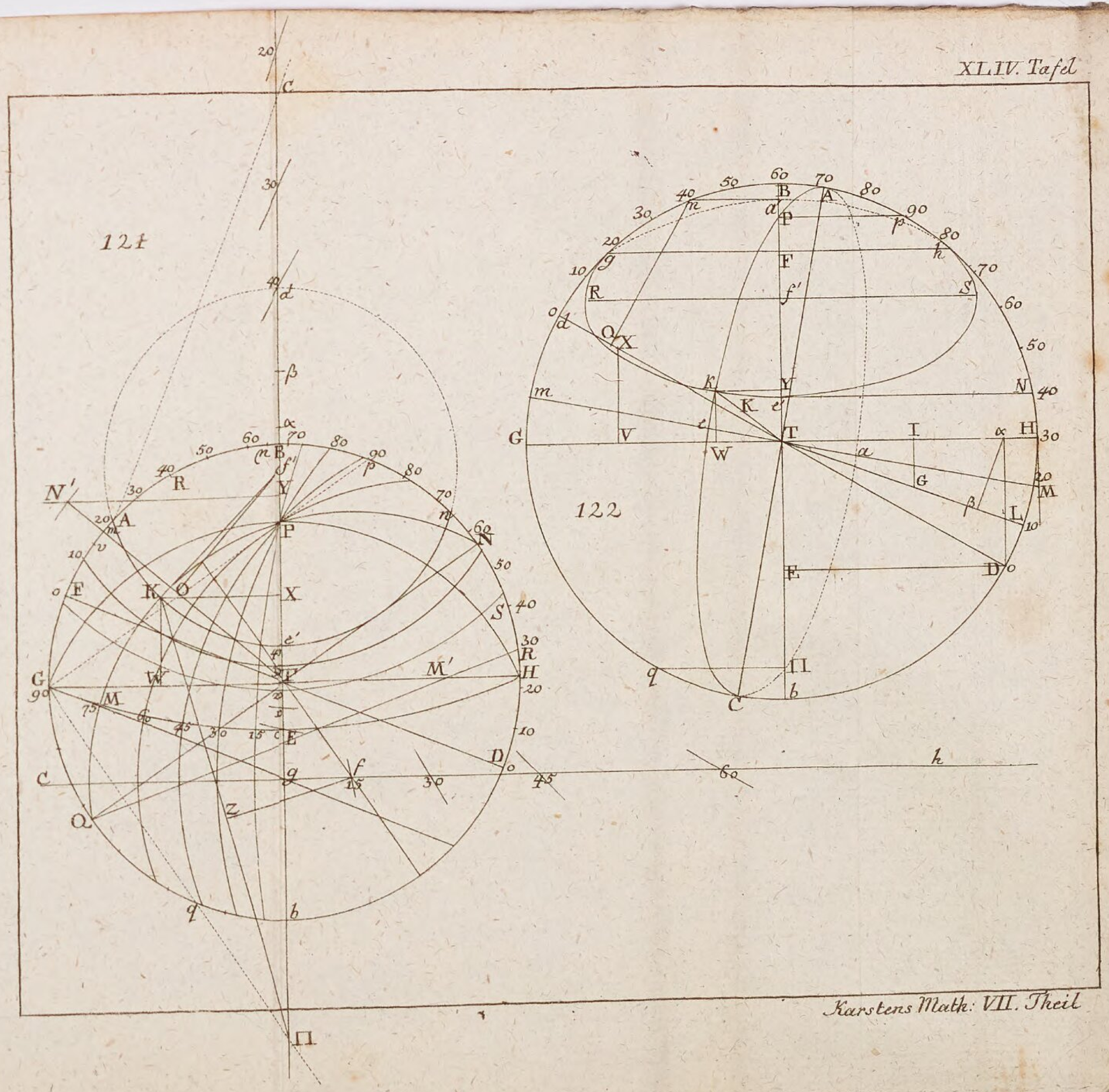

103
104
105

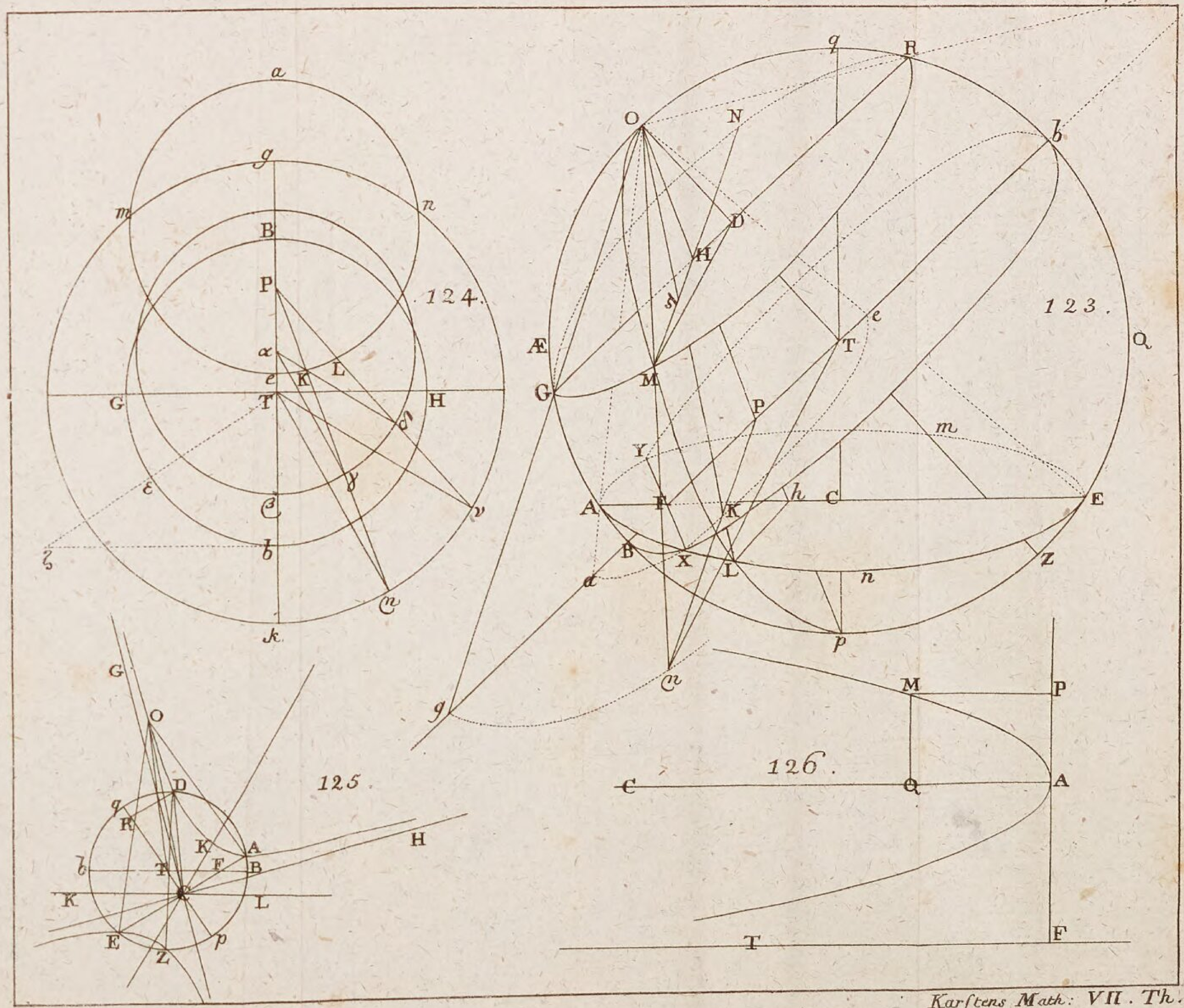

106
107
108
109
110

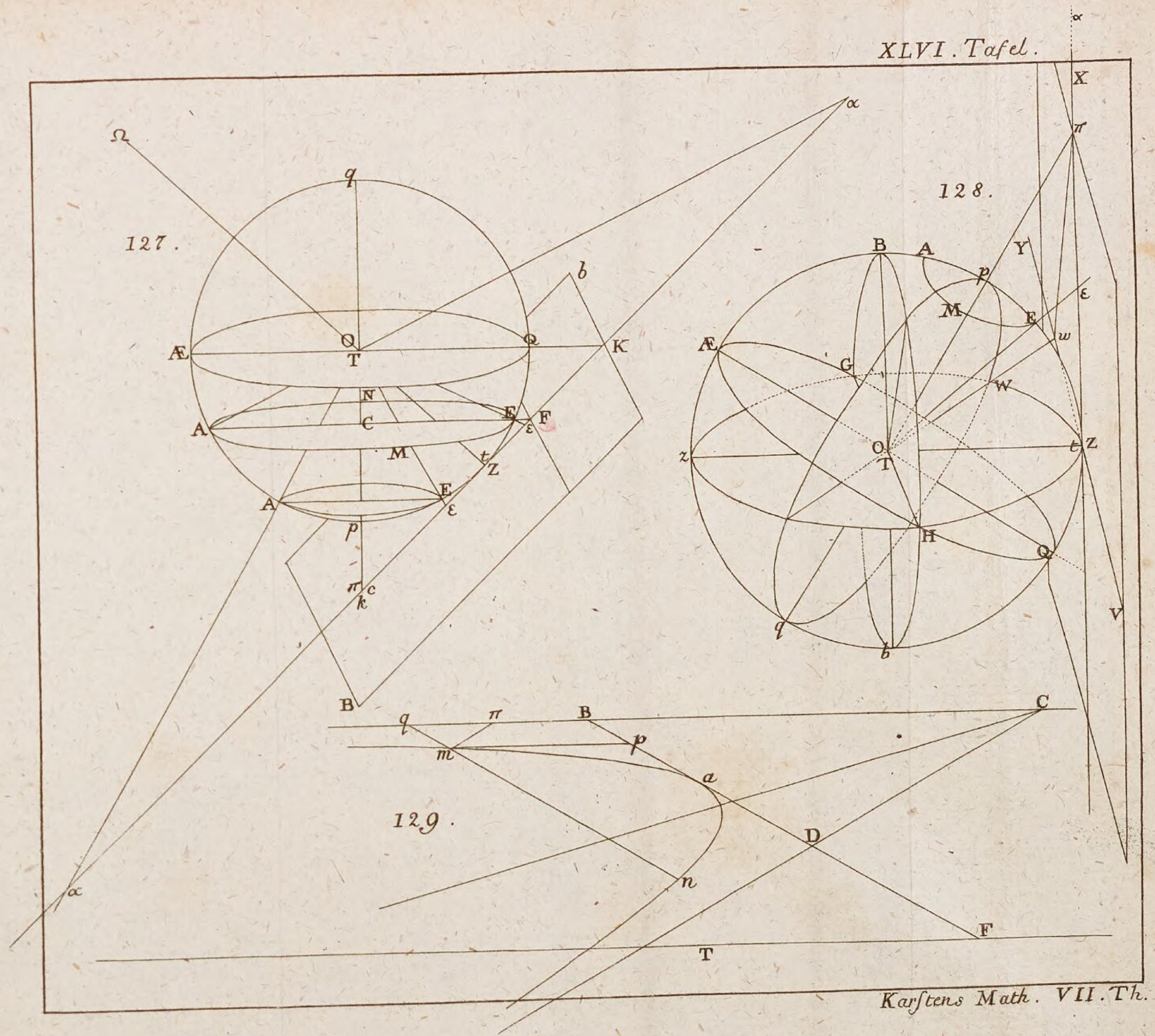

111
112
113


114
115
116
117

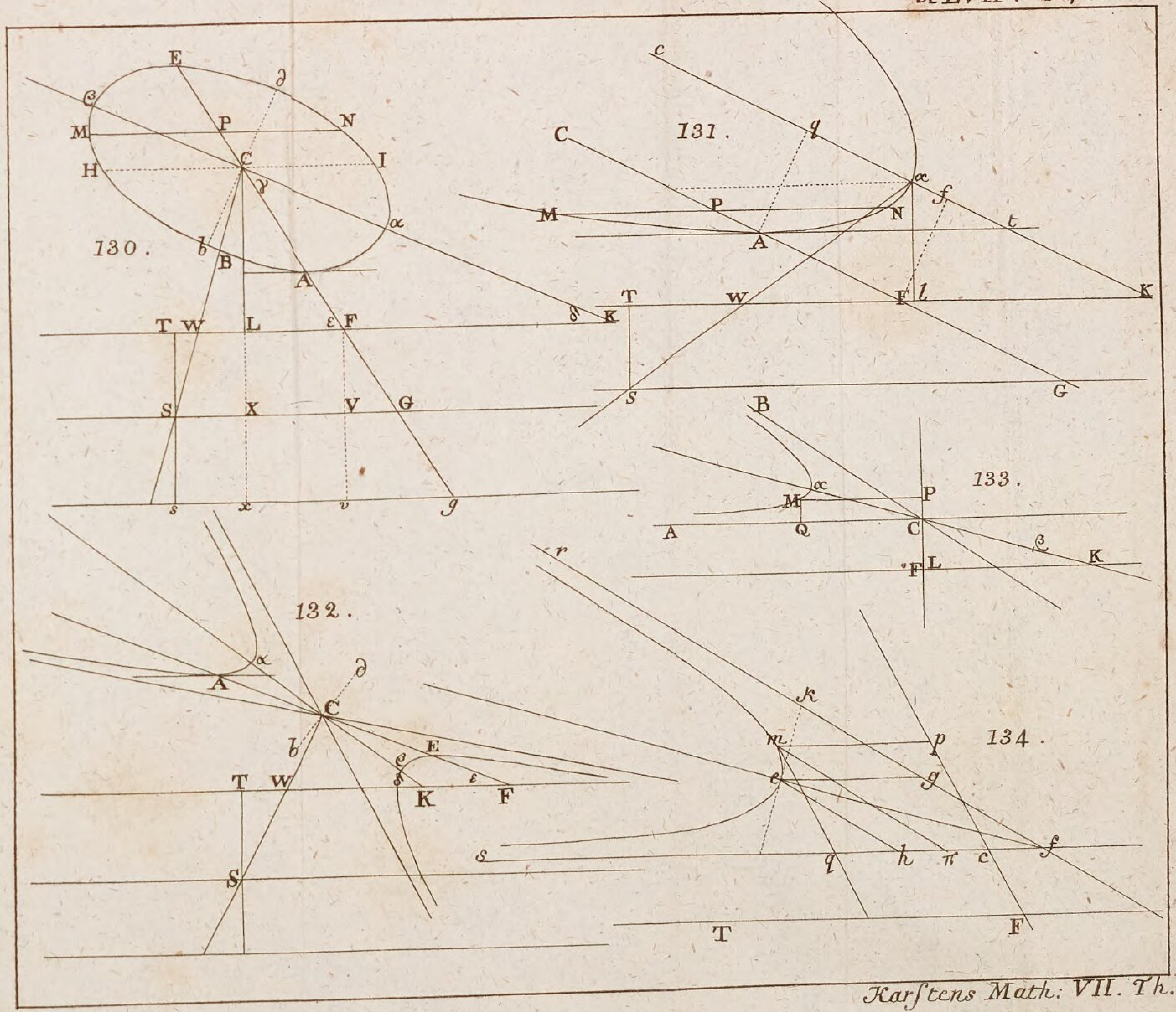

118
120
119
A
C
T
F
E
D
W
f
M
H
B
G
N
K
L
R
S
O
Q
Z
P
Y
w
p
g
h

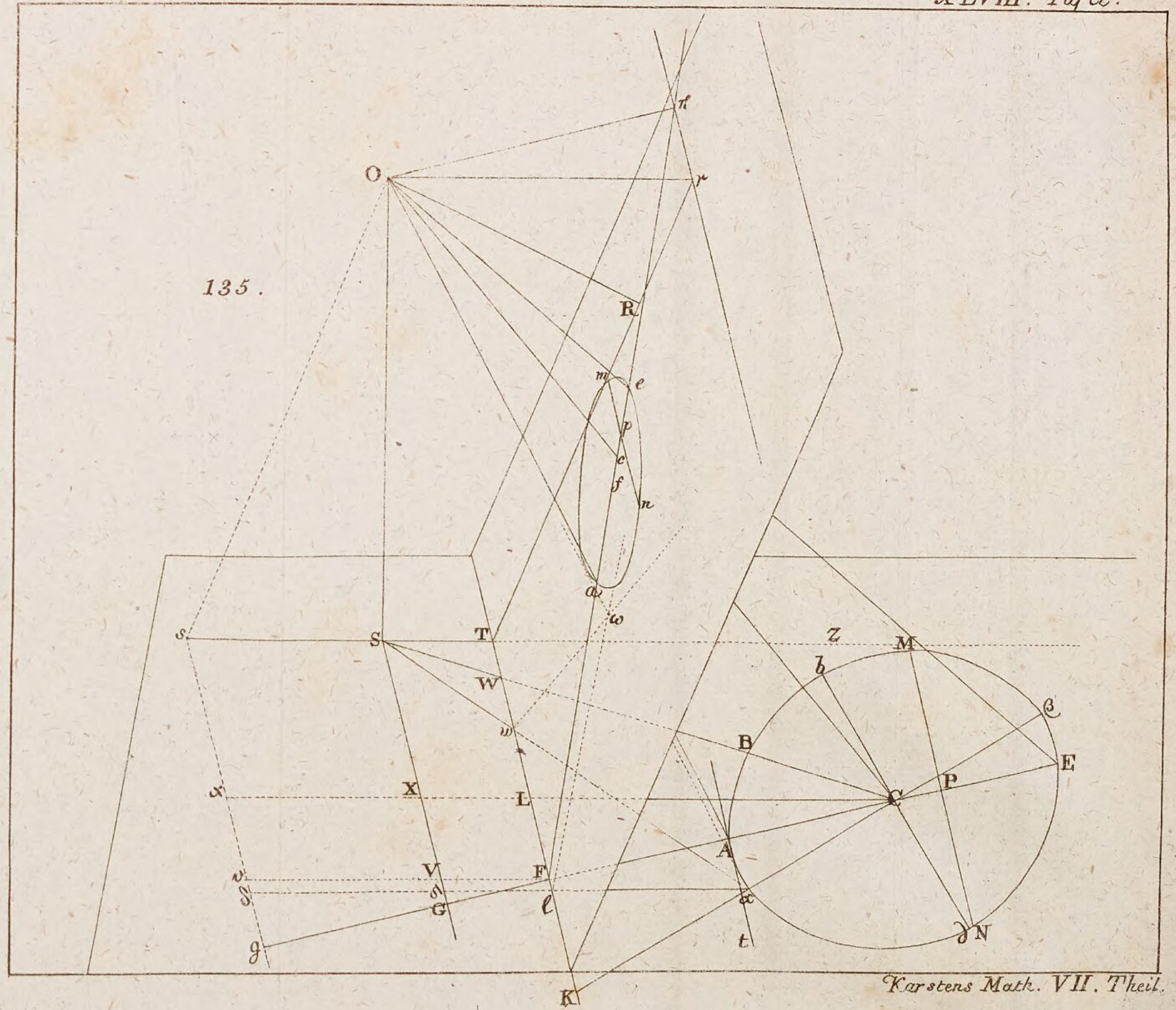

121
122

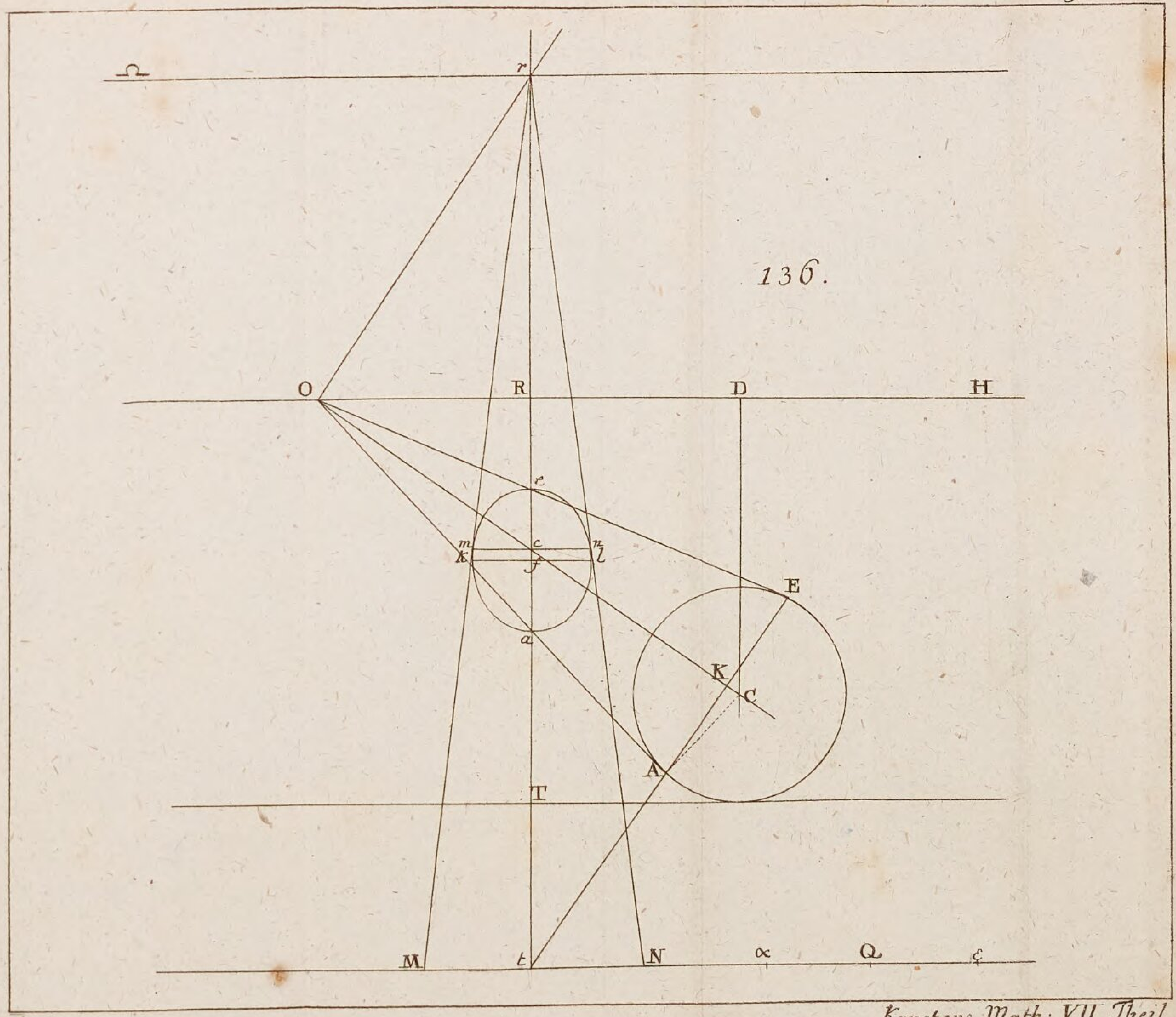

124.
123.
125.
126.

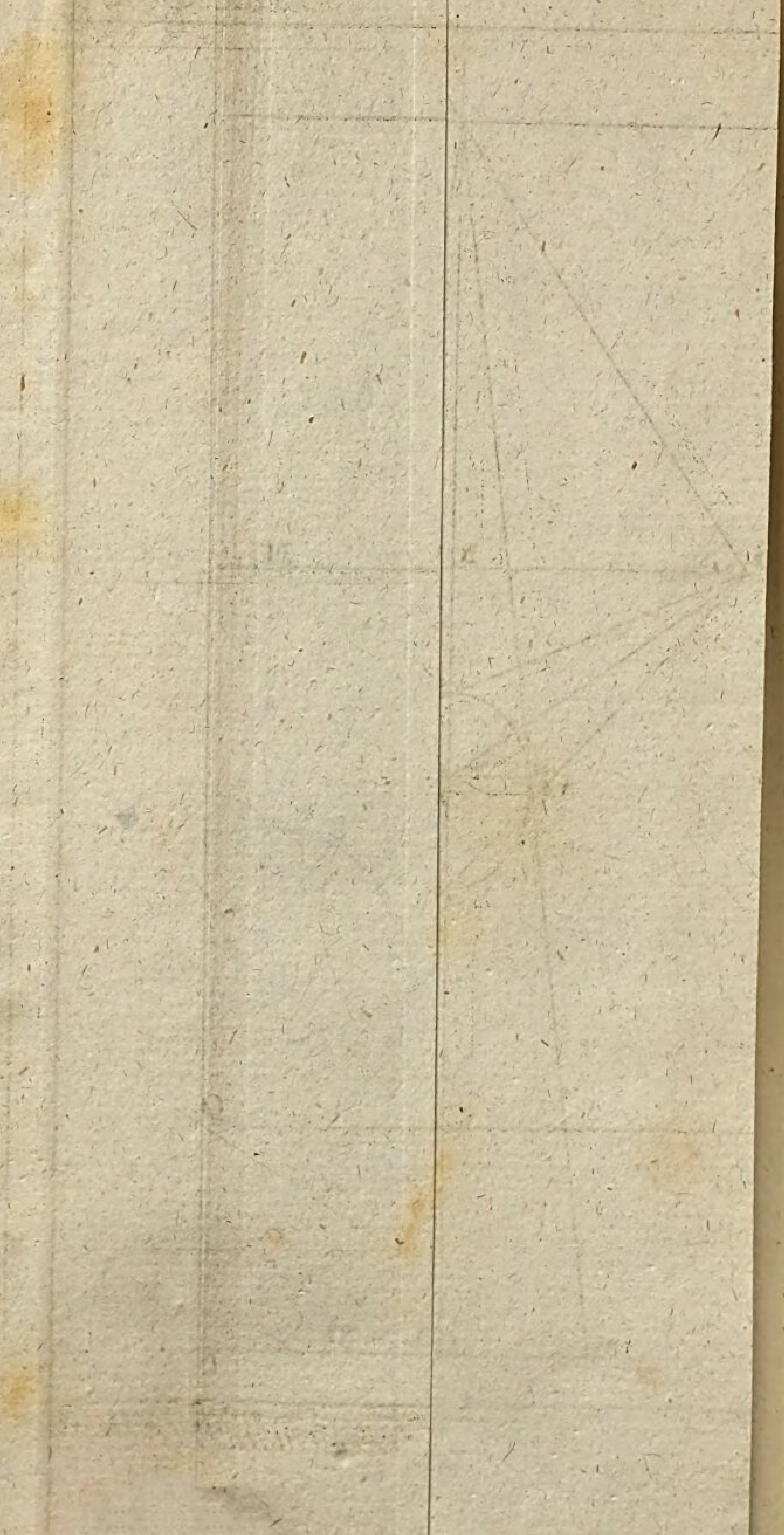


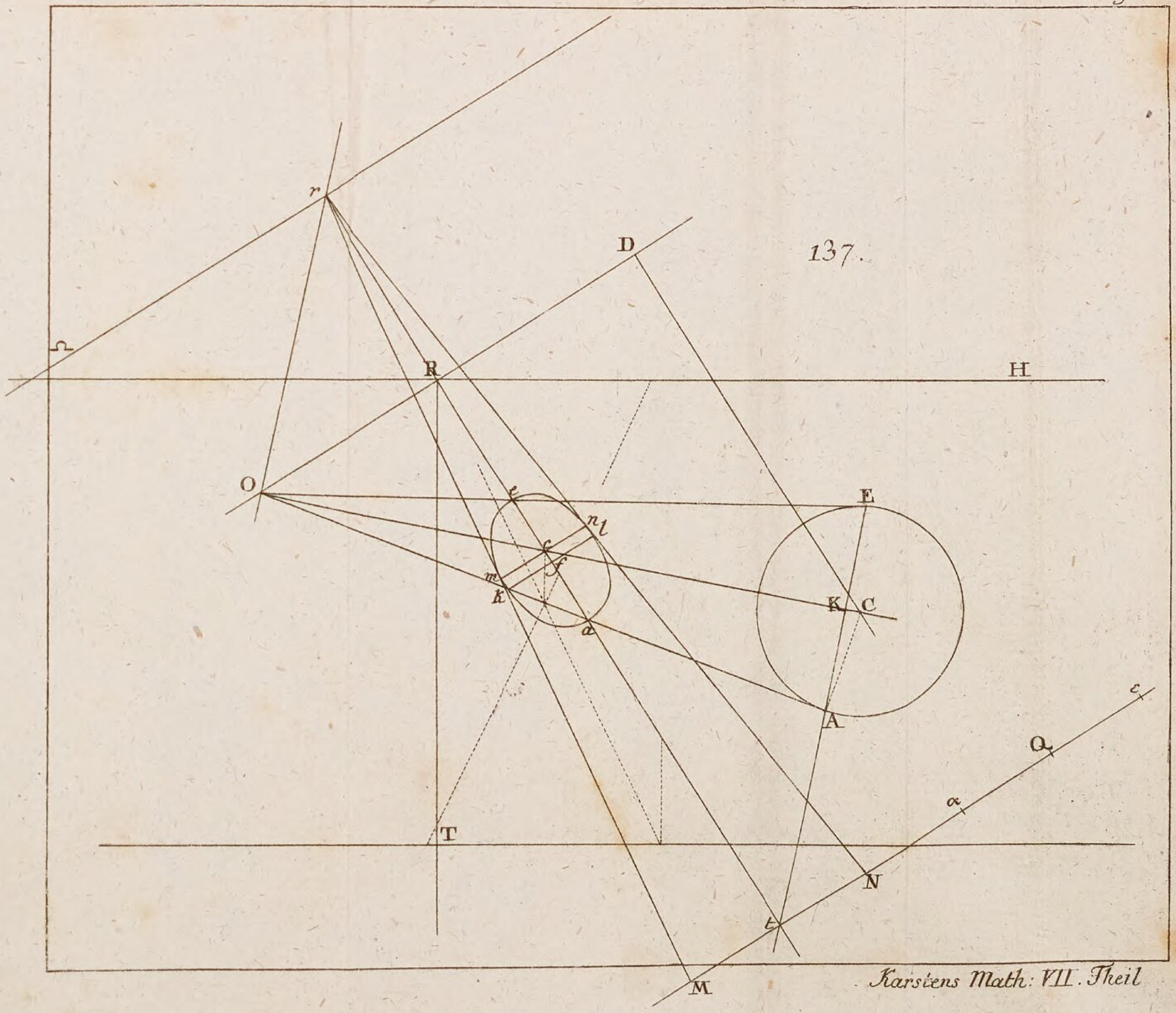
Y


130.
131.
132.
133.
134.


135.
O
π
r
R
m
e
p
c
f
n
a
ω
s
S
T
Z
M
b
β
W
w
B
E
C
P
X
L
A
V
F
G
l
α
t
N
g
K


136.
r
O
R
D
H
c
m
n
k
c
f
l
E
a
K
C
A
T
M
t
N
Q




137.
r
D
R
H
O
E
n
l
c
f
m
k
K
C
d
A
c
Q
α
T
N
t
M

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav,

Wencesl. Joh. Gustav Karsten Lehrbegriff der gesammten Mathematik

Bd.: 7

Greifswald 1775

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.29(7
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739694-0
VD18 80190065-001